[4] A. E. Ingham, *Some asymptotic formulae in the theory of numbers*, Journ. London Math. Soc. 2 (1927), pp. 202–208.
[5] Ju. V. Linnik, *The Dispersion Method in Binary Additive Problems*, Amer. Math. Soc., Trans. Math. Monog., 4 (1963).
[6] A. I. Vinogradov and Ju. V. Linnik, *Estimate of the sum of the number of the divisors in a short segment of an arithmetical progression*, Uspehi Math. Nauk 12 (1957), no. 4 (76), pp. 277–280 (Russian).

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
COLLEGE OF SCIENCE AND ENGINEERING
NIHON UNIVERSITY
Tokyo, Japan

Reçu par la Rédaction le 31. 1. 1969

ACTA ARITHMETICA
XVI (1970)

Généralisation des nombres de Salem aux adèles

par

ANNETTE DECOMPS-GUILLOUX (Paris)

INTRODUCTION; RESUMÉ

I

Rappelons la définition et quelques propriétés essentielles des ensembles S (nombres de Pisot–Vijayaraghavan) et T (nombres de Salem) qui sont à la base de ce travail.

S désigne l'*ensemble des entiers algébriques réels* $\theta > 1$ *dont tous les conjugués* (*différents de* θ) *ont une valeur absolue inférieure à* 1 *strictement.* (C. Pisot [7].)

T désigne *l'ensemble des entiers algébriques réels* $\tau > 1$, *dont tous les conjugués* (*différents de* τ) *ont une valeur absolue inférieure ou égale à* 1, *l'un au moins ayant une valeur absolue égale à* 1. (R. Salem [13].)

Cette définition entraîne qu'un élément τ de T est racine d'un polynôme à coéfficients entiers rationnels, réciproque, de degré pair, ayant un zéro τ extérieur au cercle unité, un zéro $1/\tau$ intérieur au cercle unité, tous les autres zéros appartenant au cercle unité.

1.1. Dans tout corps de nombres algébriques réels, il existe des nombres de l'ensemble S ayant le degré du corps, au contraire il n'existe des éléments de l'ensemble T que dans certaines extensions quadratiques des corps totalement réels.

1.2. Nombres de Pisot et de Salem peuvent être caractérisés par des propriétés de répartition modulo 1. Soit θ un réel >1; l'étude de la décomposition, pour un élément λ convenable non nul,

$$\lambda\theta^n = u_n + \varepsilon_n$$

où u_n est un entier rationnel et où ε_n vérifie $-1/2 \leqslant \varepsilon_n < 1/2$, permet les caractérisations suivantes:

— l'existence d'un élément $\lambda > 1$ tel que, pour tout entier $n \geqslant 0$ la majoration

$$|\varepsilon_n| \leqslant \frac{1}{2e\theta(\theta+1)(1+\operatorname{Log}\lambda)} \quad \text{soit réalisée,}$$

caractérise les éléments θ de la réunion des ensembles S et T (C. Pisot [8]);

— pour un élément θ algébrique la condition

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$$

ou, pour θ réel, la condition

$$\sum_{n=1}^{N} n\varepsilon_n^2 = o(N)$$

caractérise les éléments θ de l'ensemble S (C. Pisot [7], R. Salem [12]) (on remplace parfois la condition $\sum_{n=1}^{N} n\varepsilon_n^2 = o(N)$ par la condition plus forte mais d'expression plus facile $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n^2 < +\infty$);

— l'existence, dans le cercle unité, d'une borne supérieure M pour la partie réelle $\mathscr{R}[\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n x^n]$ jointe à l'hypothèse restrictive que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n^2$ ne converge pas, caractérise les éléments θ de l'ensemble T.

1.3. L'ensemble S possède la propriété remarquable d'etre fermé (R. Salem [12]). L'ensemble S' dérivé de S a été étudié par J. Dufresnoy et C. Pisot [9], [10]. Tout élément de S est point d'accumulation de nombres de T (R. Salem [13]); l'ensemble dérivé de l'ensemble T contient donc l'ensemble S mais on ne sait pas s'il se réduit à cet ensemble.

1.4. Les ensembles S et T sont des sous-ensembles de l'ensemble des nombres α introduits par C. Pisot [7]:

Un nombre $\omega \geqslant 1$ est un *nombre α* s'il peut être obtenu comme la limite

$$\omega = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

associée à une suite d'entiers rationnels u_n, déterminée par

1° la donnée de u_0 et u_1 avec $u_1 > u_0 > 1$;

2° la relation (R): $-\frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} - u_n^2/u_{n-1} < \frac{1}{2}$.

Cet ensemble est dénombrable, dense sur la demi-droite $\alpha \geqslant 1$. En dehors des ensembles S et T on ne sait pas s'il contient d'autres éléments.

2

2.1. p étant un nombre premier, C. Chabauty [4] a introduit dans le corps $\boldsymbol{Q}_p$ des nombres p-adiques un ensemble ayant du point de vue p-adique des propriétés analogues à celles de l'ensemble S. Cet ensemble est en effet fermé dans $\boldsymbol{Q}_p$ et caractérisé par la relation $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n^2 < +\infty$, où ε_n est la partie du développement de Hensel de $\lambda\theta^n$ qui joue le rôle de reste modulo 1 pour le nombre p-adique $\lambda\theta^n$.

2.2. D'autre part, C. Pisot [14] a associé à tout entier rationnel $q \geqslant 1$, un ensemble de nombres algébriques S_q, fermé dans $\boldsymbol{R}$ et dans la clôture algébrique des corps $\boldsymbol{Q}_p$, pour tous les nombres premiers p divisant q.

3

Ces résultats sont à la base de la thèse de F. Bertrandias [2] dont le présent travail représente un prolongement.

Soit I un sous-ensemble fini de l'ensemble de toutes les valuations distinctes P du corps $\boldsymbol{Q}$; F. Bertrandias a donné une généralisation de l'ensemble S dans le cadre de l'anneau V_I, anneau des I adèles rationnels, isomorphe algébriquement et topologiquement au produit $\prod_{p\in I} \boldsymbol{Q}_p$.

Nous rappellerons au chapitre I les principales propriétés de l'anneau V_I; donnons ici la définitions des ensembles $S_I^{p'}$.

3.1. Définition de l'ensemble $S_I^{p'}$. *$S_I^{p'}$ est l'ensemble des éléments θ de V_I, vérifiant, pour tout p de I, $|\theta|_p > 1$ et pour tous lesquels il existe un polynôme A à coefficients entiers rationnels ayant les propriétés suivantes:*

1° *θ est racine de A;*

2° *les racines de A dans la clôture algébrique de $\boldsymbol{Q}_{p'}$, (distinctes de $\theta_{p'}$ si p' appartient à I) appartiennent au disque $|x|_{p'} < 1$;*

3° *pour tout p de P, les racines de A dans la clôture algébrique de $\boldsymbol{Q}_p$ (sauf θ_p si p appartient à I) appartiennent au disque $|x|_p \leqslant 1$.*

3.2. Caractérisation de l'ensemble $S_I^{p'}$. La caractérisation des ensembles $S_I^{p'}$ est liée aux propriétés de la décomposition d'Artin (cf. Ch. I) qui à tout élément x de l'anneau V_I associe un élément $\varepsilon_I(x)$, de composantes $\varepsilon_p(x)$ pour tout p de I, qui joue le rôle de reste modulo 1. Dans ces conditions F. Bertrandias a donné de l'ensemble $S_I^{p'}$ les deux caractérisations suivantes:

Soit θ un élément de l'anneau V_I vérifiant, pour tout p de I, $|\theta|_p > 1$; θ appartient à $S_I^{p'}$ si et seulement s'il existe un élément λ inversible dans V_I tel que

1° *pour un élément θ algébrique*

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_{p'}(\lambda\theta^n) = 0;$$

2° *ou si l'on ne suppose pas θ algébrique*

$$\sum_{n=1}^{N} n|\varepsilon_{p'}(\lambda\theta^n)|_{p'}^2 = o(N).$$

3.3. Tout anneau d'éléments algébriques de V_I contient des éléments de l'ensemble $S_I^{p'}$, ayant le degré de l'anneau. (F. Bertrandias [2].)

4

Ces derniers résultats suggéraient donc d'introduire dans l'anneau V_I un ensemble généralisant l'ensemble T de Salem.

C. Pisot [8], reprenant la méthode introduit par Thue [15], a caractérisé la réunion des ensembles S et T et l'on pouvait penser qu'en utilisant cette méthode dans l'anneau V_I l'ensemble ainsi caractérisé contiendrait outre les ensembles $S_I^{p'}$, un ensemble jouant un rôle analogue à l'ensemble de Salem. Cette étude est l'objet du chapitre I où après avoir rappelé la définition et les principales propriétés de l'anneau V_I, on introduit l'ensemble S_I; la caractérisation que l'on en donne, basée sur la méthode de Thue, peut porter sur la composante réelle ou sur n'importe quelle composante p-adique, toutes les composantes jouant le même rôle vis à vis de cette méthode.

Au contraire, dans le chapitre II où l'on étudie plus précisément la structure de l'ensemble S_I, le rôle particulier de la composante réelle apparaît; en effet, la partition de l'ensemble S_I, que l'on met en évidence est basée sur l'étude de la répartition dans le plan complexe des zéros des polynômes associés aux éléments de l'ensemble S_I. On donne (ou l'on rappelle) une caractérisation des trois sous ensembles S_I^0, Σ_I^0 et T_I, ce qui fait apparaître que l'ensemble T_I est une généralisation de l'ensemble T, aussi bien relativement aux propriétés de répartition modulo 1 que par le fait que l'ensemble dérivé de T_I contient S_I^0.

Le chapitre III est consacré à une généralisation des nombres a, cette étude est liée à celle de certaines suites de rationnels. Après avoir étudié la convergence dans l'anneau V_I des suites introduites, et montré que l'ensemble A_I est dénombrable, on montre que l'ensemble A_I contient l'ensemble S_I et est dense dans un certain ouvert de l'anneau V_I.

De nombreux problèmes restent à résoudre: des problèmes particuliers à l'anneau des I-adèles rationnels comme celui de la fermeture de l'ensemble S_I^0; des problèmes qui se posent déjà dans le domaine réel comme celui de l'identité éventuelle entre l'ensemble dérivé de T_I et l'ensemble S_I^0 ou l'existence d'éléments de A_I n'appartenant pas à S_I.

CHAPITRE I
ENSEMBLE S_I

1. Anneau des I-adèles rationnels. Décomposition d'Artin

1.1. Définitions. Notations. Soit P l'ensemble de toutes les valuations distinctes du corps $\boldsymbol{Q}$ des rationnels; la valuation ordinaire représentée par 0 sera notée $|\ |$ ou $|\ |_0$ et, p étant un nombre premier, la valuation p-adique correspondante sera notée $|\ |_p$ et normée par $|p|_p = 1/p$.

A tout élément p de P (éventuellement $p = 0$) on associe le corps $\boldsymbol{Q}_p$, complété du corps $\boldsymbol{Q}$ par rapport à la valuation correspondante.

L'anneau V_P des adèles rationnels est le sous anneau du produit de tous les corps $\boldsymbol{Q}_p$ $(p\in P)$ composé des éléments $x = (x_p)$ avec $x_p \in \boldsymbol{Q}_p$ tels que l'ensemble des p de P pour lesquels $|x|_p > 1$ est fini. Cet anneau a un élément unité e_P de composantes égales à 1 pour tout p de P.

Soit I un sous ensemble fini non vide de P. On appelle *anneau des I-adèles rationnels* le sous anneau, noté V_I de V_P, constitué des éléments $x = (x_p)$ tels que $x_p = 0$ si $p \notin I$. L'anneau V_I est donc isomorphe au produit $\prod_{p\in I} \boldsymbol{Q}_p$, dont on lui donne la topologie. On désigne par e_I l'élément unité de V_I.

La structure d'algèbre sur $\boldsymbol{Q}$ des corps $\boldsymbol{Q}_p$ induit sur V_I une structure d'algèbre sur $\boldsymbol{Q}$. On désigne par $\boldsymbol{Q}_I$ le sous anneau de V_I formé des multiples rationnels de l'élément neutre. Les anneaux V_I ont été étudiés par F. Bertrandias dans sa thèse [2], dont nous utiliserons les notations; en particulier:

I^- désigne l'ensemble des éléments non nuls de I,

I^+ désigne la réunion de I et de $\{0\}$,

$\boldsymbol{Z}[I]$ désigne l'anneau des rationnels n'ayant en dénominateur que des facteurs premiers appartenant à I^-. L'anneau $\boldsymbol{Z}[I]\,e_I$ joue dans V_I un rôle analogue à celui joué dans les réels par l'anneau $\boldsymbol{Z}$ des entiers rationnels, comme le montre la décomposition d'Artin:

1.2. Décomposition d'Artin. *Pour tout élément x de l'anneau V_I, il existe un élément $E(x)$ de l'anneau $\boldsymbol{Z}[I]$ tel que la différence $\varepsilon_I(x) = x - e_I E(x)$ vérifie les inégalités*:

1) *pour tout p de I^-,* $|\varepsilon_I(x)|_p \leqslant 1$,

2) *si* 0 $\begin{cases} \textit{n' appartient pas à } I, & a \leqslant -E(x) < a+1, \\ \textit{appartient à } I, & a \leqslant \varepsilon_0(x) < a+1. \end{cases}$

Le choix du nombre réel a rend la décomposition unique. Nous prendrons toujours $a = -\frac{1}{2}$.

L'élément $\varepsilon_I(x)$ joue un rôle analogue au reste modulo 1 pour les réels, en particulier dans la caractérisation de certains ensembles d'éléments algébriques comme les ensembles $S_I^{p'}$. (F. Bertrandias [2].) Ce rôle sera confirmé dans la caractérisation de l'ensemble S_I.

Auparavant rappelons la définition et quelques propriétés des éléments algébriques de V_I.

1.3. Éléments algébriques de l'anneau V_I. (F. Bertrandias [2].) Pour tout élément α de V_I, et tout polynôme P à coefficients rationnels,

$$P(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$$

on pose

$$P(\alpha) = a_0 e_I + a_1 \alpha + \ldots + a_n \alpha^n.$$

On dit qu'un élément α de V_I est algébrique s'il existe un polynôme P à coefficients rationnels tel que $P(\alpha) = 0$. Comme l'ensemble I est fini, ceci est équivalent au fait que toutes les composantes de α soient algébriques.

Soit α un élément algébrique de V_I; l'ensemble des polynômes P à coefficients rationnels tels que $P(\alpha) = 0$ est un idéal de l'anneau $\boldsymbol{Q}[X]$. On appelle polynôme minimal de α et l'on note $Pm_I(\alpha, X)$ le polynôme unitaire qui engendre cet idéal.

A tout élément α algébrique on peut associer une partition, notée (I_h) $(h = 1, \ldots, m)$, de I telle que, si l'on note α_{I_h} l'élément de V_{I_h} ayant mêmes composantes que α pour les indices de I_h, le polynôme $Pm_I(\alpha, X)$ se décompose en un produit

$$Pm_I(\alpha, X) = \prod_{h=1}^{m} Pm_{I_h}(\alpha_{I_h}, X),$$

où les polynômes $Pm_{I_h}(\alpha_{I_h}, X)$ sont irréductibles et distincts deux à deux.

Si α est un élément algébrique de V_I, à tout polynôme P à coefficients rationnels on associe l'élément $P(\alpha)$. L'ensemble de ces éléments constitue un sous anneau de V_I, que l'on note $\boldsymbol{Q}_I[\alpha]$. Si (I_h) $(h = 1, \ldots, m)$ est la partition de I associée à α, cet anneau est le composé direct de m corps $\boldsymbol{Q}_{I_h}[\alpha_{I_h}]$. En particulier l'anneau $\boldsymbol{Q}_I[\alpha]$ est un corps si et seulement si le polynôme minimal de α est irréductible.

2. Définition de l'ensemble S_I

S_I est l'ensemble des éléments θ de V_I vérifiant, pour tout p de I, $|\theta|_p > 1$ et pour lesquels il existe un polynôme A à coefficients entiers rationnels ayant les propriétés suivantes:

1° *θ est racine de A,*

2° *pour tout p de P, les racines de A dans la clôture algébrique de $\boldsymbol{Q}_p$ (distinctes de θ_p pour p appartenant à I) appartiennet au disque $|x|_p \leqslant 1$.*

En supposant le polynôme A primitif, on voit facilement qu'il a une expression de la forme

$$A(X) = qX^s + a_{s-1}X^{s-1} + \ldots + a_0$$

où $q = \prod_{p\in I} |\theta|_p$ et pour tout p de I^-, $|a_{s-1}|_p = 1$; les zéros du polynôme A dans le corps $\boldsymbol{C}$ des complexes appartiennent tous au disque $|x| \leqslant 1$ (sauf θ_0 si 0 appartient à I).

Réciproquement, un élément θ de V_I, vérifiant, pour tout p de I, $|\theta|_p > 1$ et racine dans V_I d'un tel polynôme, appartient à l'ensemble S_I.

Remarquons que le polynôme A est lié au polynôme minimal de θ:

$$A(X) = qPm_I(\theta, X)X^m$$

où m est l'entier défini par $a_{m+1} \neq 0$, $a_i = 0$ si $i = m$ $(0 \leqslant m \leqslant s)$. Cette remarque nous permettra dans la suite de parler du polynôme A associé à un élément θ de S_I.

3. Caractérisation de l'ensemble S_I

3.1. Notations. Enoncé du théorème. On considère deux éléments θ et λ de V_I et l'on pose pour tout p de I^-

$$p^{t_p} = |\theta|_p \quad \text{et} \quad p^{b_p} = |\lambda|_p;$$

on définit encore

$$q = \prod_{p\in I^-} p^{t_p},$$

$$m = \prod_{p\in I^-} p^{b_p}, \text{ multiplié par } \lambda_0 \text{ si 0 appartient à } I.$$

On suppose λ_0 et θ_0 tous deux positifs.

Théorème. *Soit θ un élément de l'anneau V_I vérifiant, pour tout p de I, $|\theta|_p > 1$. La condition nécessaire et suffisante pour que θ appartienne à l'ensemble S_I est qu'il existe un élément λ de V_I vérifiant, pour tout p de I, $|\lambda|_p > 1$ tel que l'on ait pour tout entier $n \geqslant 0$:*

(A) $$|E(\lambda\theta^n)| \leqslant \frac{1}{q^2 e(1+\operatorname{Log} m)}, \quad \textit{si 0 n'appartient pas à } I,$$

(A′) $$|\varepsilon_0(\lambda\theta^n)| \leqslant \frac{1}{2eq^2\theta_0(\theta_0+1)(1+\operatorname{Log} m)}, \quad \textit{si 0 appartient à } I.$$

3.2. Condition suffisante—méthode de Thue.

Principe de la méthode. (A. Thue [15], C. Pisot [8].) Le point principal de la démonstration est de prouver que θ est algébrique. Soit $u_n = E(\lambda\theta^n)$, on cherche à montrer que la série $\sum_0^\infty u_n X^n$ représente une fraction rationnelle; d'après Thue on recherche des coefficients entiers rationnels a_i tels que pour tout $n \geqslant 0$ on ait la relation

$$a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \ldots + a_s u_{n+s} = 0.$$

On étudie donc les valeurs prises par l'expression

$$V_n = a_0 u_n + \ldots + a_s u_{n+s},$$

en supposant que les coefficients a_i sont bornés en valeur absolue par a, les réels u_n par $1/U$ si $0 \notin I$ (resp. les réels $\varepsilon_0(\lambda\theta^n)$ par $1/\psi$ si $0 \in I$).

Le premier point est de trouver une relation liant U (resp. ψ), a et s pour que l'égalité $V_n = 0$ entraîne $V_{n+1} = 0$.

En supposant cette relation vérifiée, on cherche une condition, liant a et s, pour qu'il existe un système non identiquement nul d'entiers $(a_0, \ldots, a_s)$ tel que $V_0 = 0$. Cette partie de la démonstration s'appuie sur le principe des tiroirs: en tenant compte des majorations, on calcule le nombre de systèmes possibles et le nombre de valeurs que peut prendre l'expression V_0; si le nombre de systèmes est supérieur au nombre de valeurs, il existe deux systèmes distincts donnant la même valeur à V_0 et donc un système $(a_0, \ldots, a_s)$ non identiquement nul tel que $V_0 = 0$.

On montre enfin que l'inégalité (A) (resp. (A')) étant vérifiée, on peut trouver des nombres s et a tels que les conditions précédemment établies soient réalisées simultanément. L'algébricité de θ étant montrée, il est alors très facile d'en déduire qu'il appartient à S_I.

Démonstration.

a) *L'égalité $V_0 = 0$ jointe à la condition*

(1) $$U > a(s+1)q \quad \textit{si } 0 \textit{ n'appartient pas à } I,$$

resp.

(1') $$\psi > a(s+1)q(1+\theta_0) \quad \textit{si } 0 \textit{ appartient à } I,$$

entraîne, pour tout entier $n \geqslant 0$, $V_n = 0$.

Pour tout p de I, soit $\varepsilon_{n,p} = \varepsilon_p(\lambda\theta^n)$; la relation d'Artin se traduit dans $\boldsymbol{Q}_p$ par l'égalité

$$\lambda_p \theta_p^n = u_n + \varepsilon_{n,p} \quad \text{avec} \quad |\varepsilon_{n,p}|_p \leqslant 1.$$

Pour tout p de I^-, l'expression $V_{n+1} - \theta_p V_n$ vérifie donc

$$|V_{n+1} - \theta_p V_n|_p \leqslant \max_{i=0,1,\ldots,s} |u_{n+i+1} - \theta_p u_{n+i}|_p$$
$$= \max_{i=0,1,\ldots,s} |\theta_p \varepsilon_{n+i,p} - \varepsilon_{n+i+1,p}|_p \leqslant p^{t_p}.$$

Si 0 appartient à I, on aura une majoration analogue pour $V_{n+1} - \theta_0 V_n$

$$|V_{n+1} - \theta_0 V_n| \leqslant a(s+1) \max_{i=0,1,\ldots,s} |\theta_0 \varepsilon_{n+i,0} - \varepsilon_{n+i+1,0}|$$

soit $|V_{n+1} - \theta_0 V_n| \leqslant \dfrac{a(s+1)(1+\theta_0)}{\psi}$.

L'égalité $V_n = 0$ entraîne donc

— pour tout p de I^-, la majoration

$$|V_{n+1}|_p \leqslant p^{t_p};$$

— pour $p = 0$, si 0 appartient à I, la majoration

$$|V_{n+1}| \leqslant \frac{a(s+1)(1+\theta_0)}{\psi}.$$

Pour $p = 0$, si 0 n'appartient pas à I, V_{n+1} est bornée en valeur absolue

$$|V_{n+1}| \leqslant \frac{a(s+1)}{U}.$$

En faisant le produit de ces inégalités on obtient les relations:

$$|V_{n+1}| \prod_{p \in I} |V_{n+1}|_p \leqslant \frac{a(s+1)q}{U} \quad \text{si } 0 \text{ n'appartient pas à } I,$$

$$|V_{n+1}| \prod_{p \in I^-} |V_{n+1}|_p \leqslant \frac{a(s+1)(1+\theta_0)q}{\psi} \quad \text{si } 0 \text{ appartient à } I.$$

Or, V_{n+1} appartenant à l'anneau $\boldsymbol{Z}[I]$, l'inégalité

$$|V_{n+1}| \prod_{p \in I^-} |V_{n+1}|_p < 1,$$

implique $V_{n+1} = 0$. On obtient donc les conditions énoncées.

b) *Pour tout entier $s \geqslant 1$, on peut trouver des entiers rationnels non tous nuls $a_0, \ldots, a_s$ tels que $V_0 = 0$, si l'on suppose réalisée la condition:*

(2) $$a \geqslant qm^{1/s} - 1 \quad \textit{si } 0 \textit{ n'appartient pas à } I,$$

resp.

(2') $$a \geqslant 2q\theta m^{1/s} - 1 \quad \textit{si } 0 \textit{ appartient à } I,$$

en tenant compte de la relation (1), (*resp.* (1')).

Considérons toutes les expressions

$$V_0' = A_0|u_0|+A_1|u_1|+\ldots+A_s|u_s|$$

où les A_i prennent, pour tout $i = 0, \ldots, s$, toutes les valeurs entières vérifiant $0 \leqslant A_i \leqslant a$. Il y a $(a+1)^{s+1}$ telles expressions dont la valeur ordinaire est bornée par

$$\frac{a(s+1)}{U} \quad \text{si } 0 \text{ n'appartient pas à } I,$$

$$a(s+1)\left(\lambda_0\theta_0^s+\frac{1}{\psi}\right) \quad \text{si } 0 \text{ appartient à } I.$$

Toutes les expressions V_0' prennent leur valeur dans l'anneau $\boldsymbol{Z}[I]$, et l'égalité, pour tout p de I^-

$$|u_n|_p = p^{b_p+nt_p}$$

entraîne que le dénominateur de u_n est mq^n donc celui de V_0' est mq^s si 0 n'appartient pas à I, et que le dénominateur de u_n est $\frac{m}{\lambda_0}q^n$, donc celui de V_0' est $\frac{m}{\lambda_0}q^s$, si 0 appartient à I. Le nombre de valeurs que peut prendre V_0' est borné supérieurement par

$$\frac{a(s+1)mq^s}{U}, \quad \text{si } 0 \text{ n'appartient pas à } I,$$

$$a(s+1)\left(\lambda_0\theta_0^s+\frac{1}{\psi}\right)\frac{m}{\lambda_0}q^s, \quad \text{si } 0 \text{ appartient à } I.$$

On peut donc conclure à l'existence d'un système $(a_0, \ldots, a_s)$ d'entiers rationnels non tous nuls, tel que $V_0 = 0$,

dans le cas où 0 n'appartient pas à I, si l'inégalité

$$(a+1)^{s+1} > \frac{(s+1)amq^s}{U}$$

est vérifiée, ce qui est vrai à fortiori si l'on a

$$a+1 \geqslant qm^{1/s} \qquad (2).$$

dans le cas où 0 appartient à I, si l'inégalité

$$(a+1)^{s+1} > (s+1)a\left(\theta_0^s+\frac{1}{\psi\lambda_0}\right)q^s$$

est vérifiée, ce qui est vrai a fortiori si l'on a

$$a+1 \geqslant 2q\theta_0 m^{1/s} \qquad (2').$$

c) *L'inégalité,*

(A) $\quad U \geqslant q^2e(1+\mathrm{Log}\,m)$, *si* 0 *n'appartient pas à* I,

resp.

(A′) $\quad \psi \geqslant 2eq^2\theta_0(\theta_0+1)(1+\mathrm{Log}\,m)$ *si* 0 *appartient à* I,

étant réalisée, on peut trouver des entiers rationnels s *et* a *tels que les conditions* (1) *et* (2), (resp. (1′) et (2′)) *soient simultanément réalisées. En prenant pour* s *l'entier rationnel défini par* $s-1 \leqslant \mathrm{Log}\,m < s$, *on a l'inégalite*

$$(s+1)m^{1/s} < e(1+\mathrm{Log}\,m).$$

En effet la droite d'équation $y_1 = \frac{x}{s}+\mathrm{Log}(1+s)$ et la courbe d'équation $y_2 = 1+\mathrm{Log}(1+x)$ ont un point d'intersection d'abscisse s. Le point d'abscisse $s-1$ de la droite est au dessous du point de même abscisse de la courbe; donc, en raison de la concavité de la courbe, la droite se trouve en dessous de la courbe pour les points dont l'abscisse appartient à l'intervalle $[s-1, s[$, en particulier si $x = \mathrm{Log}\,m$. On définit l'entier a par les inégalités

$$a < qm^{1/s} \leqslant a+1 \quad \text{si } 0 \text{ n'appartient pas à } I,$$

$$a < 2q\theta_0 m^{1/s} \leqslant a+1 \quad \text{si } 0 \text{ appartient à } I.$$

Si 0 n'appartient pas à I, l'inégalité

$$U \geqslant q^2e(1+\mathrm{Log}\,m)$$

entraîne donc

$$U > q^2(s+1)m^{1/s} > a(s+1)q.$$

Si 0 appartient à I, l'inégalité

$$\psi \geqslant 2eq^2\theta_0(\theta_0+1)(1+\mathrm{Log}\,m)$$

entraîne

$$\psi \geqslant 2(1+\theta_0)q\theta_0 m^{1/s}(s+1) > a(s+1)q(1+\theta_0).$$

La définition de a permet de réaliser $V_0 = 0$, celle de s, jointe à l'inégalité (A) (resp. (A′)) permet d'en déduire $V_n = 0$ pour tout n.

La série $\sum_0^\infty u_nX^n$ représente donc une fraction rationnelle $\frac{P(X)}{Q(X)}$ (les polynômes P et Q sont supposés premiers entre eux) et les égalités réalisées pour tout p de I

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_p\theta_p^nX^n = \frac{\lambda_p}{1-\theta_pX} = \sum_0^\infty u_nX^n+\sum_0^\infty \varepsilon_{n,p}X^n$$

où λ_p est différent de 0, impliquent que $1/\theta$ est zéro du polynôme Q. D'autre part, les inégalités $|u_n|_p \leqslant 1$ si p n'appartient pas à I, $|\varepsilon_{n,p}|_p \leqslant 1$ si p appartient à I, entraînent que, pour tout p de P, le polynôme Q n'a pas de zéros intérieurs au disque unité (sauf $1/\theta_p$ si p appartient à I) dans la clôture algébrique de $\boldsymbol{Q}_p$. L'élément θ de V_I, zéro du polynôme $Q(1/X)$ appartient donc à l'ensemble S_I. L'égalité, réalisée pour tout p de I^-,

$$\lambda_p = -\theta_p \frac{P(1/\theta_p)}{Q'(1/\theta_p)}$$

entraîne que λ est un élément de l'anneau $\boldsymbol{Q}_I[\theta]$.

3.3. Condition nécessaire.

Principes de la méthode. Soit θ un élément de S_I; on cherche un élément λ de l'anneau $\boldsymbol{Q}_I[\theta]$ tel que, pour tout entier $n \geqslant 0$, la condition (A) si 0 n'appartient pas à I, (resp. (A') si 0 appartient à I), soit vérifiée. La démonstration repose sur l'existence, dans tout anneau $\boldsymbol{Q}_I[\theta]$, d'éléments ayant le degré de l'anneau et appartenant à l'intersection des ensembles $S_I^{p'}$, pour tous les p' d'un sous ensemble fini J^+ de P.

Soit s le degré de θ et A le polynôme à coefficients entiers, primitif, de degré s dont θ est racine et dont on note: pour tout p de I

θ_p, $\theta_p^{(i)}$ $(i = 2, \ldots, s)$ les zéros dans la clôture algébrique de $\boldsymbol{Q}_p$,

et si 0 n'appartient pas à I,

$\theta_0^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, s)$ les zéros dans $\boldsymbol{C}$.

On cherche un élément λ, racine d'un polynôme R, de degré s, dont on note: pour tout p de I

λ_p, $\lambda_p^{(i)}$ $(i = 2, \ldots, s)$ les zéros dans la clôture algébrique de $\boldsymbol{Q}_p$,

et si 0 n'appartient pas à I

$\lambda_0^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, s)$ les zéros dans $\boldsymbol{C}$.

Pour tout P de I, l'expression $\lambda_p \theta_p^n + \sum_{i=2}^{s} \lambda_p^{(i)} \theta_p^{(i)}$ représente un élément de l'anneau $\boldsymbol{Z}[I]$ qui est indépendant de p dans I et égal, dans le cas où 0 n'appartient pas à I, à $\sum_{i=1}^{s} \lambda_0^{(i)} \theta_0^{(i)n}$.

Le problème est donc de déterminer λ de telle sorte que soient réalisées simultanément et pour tout entier $n \geqslant 0$, l'égalité $u_n = E(\lambda\theta^n)$ et la condition (A) (resp. (A')).

Démonstration. Soit I_h $(h = 1, \ldots, m)$ la partition de I associée à θ, et soit s_h le degré du corps $\boldsymbol{Q}_{I_h}[\theta_{I_h}]$.

Soit μ_h un élément de degré s_h du corps $\boldsymbol{Q}_{I_h}[\theta_{I_h}]$ appartenant à $S_{I_h}^0$. Les éléments μ_h^ν, où ν est un entier positif, sont des éléments de degré s_h de l'ensemble $S_{I_h}^0$; et leurs polynômes minimaux sont premiers entre eux deux à deux. (F. Bertrandias [2], ch. II.)

On peut donc choisir, pour $h = 1, \ldots, m$, un système $\nu_1, \ldots, \nu_m$, d'entiers positifs tels que les polynômes minimaux relatifs aux éléments $\mu_h^{\nu_h}$ soient premiers entre eux deux à deux.

Soit μ l'élément de V_I ayant pour tout $h = 1, \ldots, m$ mêmes composantes que $\mu_h^{\nu_h}$ pour p appartenant à I_h; μ est un élément de degré s, appartenant à l'ensemble S_I^0 et racine d'un polynome S, primitif, dont on note: pour tout p de I

μ_p, $\mu_p^{(i)}$ $(i = 2, \ldots, s)$ les zéros dans la clôture algébrique de $\boldsymbol{Q}_p$,

et si 0 n'appartient pas à I

$\mu_0^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, s)$ les zéros dans $\boldsymbol{C}$.

Ces éléments vérifient donc les inégalités: pour tout p de I^-

$$|\mu_p^{(i)}|_p \leqslant 1, \quad i = 2, \ldots, s,$$

et, si 0 n'appartient pas à I

$$|\mu_0^{(i)}| < 1, \quad i = 1, \ldots, s,$$

si 0 appartient à I

$$|\mu_0^{(i)}| < 1, \quad i = 2, \ldots, s.$$

Soit

$$M = \max |\mu_0^{(i)}| \begin{cases} i = 1, \ldots, s, \text{ si 0 n'appartient pas à } I, \\ i = 2, \ldots, s, \text{ si 0 appartient à } I; \end{cases}$$

les inégalités précédentes entraînent:

$$\Big|\sum_{i=2}^{s} \mu_p^{(i)} \theta_p^{(i)n}\Big|_p \leqslant 1, \quad \text{pour tout } p \text{ de } I,$$

et si 0 n'appartient pas à I,

$$\Big|\sum_{i=1}^{s} \mu_0^{(i)} \theta_0^{(i)n}\Big| < sM,$$

si 0 appartient à I,

$$\Big|\sum_{i=2}^{s} \mu_0^{(i)} \theta_0^{(i)n}\Big| < (s-1)M.$$

En prenant λ de la forme μ^ν, où ν est un entier positif, les inégalités relatives à la composante réelle s'écrivent:

$$\Big|\sum_{i=1}^{s}\lambda_0^{(i)}\theta_0^{(i)n}\Big| < sM^\nu, \quad \text{si } 0 \text{ n'appartient pas à } I,$$

$$\Big|\sum_{i=2}^{s}\lambda_0^{(i)}\theta_0^{(i)n}\Big| < (s-1)M^\nu, \quad \text{si } 0 \text{ appartient à } I.$$

On peut donc déterminer ν_0 tel que, pour $\nu > \nu_0$, on ait

$$sM^\nu < \tfrac{1}{2} \quad \text{si } 0 \text{ n'appartient pas à } I,$$

$$(s-1)M^\nu < \tfrac{1}{2} \quad \text{si } 0 \text{ appartient à } I,$$

ce qui entraîne, pour tout entier $n \geqslant 0$, compte tenu des inégalités, réalisés pour tout p de I,

$$\Big|\sum_{i=2}^{s}\lambda_p^{(i)}\theta_p^{(i)n}\Big|_p \leqslant 1,$$

la relation $u_n = E(\lambda\theta^n)$.

En posant alors $m_1 = \prod_{p\in I}|\mu|_p$ et $m = \prod_{p\in I}|\lambda|_p$ on a l'égalité $\operatorname{Log} m = \nu\operatorname{Log} m_1$. Or le réel M étant strictement inférieur à 1, on peut donc déterminer ν_1 de telle sorte que pour $\nu \geqslant \nu_1$, on ait, pour tout entier $n \geqslant n_0$:

$$M^\nu s \leqslant \frac{1}{q^2 e(1+\nu\operatorname{Log} m)} \quad \text{si } 0 \text{ n'appartient pas à } I,$$

$$M^\nu(s-1) \leqslant \frac{1}{2eq^2\theta_0(\theta_0+1)(1+\nu\operatorname{Log} m)} \quad \text{si } 0 \text{ appartient à } I.$$

En prenant alors $\nu \geqslant \max(\nu_0, \nu_1)$, les deux conditions cherchées sont réalisées simultanément.

4. Autres caractérisations de l'ensemble S_I

La caractérisation que nous avons donnée traduit, pour les éléments θ de S_I, une propriété de la composante réelle dans la décomposition d'Artin de $\lambda\theta^n$, λ étant un élément convenablement choisi de l'anneau V_I. Aucune composante ne jouant un rôle particulier pour les éléments de l'ensemble S_I, comme cela est le cas dans les ensembles $S_I^{p'}$, on peut envisager une caractérisation portant sur une composante p-adique ou sur un produit de composantes.

Si 0 n'appartient pas à I, on peut, dans l'énoncé du théorème, remplacer, la condition

$$\text{(A)} \qquad |E(\lambda\theta^n)| \leqslant \frac{1}{q^2 e(1+\operatorname{Log} m)}$$

par une des trois conditions suivantes (B), (C), ou (D). Les conditions (B) et (C) sont relatives à un sous ensemble fini, non vide, J de l'ensemble I (pouvant être I tout entier) et s'expriment ainsi pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$\text{(B)} \qquad \prod_{p\in J}|\varepsilon_p(\lambda\theta^n)|_p \leqslant \frac{1}{q^2 e(1+\operatorname{Log} m)},$$

$$\text{(C)} \qquad E(\lambda\theta^n)\prod_{p\in J}|\varepsilon_p(\lambda\theta^n)|_p \leqslant \frac{1}{2eq^2(1+\operatorname{Log} m)}.$$

La condition (D) fait intervenir un élément p' de P qui n'appartient pas à I; elle s'exprime ainsi, pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$\text{(D)} \qquad |\varepsilon_{p'}(\lambda\theta^n)|_{p'} \leqslant \frac{1}{q^2 e(1+\operatorname{Log} m)} \quad \text{où} \quad \varepsilon_{p'}(\lambda\theta^n) = -E(\lambda\theta^n).$$

Si 0 appartient à I, on peut, dans l'énoncé du théorème, remplacer la condition

$$\text{(A}'\text{)} \qquad |\varepsilon_0(\lambda\theta^n)| \leqslant \frac{1}{2eq^2\theta_0(\theta_0+1)(1+\operatorname{Log} m)}$$

par une des deux conditions suivantes (B$'$) ou (D$'$). La condition (B$'$) est relative à un sous ensemble fini, non vide J, de l'ensemble I (pouvant être I tout entier) et s'exprime ainsi, pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$\text{(B}'\text{)} \qquad \prod_{p\in J}|\varepsilon_p(\lambda\theta^n)|_p \leqslant \frac{1}{2eq^2\theta_0(\theta_0+1)(1+\operatorname{Log} m)};$$

et la condition (D$'$) fait intervenir, comme la condition (D), un élément p' de P qui n'appartient pas à I; elle s'exprime pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$\text{(D}'\text{)} \qquad |\varepsilon_{p'}(\lambda\theta^n)|_{p'} \leqslant \frac{1}{2eq^2(\theta_0+1)^2(1+\operatorname{Log} m)} \quad \text{où} \quad \varepsilon_{p'}(\lambda\theta^n) = -E(\lambda\theta^n).$$

Pour montrer que ces derniers conditions sont caractéristiques on utilise les mêmes méthodes que dans le paragraphe 3.

La démonstration de la partie condition suffisante, en particulier, suit les mêmes étapes que la démonstration précédente; donnons-en les grandes lignes, pour le cas où 0 appartient à I et où l'on suppose, par exemple, satisfaite la condition (B$'$).

On utilise les mêmes notations que précédemment et l'on suppose, pour tout n entier $\geqslant 0$, que le produit $\prod_{p\in J}|\varepsilon_p(\lambda\theta^n)|_p$ est borné par $1/\overline{\omega}$.

On montre alors successivement les points suivants:

a) L'égalité $V_0 = 0$, jointe à l'inégalité $\overline{\omega} > \frac{a(s+1)(1+\theta_0)q}{2}$ entraîne, pour tout entier $n \geqslant 0$, $V_n = 0$.

En effet, si 0 n'appartient pas à J: l'égalité $V_n = 0$ entraîne les inégalites:

$$\prod_{p\in I^-} |V_{n+1}|_p \leqslant \frac{q}{\overline{\omega}} \quad \text{et} \quad |V_{n+1}| \leqslant \frac{a(s+1)(1+\theta_0)}{2}$$

et par conséquent

$$|V_{n+1}| \prod_{p\in I^-} |V_{n+1}|_p \leqslant \frac{a(s+1)(1+\theta_0)q}{2}.$$

Si 0 appartient à J: on suppose pour tout entier $n \geqslant 0$, le produit $\prod_{p\in J^-} |\varepsilon_{p'}(\lambda\theta^n)|_p$ borné par $\frac{1}{\overline{\omega}_{J^-}}$ et $|\varepsilon_0(\lambda\theta^n)|$ par $\frac{1}{\overline{\omega}_0}$, de telle sorte que l'égalité $\overline{\omega}_0 \cdot \overline{\omega}_J = \overline{\omega}$ soit vérifiée.

L'égalité $V_n = 0$ entraîne donc les inégalités

$$\prod_{p\in I} |V_{n+1}|_p \leqslant \frac{q}{\overline{\omega}_J} \quad \text{et} \quad |V_{n+1}| \leqslant \frac{a(s+1)(1+\theta_0)}{\overline{\omega}_0}$$

et donc

$$|V_{n+1}| \prod_{p\in I^-} |V_{n+1}|_p \leqslant \frac{a(s+1)(1+\theta_0)}{\overline{\omega}}.$$

b) Si a vérifie l'inégalité $a \geqslant 2m^{1/s}(\theta_0+1)q$, on peut réaliser l'égalité $V_0 = 0$, avec des coefficients a_i qui vérifient $|a_i| \leqslant a$ pour $i = 1, \ldots, s$.

Dans les deux cas envisagés on peut écrire l'inégalité fondamentale sous la forme:

$$(a+1)^{s+1} > a(s+1)(\lambda_0\theta_0^s + \tfrac{1}{2})mq^s,$$

inégalité réalisée *a fortiori* si

$$a+1 \geqslant 2m^{1/s}q(\theta_0+1).$$

c) En prenant s défini par $s-1 \leqslant \operatorname{Log} m < s$ et a défini par $a < 2qm^{1/s}(\theta_0+1) \leqslant a+1$, l'inégalité $\overline{\omega} > 2e(1+\operatorname{Log} m)(1+\theta_0)^2q^2$ entraîne

$$\overline{\omega} > 2m^{1/s}(1+\theta_0)^2q^2 > a(s+1)(1+\theta_0)q,$$

ce qui permet de réaliser, pour tout entier $n \geqslant 0$, l'égalité $V_n = 0$.

La démonstration de la réciproque est basée sur la construction d'un élément μ de l'anneau $Q_I[\theta]$, à partir d'éléments μ_h des corps $Q_{I_h}[\theta_{I_h}]$, appartenant à la réunion des ensembles $S_{I_h}^{p'}$ (pour tous des p' d'un sous ensemble non vide K de J dans le cas de la condition (B) ou (B′), pour tous les p' d'un sous ensemble K^+ de J^+ dans le cas de la condition (C), et pour l'élément p', dans le cas de la condition (D) ou (D′).

L'élément μ étant défini à partir des éléments $\mu_h^{\nu_h}$ comme précédemment, on peut trouver un entier $\nu > 0$ tel que pour l'élément $\lambda = \mu^\nu$ la condition envisagée soit réalisée.

5. Remarques

5.1. L'énoncé du théorème indique que la condition (A) ou (A′) est réalisée pour tout entier $n \geqslant 0$. On peut énoncer le théorème en supposant réalisée pour tout entier $n \geqslant n_0$ la condition (A_{n_0}) resp. (A'_{n_0}) ainsi définie

$$(A_{n_0}) \qquad |E(\lambda\theta^n)| \leqslant \frac{1}{q^2e(1+n_0\operatorname{Log} q + \operatorname{Log} m)},$$

$$(A'_{n_0}) \qquad |\varepsilon_0(\lambda\theta^n)| \leqslant \frac{1}{2eq^2\theta_0(\theta_0+1)(1+n_0\operatorname{Log} q+\operatorname{Log} m)}.$$

La même transformation peut se faire pour les autres conditions.

5.2. Dans le cas où l'ensemble I se réduit à un seul élément, si cet élément est 0 la condition (A′) est celle énoncée par C. Pisot [2]; si cet élément est différent de 0, la condition (A) représente une caractérisation des éléments de l'ensemble S_p de Chabauty [1] $E(\lambda_p\theta_p^n)$ étant pour l'élément θ_p de S_p la partie principale du développement de Hensel de l'élément $\lambda_p\theta_p^n$ du corps Q_p.

CHAPITRE II

SOUS-ENSEMBLES REMARQUABLES DE L'ENSEMBLE S_I

L'ensemble S_I possède des sous-ensembles remarquables, les ensembles $S_I^{p'}$, qui ont été étudiés par F. Bertrandias. Le but de ce chapitre est de déterminer d'autres sous-ensembles de S_I et d'arriver ainsi à une partition de cet ensemble. Cette partition est basée sur l'étude de la répartition dans le plan complexe des zéros des polynômes associés aux éléments θ de S_I. (Nous utiliserons toutes les notations introduites dans le chapitre précédent, en particulier dans le paragraphe relatif aux éléments algébriques.)

1. Ensembles Σ_I^0 et T_I. Définitions

1.1. Répartition dans C des zéros des polynômes associés aux éléments de l'ensemble S_I. Soient θ un élément de S_I et A le polynôme associé, c'est-à-dire le polynôme à coefficients entiers rationnels lié au polynôme minimal de θ par la relation $A(X) = Pm_I(\theta, X)q$ où $q = \prod_{p \in I^-} |\theta|_p$. On note I_h (pour h appartenant à δ) la partition correspondante de I.

Dans l'anneau $\mathbf{Z}[X]$ des polynômes à coefficients entiers rationnels, le polynôme A de décompose en un produit

$$A(X) = \prod_{h \in \delta} A_h(X),$$

où les polynômes irréductibles A_h sont liés aux polynômes minimaux Pm_{I_h} par les relations $A_h(X) = q_h Pm_{I_h}(\theta, X)$, où $q_h = \prod_{p \in I_h^-} |\theta|_p$.

Les zéros du polynôme A dans C appartiennent tous au disque $|x| \leqslant 1$ (sauf θ_0 si 0 appartient à I).

Si tous les polynômes A_h ont tous leurs zéros (sauf éventuellement θ_0), intérieurs au disque $|x| < 1$, l'élément θ appartient à S_I^0. Dans le cas contraire, nous noterons B_h ceux des polynômes A_h qui ont au moins un zéro sur le cercle unité, réservant la dénomination A_h à ceux des polynômes intervenant dans la décomposition du polynôme A et dont tous les zéros dans C sont intérieurs au cercle unité (sauf éventuellement θ_0).

Un polynôme B_h ayant dans C un zéro sur le cercle unité en a un second imaginaire conjugué du précédent; en effet le polynôme B_h étant irréductible n'a pas ± 1 comme zéro. Un tel polynôme B_h est donc réciproque, de degré pair, et tous ses zéros dans C appartiennent au cercle unité (sauf θ_0 et $1/\theta_0$ si 0 appartient à I_h, dans ce cas le polynôme B_h est au moins de degré 4). Nous appellerons Σ_I^0 l'ensemble des éléments de S_I pour lesquels la décomposition du polynôme A fait intervenir à la fois des polynômes A_h et B_h, et T_I l'ensemble des éléments de S_I pour lesquels la décomposition de A ne fait intervenir que des polynômes B_h.

1.2. Ensemble Σ_I^0. Définition. Soit θ un élément de S_I, I_h (h appartenant à δ) la partition correspondante de I.

Nous supposerons qu'il existe une partition de δ en deux ensembles δ_1 et δ_2 tels que:

pour h appartenant à δ_1, θ_{I_h} est zéro d'un polynôme A_h,

pour h appartenant à δ_2, θ_{I_h} est zéro d'un polynôme B_h.

En notant A' le produit des polynômes A_h pour h appartenant à δ_1, et B' le produit des polynômes B_h pour h appartenant à δ_2, on voit que θ est racine d'un polynôme A, produit dans l'anneau $\mathbf{Z}[X]$ de deux polynômes A' et B', où le polynôme A' a dans C tous ses zéros intérieurs au cercle unité (sauf l'un d'eux θ_0, si 0 appartient à I_1) et où B' est un polynôme réciproque dont tous les zéros appartiennent au cercle unité (sauf deux d'entre eux, θ_0 et $1/\theta_0$ dans le cas où 0 appartient à I_2, B' étant au moins de degré 4).

Réciproquement, si θ est un élément de S_I, racine d'un polynôme A produit de deux tels polynômes A' et B', on montre facilement que θ appartient à Σ_I^0; d'où la définition:

Définition de Σ_I^0. *Σ_I^0 est l'ensemble des éléments σ de V_I, vérifiant, pour tout p de I, $|\sigma|_p > 1$ et pour lesquels il existe un polynôme A à coefficients entiers rationnels, ayant les propriétés suivants:*

1° *σ est racine de A;*

2° *pour tout p de P les racines de A, dans la clôture algébrique de Q_p, appartiennent au disque $|x|_p \leqslant 1$, sauf θ_p, si p appartient à I;*

3° *le polynôme A est, dans l'anneau $\mathbf{Z}[X]$ le produit de deux polynômes:*

$$A(X) = A'(X)B'(X)$$

où, dans C, les zéros du polynôme A', (sauf éventuellement σ_0) sont tous intérieurs au cercle unité, et ceux du polynôme réciproque et de degré pair B' appartiennent tous (sauf éventuellement σ_0 et $1/\sigma_0$, dans ce cas B' est au moins de degré 4) au cercle unité.

1.3. Ensemble T_I. Définition. Soit θ un élément de S_I, I_h la partition correspondante de I. On suppose que, pour tout h appartenant à δ, θ_{I_h} est zéro d'un polynôme B_h. L'élément θ est donc zéro d'un polynôme B, réciproque, de degré pair:

$$B(X) = qX^{2s} + q_1 X^{2s-1} + \ldots + q_1 X + q,$$

où $q = \prod_{p \in I^-} |\theta|_p$ et, pour tout p de I^-, $|q_1|_p = 1$ et dont tous les zéros dans C appartiennent au cercle unité (sauf θ_0 et $1/\theta_0$ si 0 appartient à I, dans ce cas le polynôme irréductible B_h, dont θ_0 est racine, est au moins de degré 4). Réciproquement on montre facilement qu'un élément θ de V_I, racine d'un tel polynôme, appartient à T_I.

Définition de T_I. *T_I est l'ensemble des éléments τ de V_I, vérifiant, pour tout p de I, $|\tau|_p > 1$, et pour lesquels il existe un polynôme B à coefficients entiers rationnels ayant les propriétés suivantes:*

1° *τ est racine de B;*

2° *B est un polynôme réciproque, dont l'expression a la forme suivante:*

$$B(X) = qX^{2s} + q_1 X^{2s-1} + \ldots + q_1 X + q,$$

où $q = \prod_{p \in I^-} |\tau|_p$ et, pour tout p de I^-, $|q_1|_p = 1$, et dont tous les zéros dans C appartiennent au cercle unité (sauf τ_0 et $1/\tau_0$ si 0 appartient à I; on suppose dans ce cas que le polynôme B_{h_0} irréductible dont τ_0 est racine est au moins de degré 4).

1.4. Remarques.

a) Structure de l'ensemble Σ_I^0. Soit σ un élément de l'ensemble Σ_I^0, en conservant les notations du paragraphe 1.2, et en appelant I_1 (resp. I_2) le sous-ensemble de I constitué par la réunion des ensembles I_h pour h appartenant à δ_1 (resp. δ_2), on remarque que l'élément σ_{I_1} de l'anneau V_{I_1} appartient à $S_{I_1}^0$, tandis que l'élément σ_{I_2} de l'anneau V_{I_2} appartient à T_{I_2}.

Réciproquement, un élément de l'ensemble produit $S_{I_1}^0 \times T_{I_2}$ est un élément de Σ_I^0.

L'ensemble Σ_I^0 apparaît donc comme constitué par la réunion des ensembles produits $S_J^0 \times T_K$, pour tous les couples J et K de sous-ensembles non vides de I, dont l'intersection est vide et dont la réunion est l'ensemble I tout entier.

b) Eléments des ensembles $S_I^{p'}$. La partition que nous avons constituée de l'ensemble S_I, en trois sous-ensembles S_I^0, Σ_I^0, et T_I, est basée sur le fait qu'un polynôme, irréductible dans l'anneau $\boldsymbol{Q}[X]$, ayant dans $\boldsymbol{C}$ un zéro différent de ± 1 sur le cercle unité, est nécessairement réciproque; elle met en évidence le rôle particulier joué par la valuation archimédienne parmi les autres valuations, et par l'ensemble S_I^0 parmi les ensembles $S_I^{p'}$.

Soit θ un élément d'un ensemble $S_I^{p'}$ où p' est différent de 0; examinons les trois cas possibles:

1. θ appartient à S_I^0; dans ce cas θ appartient à la réunion des ensembles S_I^p pour p appartenant à la réunion de p' et de 0.

2. θ appartient à Σ_I^0; le polynôme A associé à θ est produit de deux polynômes A' et B'. Dans la clôture algébrique de $\boldsymbol{Q}_{p'}$, le polynôme B' n'a aucun zéro sur le cercle unité, ce qui impose que p' appartienne à I_2 et que B' soit du second degré, donc que 0 n'appartienne pas à I_2.

3. θ appartient à T_I; le polynôme B dont θ est racine n'a dans la clôture algébrique de $\boldsymbol{Q}_{p'}$ aucun zéro sur le cercle unité, ce qui impose que p' appartienne à I et que B soit du second degré, donc que 0 n'appartienne pas à I.

On peut exprimer encore ces résultats sous la forme suivante: soit θ un élément de $S_I^{p'}$ (où $p' \neq 0$):

Si 0 n'appartient pas à I:

si p' n'appartient pas à I, θ appartient à la réunion des ensembles S_I^p pour p appartenant à la réunion de p' et de 0;

si p' appartient à I, θ appartient soit à S_I^0, soit à Σ_I^0, dans ce cas p' appartient à I_1, soit à T_I, c'est alors un élément du second degré de T_I.

Si 0 appartient à I:

si p' n'appartient pas à I, θ appartient à la réunion des ensembles S_I^p, pour p appartenant à la réunion de p' et de 0;

si p' appartient à I, θ appartient soit à la réunion des ensembles S_I^p, pour p appartenent à la réunion de p' et de 0, soit à Σ_I^0, dans ce cas I_2 contient nécessairement p' mais ne contient pas 0.

2. Caractérisation des sous-ensembles remarquables de S_I

Nous utiliserons dans ce paragraphe les notations introduites d'une part dans le chapitre précédent, notamment en ce qui concerne la décomposition d'Artin des éléments $\lambda\theta^n$, d'autre part dans le paragraphe précédent, en particulier pour les éléments des ensembles Σ_I^0 et T_I.

Le but de ce paragraphe est de caractériser les trois sous-ensembles qui forment la partition de l'ensemble S_I.

Dans certains cas la caractérisation sera une caractérisation directe d'un ensemble d'éléments de l'anneau V_I, dans d'autres, au contraire, il s'agira de la caractérisation d'un sous-ensemble de l'ensemble S_I.

Pour la condition suffisante, les deux types de démonstrations sont très différents; dans le premier cas, en effet, le point principal est de montrer que l'élément est algébrique, et la démonstration, comme dans le chapitre I, fait appel à un critère de rationnalité de certaines séries entières; dans le second cas on suppose au contraire que l'élément est algébrique, et la démonstration, beaucoup plus rapide, revient à montrer que l'élément n'appartient pas aux autres sous-ensembles disjoints de l'ensemble S_I.

Les deux théorèmes relatifs à l'ensemble S_I^0 et dus à F. Bertrandias fournissent un exemple des deux types de démonstration.

Pour l'ensemble Σ_I^0 nous le caractériserons comme sous-ensemble de S_I, au contraire nous donnerons de l'ensemble T_I une caractérisation directe.

2.1. Caractérisations de l'ensemble S_I^0. (F. Bertrandias.)

THÉORÈME 1. *Un élément θ de V_I vérifiant, pour tout p de I, $|\theta|_p > 1$, appartient à S_I^0 si et seulement s'il existe un élément λ tel que,*

$$\text{(A)} \qquad \sum_{n=1}^{N} nE(\lambda\theta^n)^2 = o(N), \qquad \textit{si 0 n'appartient pas à } I,$$

$$\text{(A')} \qquad \sum_{n=1}^{N} n\varepsilon_0(\lambda\theta^n)^2 = o(N), \qquad \textit{si 0 appartient à } I.$$

THÉORÈME 2. *Un élément algébrique θ de S_I appartient à S_I^0 si et seulement s'il existe un élément λ inversible de V_I tel que,*

(a) $$\lim_{n\to\infty} E(\lambda\theta^n) = 0, \quad \textit{si } 0 \textit{ n'appartient pas à } I,$$

(a′) $$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_0(\lambda\theta^n) = 0, \quad \textit{si } 0 \textit{ appartient à } I.$$

2.2. Caractérisation des sous-ensembles Σ_I^0 de S_I. Soit σ un élément de Σ_I^0 et A le polynôme associé, produit dans l'anneau $\mathbf{Z}[X]$ des polynômes A' et B' où l'élément σ_{I_1} racine de A' appartient à $S_{I_1}^0$ et l'élément σ_{I_2} racine de B' appartient à T_{I_2}.

Soit λ un élément quelconque de l'anneau $\mathbf{Q}_I[\sigma]$; la décomposition d'Artin de $\lambda\sigma^n$ dans l'anneau V_I et celle de $\lambda_{I_1}\sigma_{I_1}^n$ dans l'anneau V_{I_1} s'écrivent respectivement

$$\lambda\sigma^n = E(\lambda\sigma^n)e_I + \varepsilon_I(\lambda\sigma^n),$$

$$\lambda_{I_1}\sigma_{I_1}^n = E_{I_1}(\lambda_{I_1}\sigma_{I_1}^n)e_{I_1} + \eta_{I_1}(\lambda_{I_1}\sigma_{I_1}^n).$$

On pose

$$v_n = E_{I_1}(\lambda_{I_1}\sigma_{I_1}^n) \quad \text{et} \quad \eta_{n,p} = \eta_{I_{1,p}}(\lambda_{I_1}\sigma_{I_1}^n);$$

les égalités précédentes entraînent, pour tout p de I_1, dans $\mathbf{Q}_p$:

$$\lambda_p\sigma_p^n = u_n + \varepsilon_{n,p} = v_n + \eta_{n,p}.$$

Or l'élément σ_{I_1} appartient à $S_{I_1}^0$, donc si 0 n'appartient pas à I_1, il existe dans l'anneau $\mathbf{Q}_{I_1}[\sigma_{I_1}]$ un élément λ_{I_1} tel que

(b) $$\lim_{n\to\infty} E_{I_1}(\lambda_{I_1}\theta_{I_1}^n) = 0,$$

si 0 appartient à I_1, il existe dans l'anneau $\mathbf{Q}_{I_1}[\sigma_{I_1}]$ un élément λ_{I_1} tel que

(b′) $$\lim_{n\to\infty} \eta_0(\lambda_{I_1}\theta_{I_1}^n) = 0.$$

Réciproquement, l'existence, dans l'anneau $\mathbf{Q}_I[\sigma]$, d'un élément λ, dont la composante λ_{I_1} est telle que la condition (b) (resp. (b′)) est vérifiée, entraîne que l'élément σ_{I_1} appartient à l'ensemble $S_{I_1}^0$, donc σ appartient à l'ensemble S_I^0 ou Σ_I^0.

Or λ étant un élément de l'anneau $\mathbf{Q}_I[\sigma]$, il suffit, pour que l'élément n'appartienne pas à S_{I_1}, que l'on n'ait pas,

$$\lim_{n\to\infty} E(\lambda\sigma^n) = 0, \quad \text{si } 0 \text{ n'appartient pas à } I,$$

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_0(\lambda\sigma^n) = 0, \quad \text{si } 0 \text{ appartient à } I,$$

d'où le théorème.

THÉORÈME. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément σ de l'ensemble S_I appartienne au sous-ensemble Σ_I^0 est qu'il existe un élément λ de l'anneau $\mathbf{Q}_I[\sigma]$ et un sous-ensemble non vide I_1 de I tel que, la composante λ_{I_1} de λ étant inversible, on ait dans la décomposition d'Artin de $\lambda_{I_1}\sigma_{I_1}^n$ dans l'anneau V_{I_1}*

(b) $$\lim_{n\to\infty} E_{I_1}(\lambda_{I_1}\theta_{I_1}^n) = 0, \quad \textit{si } 0 \textit{ n'appartient pas à } I,$$

(b′) $$\lim_{n\to\infty} \eta_0(\lambda_{I_1}\theta_{I_1}^n) = 0, \quad \textit{si } 0 \textit{ appartient à } I,$$

en supposant que les conditions,

(a) $$\lim_{n\to\infty} E(\lambda\theta^n) = 0, \quad \textit{si } 0 \textit{ n'appartient pas à } I,$$

(a′) $$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_0(\lambda\theta^n) = 0, \quad \textit{si } 0 \textit{ appartient à } I,$$

ne sont pas réalisées.

Remarques. a) Pour tout p de I les égalités

$$u_n + \varepsilon_{n,p} = v_n + \eta_{n,p}$$

se traduisent en une seule dans l'anneau V_{I_1} en posant égal à ζ_{I_1} l'élément de composants $\varepsilon_{n,p} - \eta_{n,p}$, pour tout p de I:

$$u_n e_{I_1} = v_n e_{I_1} + \zeta_{I_1}(u_n).$$

Or les inégalités:

$$|\varepsilon_{n,p} - \eta_{n,p}|_p \leqslant 1, \quad \text{pour tout } p \text{ de } I_1 \text{ et tout entier } n \geqslant 0,$$

et

$$-1 < \varepsilon_{n,0} - \eta_{n,0} < 1, \quad \text{si } 0 \text{ appartient à } I_1,$$

cette dernière inégalité entraînant, la limite de $\eta_{n,0}$ étant nulle, pour $n > n_0$ la relation

$$-\tfrac{1}{2} < \varepsilon_{n,0} - \eta_{n,0} < \tfrac{1}{2},$$

(sauf dans le cas où l'on aurait constamment $\varepsilon_{n,0} = -\frac{1}{2}$) montrent que, pour tout entier n si 0 n'appartient pas à I, et pour tout entier $n > n_0$ si 0 appartient à I, l'égalité

$$u_n e_{I_1} = v_n e_{I_1} + \zeta_{I_1}(u_n)$$

représente la décomposition d'Artin de $u_n e_{I_1}$ dans l'anneau V_{I_1}.

b) Nous avons caractérisé l'ensemble Σ_I^0 comme sous-ensemble de l'ensemble S_I, donc en supposant a priori l'élément algébrique et en utilisant les conditions faibles (b) ou (b′).

On peut envisager une caractérisation directe, où l'on ne supposerait pas a priori l'élément σ algébrique, et où l'on utiliserait des conditions telles que

$$(\mathrm{B}_1) \qquad \sum nE_I^2(\lambda\theta^n) = o(N),$$

resp.

$$(\mathrm{B}_1') \qquad \sum n\varepsilon_0^2(\lambda\theta^n) = o(N);$$

une telle condition indiquerait bien que θ_{I_1} est algébrique, mais ne renseignerait pas sur θ_{I_2}, il serait donc nécessaire d'avoir une condition traduisant l'algébricité de l'élément θ_{I_2}. Or, un tel problème revenant à traduire la structure de l'ensemble Σ_I^0 qui est la réunion des ensembles $S_J \times T_K$, nous nous bornerons ici à la caractérisation signalée.

c) Seule intervient dans l'énoncé du théorème la composante λ_{I_1} de λ, on pourrait donc penser que la composante λ_{I_2} peut être choisie quelconque, mais remarquons que nous avons utilisé explicitement le fait que λ appartient à l'anneau $\boldsymbol{Q}_I[\sigma]$ en affirmant que la condition (non (a)) ou (non (a')) entraîne que θ n'appartient pas à l'ensemble S_I^0.

2.3. Caractérisation de l'ensemble T_I. L'analogie entre l'ensemble T_I et l'ensemble T de Salem apparaît déjà dans leurs définitions respectives; nous allons la préciser par la démonstration d'un théorème qui généralise pour l'ensemble T_I le théorème suivant de Salem ([13], (14]):

Soit τ un réel supérieur à 1. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il appartienne à T est qu'il existe un réel $\lambda \neq 0$ tel que la partie réelle $\mathscr{R}[\sum_0^\infty \varepsilon_n x^n]$, où ε_n représente le reste modulo 1 de $\lambda\tau^n$ soit bornée supérieurement à l'intérieur du cercle unité, sans que la série $\sum_0^\infty \varepsilon_n^2$ converge.

a) *Enoncé du théorème. Soit τ un élément de l'anneau V_I vérifiant pour tout p de I $|\tau|_p > 1$; la condition nécessaire et suffisante pour que τ appartienne à l'ensemble T_I est qu'il existe un élément λ inversible de V_I, et un nombre réel M tels que l'on ait pour $|x| < 1$:*

$$(\mathrm{C}) \qquad \mathscr{R}\Big(\sum_0^\infty E(\lambda\tau^n)x^n\Big) \geqslant M, \quad \textit{si } 0 \textit{ n'appartient pas à } I,$$

$$(\mathrm{C}') \qquad \mathscr{R}\Big(\sum_0^\infty \varepsilon_0(\lambda\tau^n)x^n\Big) \leqslant M, \quad \textit{si } 0 \textit{ appartient à } I,$$

en supposant en outre que les condition suivantes l'égalité,

$$(\mathrm{a}) \qquad \lim_{n\to\infty} E(\lambda\tau^n) = 0, \quad \textit{si } 0 \textit{ n'appartient pas à } I,$$

$$(\mathrm{a}') \qquad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_0(\lambda\tau^n) = 0, \quad \textit{si } 0 \textit{ appartient à } I,$$

et l'existence d'un sous-ensemble I_1 de I, non vide et inclus strictement dans I tel que l'on ait

$$(\mathrm{b}) \qquad \lim_{n\to\infty} E_{I_1}(\lambda_{I_1}\tau_{I_1}^n) = 0, \quad \textit{si } 0 \textit{ n'appartient pas à } I_1,$$

$$(\mathrm{b}') \qquad \lim_{n\to\infty} \eta_0(\lambda_{I_1}\tau_{I_1}^n) = 0, \quad \textit{si } 0 \textit{ appartient à } I_1,$$

ne sont pas réalisées.

Soit $u_n = E(\lambda\tau^n)$; pour montrer que la condition est suffisante, le point principal de la démonstration est de prouver que la série $\sum_0^\infty u_n X^n$ associée à τ représente une fraction rationnelle. Dans ce but nous allons établir un critère de rationnalité des séries entières à coefficients dans l'anneau $\boldsymbol{Z}[I]$.

b) Critère de rationnalité pour les séries entières à coefficients dans l'anneau $\boldsymbol{Z}[I]$. Soit $\sum_0^\infty u_n X^n$ une série entière; on lui associe les déterminants de Kronecker:

$$d_n = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \dots & u_n \\ u_1 & u_2 & \dots & u_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_n & u_{n+1} & \dots & u_{2n} \end{vmatrix};$$

la condition nécessaire et suffisante pour que la série $\sum_0^\infty u_n X^n$ représente une fraction rationnelle est que $d_n = 0$ pour n assez grand.

Pour les séries entières à coefficients entiers, d_n étant entier, il suffit de montrer qu'il est inférieur à 1 à partir d'un certain rang, ce que l'on établit en général en montrant l'égalité

$$\lim_{n\to\infty} d_n = 0.$$

Pour les séries à coefficients dans l'anneau $\boldsymbol{Z}[I]$, d_n appartenant à cet anneau, le but de la démonstration est d'obtenir l'inégalité

$$|d_n| \prod_{p \in I^-} |d_n|_p < 1$$

qui entraîne $d_n = 0$.

Pour obtenir cette inégalité on peut envisager deux méthodes:

1° ou réaliser l'égalité

$$\lim_{n\to\infty} d_n = 0$$

en supposant que les rationnels $|d_n|_p$ sont bornés (ou n'augmentent pas trop vite), 2° ou réaliser pour un (ou plusieurs) p de I l'égalité

$$\lim_{n\to\infty} |d_n|_p = 0,$$

en supposant que les autres $|d_n|_p$ sont bornés et que d_n n'augmente pas trop vite. (Cette méthode est utilisée en particulier par B. Dwork dans le théorème relatif aux séries entières à coefficients dans $\boldsymbol{Z}[p]$ et dont l'extension aux séries à coefficients dans l'anneau $\boldsymbol{Z}[I]$ est immédiate.)

La première méthode permet d'étendre aux séries à coefficients dans l'anneau $\boldsymbol{Z}[I]$ les théorèmes relatifs aux séries à coefficients entiers, en ajoutant, pour tous les p de I, une condition relative à la valuation p-adique des coefficients. Le critère suivant est un exemple; c'est une généralisation du théorème de Cantor qui montre que, pour une série à coefficients entiers, le fait que la fonction correspondante soit à caractéristique bornée dans le cercle unité, c'est-à-dire, soit le quotient de deux fonctions holomorphes et bornées dans ce cercle, est une condition suffisante pour que la série représente une fraction rationnelle.

Critère de Cantor pour les séries entières à coefficients dans l'anneau $\boldsymbol{Z}[I]$. *Soit $\sum_0^\infty u_n X^n$ une série entière à coefficients dans l'anneau $\boldsymbol{Z}[I]$, satisfaisant aux conditions suivantes:*

(i) *dans $\boldsymbol{C}$ la somme de la série $\sum_0^\infty u_n x^n$ est prolongeable en une fonction $f(x)$ à caractéristique bornée dans le cercle unité;*

(ii) *pour tout p de I, il existe un polynôme B_p à coefficients dans une extension K_p de $\boldsymbol{Q}_p$ tels que les coefficients $v_n^{(p)}$ de la série produit de B_p par la série $(\sum_0^\infty u_n X^n)$ vérifient pour tout entier $n \geqslant 0$*

$$|v_n^{(p)}|_p \leqslant p^{m_p},$$

la série $\sum_0^\infty u_n X^n$ représente une fraction rationnelle.

Démonstration. La fonction $f(x)$ étant à caractéristique bornée dans le cercle unité de $\boldsymbol{C}$, ceci est équivalent, comme l'a montré Cantor, à la proposition suivante: étant donné $\varepsilon > 0$, on peut trouver une constante $C(\varepsilon)$ et un rang N tel que pour $n > N$ on ait

$$|d_n| \leqslant C(\varepsilon)\,\varepsilon^n.$$

D'autre part, pour tout p de I, si le polynôme B_p s'écrit

$$B_p(X) = 1 + \beta_1^{(p)} X + \ldots + \beta_k^{(p)} X^k,$$

(k étant fonction de p); la condition (ii) s'exprime par les égalités

$$v_n^{(p)} = u_n + \beta_1^{(p)} u_{n-1} + \ldots + \beta_k^{(p)} u_{n-k},$$

où $|v_n^{(p)}|_p \leqslant p^{m_p}$; en posant de même

$$w_n^{(p)} = v_n^{(p)} + \beta_1^{(p)} v_{n-1}^{(p)} + \ldots + \beta_k^{(p)} v_{n-k}^{(p)},$$

on a, pour tout entier $n \geqslant 0$

$$|w_n^{(p)}| \leqslant p^{m'_p}.$$

En mettant alors $|d_n|_p$ sous la forme

$$\begin{vmatrix} u_0 & \ldots & u_{k-1} & v_k & \ldots & v_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{k-1} & \ldots & u_{2k-2} & v_{2k-1} & \ldots & v_{n+2k-1} \\ v_k & \ldots & v_{2k-1} & w_{2k} & \ldots & w_{n+2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_n & \ldots & v_{n+k-1} & w_{n+k} & \ldots & w_{2n} \end{vmatrix}$$

(l'indice p a été supprimé dans les $v_n^{(p)}$ et $w_n^{(p)}$ pour simplifier l'écriture), et en notant

$$p^{r_p} = \max_{i=0,1,\ldots,2k-2} (|u_i|_p,\, p^{m_p},\, p^{m'_p}),$$

on a la majoration, pour tout p de I,

$$|d_n|_p \leqslant p^{r_p(n+1)}.$$

Si l'on pose $l = \prod_{p\in I^-} p^{r_p}$, l'inégalité $\prod_{p\in I^-} |d_n|_p \leqslant l^{n+1}$ est vérifiée. Les hypothèses entraînent donc, pour $n > N$, l'inégalité

$$|d_n| \prod_{p\in I^-} |d_n|_p \leqslant C(\varepsilon)\,\varepsilon^n l^{n+1} = K(\varepsilon)(\varepsilon l)^n.$$

A partir d'un certain rang l'inégalité

$$|d_n| \prod_{p\in I^-} |d_n|_p < 1$$

est vérifiée, ce qui entraîne

$$d_n = 0.$$

c) Démonstration de la condition suffisante. Soit τ un élément de l'anneau V_I qui satisfait à la condition (C) (resp. (C′)) et "non (a)" (resp. "non (a′)"), "non (b)" (resp. "non (b′)").

Nous allons montrer que la série entière $\sum_0^\infty u_n X^n$ associée à τ satisfait aux conditions (i) et (ii) du critère précédent.

Dans $\boldsymbol{C}$ l'inégalité $|u_n| \leqslant \frac{1}{2}$ si 0 n'appartient pas à I, (resp. l'égalité $\lambda_0 \tau_0^n = u_n + \varepsilon_{n,0}$ avec $|\varepsilon_{n,0}| \leqslant \frac{1}{2}$ si 0 appartient à I) entraîne que la fonction associée à zéro, (resp. un) pôle intérieur au cercle unité.

D'autre part, si 0 appartient à I, pour x appartenant à la couronne $(\tau_0+1)/2\tau_0 < |x| < 1$, l'inégalité

$$|1-\tau_0 x| > \tfrac{1}{2}|\tau_0-1|$$

est vérifiée, ce qui entraîne la majoration

$$\Big|\sum_0^\infty u_n x^n + \sum_0^\infty \varepsilon_{n,0} x^n\Big| < \frac{2|\lambda_0|}{\tau_0-1};$$

et, en tenant compte de l'hypothèse (C′), l'inégalité

$$\mathscr{R}\Big(\sum_0^\infty u_n x^n\Big) \geqslant M'.$$

Dans les deux cas, la fonction associée ayant un nombre fini de pôles à l'intérieur du cercle unité et ayant une partie réelle bornée inférieurement au voisinage du cercle unité est à caractéristique bornée.

Pour tout p de I^-, l'égalité

$$\lambda_p \tau_p^n = u_n + \varepsilon_{n,p}$$

entraîne la relation

$$(1-\tau_p x)\Big(\sum_0^\infty u_n x^n\Big) = \sum_0^\infty (\varepsilon_{n-1,p}\tau_p - \varepsilon_{n,p})\, x^n$$

où

$$|\varepsilon_{n-1,p}\tau_p - \varepsilon_{n,p}|_p \leqslant |\tau_p|_p = p^{t_p}.$$

La série $\sum_{n=0}^\infty u_n X^n$, satisfaisant à toutes les conditions du critère, représente une fraction rationnelle. L'élément τ appartient donc à l'ensemble S_I et l'élément λ à l'anneau $\boldsymbol{Q}_I[\theta]$;

si τ appartenait à S_I^0, la condition (a) (resp. (a′)) serait vérifiée;

si τ appartenait à Σ_I^0 la condition (b) (resp. (b′)) serait vérifiée; τ appartient donc à l'ensemble T_I.

d) Démonstration de la condition nécessaire. Soit τ un élément de l'ensemble T_I et B le polynôme associé de degré $2s$. On note, pour tout p de I,

$$\tau_p,\ \frac{1}{\tau_p} \quad \text{et} \quad \alpha_p^{(i)},\ (\alpha_p^{(i)})^{-1}, \quad i = 2, \ldots, s,$$

les zéros du polynôme B dans la clôture algébrique de $\boldsymbol{Q}_p$, et si 0 n'appartient pas à I,

$$\alpha_0^{(i)},\ (\alpha_0^{(i)})^{-1}, \quad i = 1, \ldots, s,$$

les zéros du polynôme B dans $\boldsymbol{C}$.

On pose, pour tout p de I,

$$\sigma_p = \tau_p + \frac{1}{\tau_p} \quad \text{et} \quad \varrho_p^{(i)} = \alpha_p^{(i)} + (\alpha_p^{(i)})^{-1}, \quad i = 2, \ldots, s,$$

et si 0 n'appartient pas à I,

$$\varrho_0^{(i)} = \alpha_0^{(i)} + (\alpha_0^{(i)})^{-1}, \quad i = 1, \ldots, s.$$

En notant σ l'élément de l'anneau V_I de composantes σ_p on peut traduire ces dernières égalités par la relation

$$\sigma = \tau + \frac{1}{\tau}.$$

Nous étudierons séparément le cas où 0 n'appartient pas à I et le cas où 0 appartient à I.

Si 0 n'appartient pas à I. Les déterminants

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} 1 & \varrho_0^{(1)} & \ldots & \varrho_0^{(1)s-1} \\ 1 & \varrho_0^{(2)} & \ldots & \varrho_0^{(2)s-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \varrho_0^{(s)} & \ldots & \varrho_0^{(s)s-1} \end{vmatrix}$$

et, pour tout p appartenant à I,

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & \sigma_p & \ldots & \sigma_p^{s-1} \\ 1 & \varrho_p^{(2)} & \ldots & \varrho_p^{(2)s-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \varrho_p^{(s)} & \ldots & \varrho_p^{(s)s-1} \end{vmatrix}$$

étant tous différents de 0; on peut trouver des entiers rationnels $A_1, \ldots, A_s$ non tous nuls, tels que

$$\begin{gathered} |A_1\varrho_0^{(1)s-1} + A_2\varrho_0^{(1)s-2} + \ldots + A_s| < C, \\ |A_1\varrho_0^{(2)s-1} + A_2\varrho_0^{(2)s-2} + \ldots + A_s| < C, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ |A_1\varrho_0^{(s)s-1} + A_2\varrho_0^{(s)s-2} + \ldots + A_s| < C, \end{gathered}$$

et, pour tout p appartenant à I,

$$\begin{gathered} |A_1\sigma_p^{s-1} + A_2\sigma_p^{s-2} + \ldots + A_s|_p < p^{r_p}, \\ |A_1\varrho_p^{(2)s-1} + A_2\varrho_p^{(2)s-2} + \ldots + A_p|_p < p^{-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ |A_1\varrho_p^{(s)s-1} + A_2\varrho_p^{(s)s-2} + \ldots + A_s|_p < p^{-1}, \end{gathered}$$

(C étant un réel compris entre 0 et 1 et r_p, un entier rationnel positif) à condition que

$$C^s\Big(\prod_{p\in I} p^{r_p}\Big)\Big(\prod_{p\in I} p^{-(s-1)}\Big) \geqslant |\Delta_0|\Big(\prod_{p\in I}|\Delta_p|_p\Big),$$

inégalité établie par F. Bertrandias ([2], ch. III).

L'élément θ de l'anneau V_I défini par l'égalité,

$$\theta = A_1\sigma^{s-1}+A_2\sigma^{s-2}+\ldots+A_s$$

est un élément appartenant à l'intersection des ensembles $S_I^{p'}$ pour p' appartenant à I^+. On note

$$\beta^{(i)} = A_1\varrho^{(i)s-1}+A_2\varrho^{(i)s-2}+\ldots+A_s, \quad i = 2, 3, \ldots, s,$$

les autres racines dans V_I du polynôme A associé à θ.

Soient $\beta_0^{(1)}, \ldots, \beta_0^{(s)}$, les zéros du polynôme A dans C, ils sont tous réels et vérifient

$$|\beta_0^{(i)}| < 1, \quad i = 2, 3, \ldots, s.$$

Donc h étant un entier rationnel positif que nous déterminerons ultérieurement, l'élément $\lambda = \theta^{2h}$ de l'anneau V_I appartient à l'intersection des ensembles $S_I^{p'}$ (pour p' appartenant à I^+); il est racine d'un polynôme $A^{(h)}$ dont les autres racines dans V_I sont notées

$$\gamma^{(i)} = (\beta^{(i)})^{2h}, \quad i = 2, 3, \ldots, s.$$

Les zéros du polynôme $A^{(h)}$ dans C, $\gamma_0^{(1)}, \ldots, \gamma_0^{(s)}$, sont réels, positifs, et vérifient

$$0 < \gamma_0^{(i)} < 1, \quad i = 1, 2, \ldots, s.$$

Or l'expression

$$\lambda_p[\tau_p^n+\tau_p^{-n}]+\sum_{i=2}^{s}\gamma_p^{(i)}[\alpha_p^{(i)n}+(\alpha_p^{(i)})^{-n}]$$

est un élément indépendant de p dans I de l'anneau $Z[I]$. Nous poserons égal à v_n cet élément, et à φ_n l'élément de V_I de composantes $\varphi_{n,p}$, pour tout p de I,

$$\varphi_{n,p} = \lambda_p\tau_p^{-n}+\sum_{i=2}^{s}\gamma_p^{(i)}[\alpha_p^{(i)n}+(\alpha_p^{(i)})^{-n}].$$

En prenant pour n_0 le plus petit entier tel que, pour tout p de I, l'inégalité

$$|\lambda_p\tau_p^{-n}|_p \leqslant 1$$

soit vérifiée, l'inégalité $n > n_0$ entraîne, pour tout p de I,

$$|\varphi_{n,p}|_p \leqslant 1.$$

D'autre part, l'égalité

$$v_n = \sum_{i=1}^{s}\gamma_0^{(i)}[\alpha_0^{(i)n}+(\alpha_0^{(i)})^{-n}]$$

entraîne la majoration

$$|v_n| \leqslant 2\sum_{i=1}^{s}\gamma_0^{(i)}.$$

En choisissant alors l'entier rationnel h tel que l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{s}\gamma_0^{(i)} < \tfrac{1}{4}$$

soit vérifiée, on a, pour tout entier n,

$$|v_n| < \tfrac{1}{2}.$$

Pour tout entier n supérieur à n_0, v_n représente la partie principale u_n de $\lambda\tau^n$ dans V_I et φ_n en est la partie non principale ε_n.

Or dans C la série entière $\sum_0^\infty v_n x^n$ représente à l'intérieur du cercle unité le développement de la fonction

$$\sum_{i=1}^{s}\gamma_0^{(i)}\Big[\frac{1}{1-\alpha_0^{(i)}x}+\frac{1}{1+\alpha_0^{(i)}x}\Big];$$

et d'après les propriétés de la transformation conforme, les égalités

$$|\alpha_0^{(i)}| = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, s,$$

entraînent pour $|x| < 1$

$$\mathscr{R}\Big[\frac{1}{1\pm\alpha_0^{(i)}x}\Big] > \tfrac{1}{2}$$

et donc

$$\mathscr{R}\Big[\sum_0^\infty v_n x^n\Big] \geqslant \sum_{i=1}^{s}\gamma_0^{(i)}.$$

Cette dernière inégalité, compte tenu de la relation

$$\sum_0^\infty u_n x^n = \sum_0^{n_0} u_n x^n + \sum_{n_0+1}^{\infty} v_n x^n$$

entraîne pour $|x| < 1$ la majoration

$$\mathscr{R}\Big[\sum_0^\infty u_n x^n\Big] \geqslant M$$

qui représente la condition (C).

Si 0 appartient à I. Les déterminants

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} 1 & \sigma_0 & \dots & \sigma_0^{s-1} \\ 1 & \varrho_0^{(2)} & \dots & \varrho_0^{(2)s-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \varrho_0^{(s)} & \dots & \varrho_0^{(s)s-1} \end{vmatrix}$$

et pour tout p appartenant à I^-,

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & \sigma_p & \dots & \sigma_p^{s-1} \\ 1 & \varrho_p^{(2)} & \dots & \varrho_p^{(2)s-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \varrho_p^{(s)} & \dots & \varrho_p^{(s)s-1} \end{vmatrix}$$

étant différents de 0, on peut trouver d'après le théorème de F. Bertrandias des entiers rationnels non tous nuls $A_1, \dots, A_s$ tels que

$$\begin{gathered} |A_1\sigma_0^{s-1}+A_2\sigma_0^{s-2}+\dots+A_s| < C, \\ |A_1\varrho_0^{(2)s-1}+A_2\varrho_0^{(2)s-1}+\dots+A_s| < c, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ |A_1\varrho_0^{(s)s-1}+A_2\varrho_0^{(s)s-2}+\dots+A_s| < c, \end{gathered}$$

et, pour tout p appartenant à I^-,

$$\begin{gathered} |A_1\sigma_p^{s-1}+A_2\sigma_p^{s-2}+\dots+A_s|_p < p^{r_p}, \\ |A_1\varrho_p^{(2)s-1}+A_2\varrho_p^{(2)s-2}+\dots+A_s|_p < p^{-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ |A_1\varrho_p^{(s)s-1}+A_2\varrho_p^{(s)s-2}+\dots+A_s|_p < p^{-1}, \end{gathered}$$

(C étant un réel >1, c un réel <1, r_p un entier rationnel positif), à condition que

$$Cc^{s-1}\Big(\prod_{p\in I^-} p^{r_p}\Big)\Big(\prod_{p\in I^-} p^{-(s-1)}\Big) \geqslant \Delta_0\Big(\prod_{p\in I^-} |\Delta_p|_p\Big).$$

L'élément θ de l'anneau V_I défini par l'égalité

$$\theta = A_1\sigma^{s-1}+A_2\sigma^{s-2}+\dots+A_s$$

est un élément appartenant à l'intersection des ensembles $S_I^{p'}$, pour p' appartenant à I^+. Le polynôme A associé à θ a pour autres racines dans l'anneau V_I

$$\beta^{(i)} = A_1\varrho^{(i)s-1}+A_2\varrho^{(i)s-2}+\dots+A_s.$$

Dans C, les zéros du polynôme A, θ_0 et $\beta_0^{(i)}$, $i = 2, 3, \dots, s$, sont tous réels. Soit h un entier rationnel positif, le polynôme $A^{(h)}$, associé à l'élément $\lambda = \theta^{2h}$ de l'anneau V_I, a comme autres racines dans V_I

$$\gamma^{(i)} = \beta^{(i)2h}, \quad i = 2, 3, \dots, s,$$

et ses zéros réels λ_0 et $\gamma_0^{(i)}$ vérifient

$$\lambda_0 > 1, \quad 0 < \gamma_0^{(i)} < 1, \quad i = 2, 3, \dots, s.$$

Or l'expression

$$\lambda_p[\tau_p^n+\tau_p^{-n}]+\sum_{i=2}^{s}\gamma_p^{(i)}[a_p^{(i)n}+(a_p^{(i)})^{-n}]$$

est un élément indépendant de p dans I, de l'anneau $\boldsymbol{Z}[I]$, que nous poserons égal à v_n. On pose, comme précédemment, égal à φ_n l'élément de composantes $\varphi_{n,p}$ pour tout p de I,

$$\varphi_{n,p} = \lambda_p\tau_p^{-n}+\sum_{i=2}^{s}\gamma_p^{(i)}[a_p^{(i)n}+(a_p^{(i)})^{-n}].$$

Soit n_0 le plus petit entier tel que, pour tout p de I, l'inégalité

$$|\lambda_p\tau_p^{-n}|_p \leqslant 1$$

soit vérifiée; l'inégalité $n > n_0$ entraîne, pour tout p de I^-,

$$|\varphi_{n,p}|_p \leqslant 1.$$

On choisit alors l'entier rationnel h de telle sorte que l'inégalité

$$\sum_{i=2}^{s}\gamma_0^{(i)} < \tfrac{1}{8}$$

soit vérifiée; dans ces conditions, n_1 étant le plus petit entier tel que

$$|\lambda_0\tau_0^{-n}| < \tfrac{1}{4}$$

l'inégalité $n > n_1$ entraîne $|\varphi_{n,0}| < \frac{1}{2}$.

Soit $N = \max(n_0, n_1)$; pour $n > N$ le rationnel v_n est égal à la partie principale u_n de $\lambda\tau^n$. La démonstration se termine comme celle de R. Salem et l'on trouve, après calculs,

$$\mathscr{R}\Big[\sum_0^\infty \varepsilon_{0,n}x^n\Big] \leqslant \frac{3N}{4}+\frac{2|\lambda_0|\tau_0}{\tau_0^2-1},$$

inégalité qui représente la condition (C').

2.4. Remarques. L'hypothèse restrictive "la série $\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n^2$ ne converge pas", qui exprime dans le théorème de Salem que l'élément τ n'appartient pas à l'ensemble S, est remplacée ici par un ensemble de conditions qui traduisent que l'élément τ n'appartient ni à l'ensemble S_I^0, ni à l'ensemble Σ_I^0. Il apparaît donc clairement que la condition (C) (resp. (C′)) sans les hypothèses restrictives non (a) (resp. non (a′)), et non (b) (resp. non (b′)) caractérise l'ensemble S_I tout entier.

3. Éléments limites de suites de l'ensemble T_I. Théorème de Salem

Nous abordons ici un problème relatif aux ensembles dérivés des ensembles introduits. Le théorème que nous allons démontrer généralise le théorème de Salem rappelé dans l'introduction:

"Tout nombre de S est limite de nombres de T",

et précise l'analogie entre les ensembles T_I et T.

THÉORÈME. *Tout élément de l'ensemble S_I^0 est limite d'éléments de l'ensemble T_I.*

Démonstration. Soit θ un élément de S_I^0, racine d'un polynôme P à coefficients entiers rationnels,

$$P(X) = qX^s + q_1X^{s-1} + \ldots + q_s,$$

où $q = \sum_{p\in I^-} |\theta|_p = \sum_{p\in I^-} p^{t_p}$, et pour tout p de I^-, $|q_1|_p = 1$, et dont les zéros dans C (sauf θ_0 si 0 appartient à I) sont tous intérieurs au cercle unité.

Soit Q le polynôme réciproque de P défini par l'égalité

$$Q(X) = X^sP(1/X).$$

Formons la suite des polynômes R_m,

$$R_m(X) = X^mP(X) + Q(X).$$

Pour tout entier m, R_m est un polynôme réciproque; nous allons montrer qu'il a dans V_I une racine τ_m appartenant à T_I et que la suite τ_m a pour limite θ. Auparavant remarquons que

— les polynômes P et Q sont distincts si θ n'est pas un élément quadratique, zéro d'un polynôme réciproque, ce qui ne peut se produire que si 0 appartient à I, nous étudierons à part ce cas particulier,

— le polynôme R_m peut avoir éventuellement parmi ses zéros des racines de l'unité.

3.1. Cas général: les polynômes P et Q sont distincts.

a) *Dans V_I, une racine τ_m du polynôme R_m appartient à T_I.* Les égalités $q = \prod_{p\in I^-} p^{t_p}$ et, pour tout p de I^-, $|q_1|_p = 1$ entraînent les conclusions suivantes:

— pour tout p de I^-, R_m a, dans la clôture algébrique de Q_p, un zéro $\tau_{m,p}$ extérieur au cercle unité, un zéro $\frac{1}{\tau_{m,p}}$ intérieur au cercle unité, tous les autres appartiennent à ce cercle;

— pour tout p n'appartenant pas à I^+, tous les zéros de R_m dans la clôture algébrique de Q_p, sont sur le cercle unité.

Dans C, λ étant un réel >1, soit $R_{m,\lambda}$ le polynôme défini par l'égalité

$$R_{m,\lambda}(X) = X^mP(X) + Q(X);$$

sur le cercle $|x| = 1$, on a l'inégalité

$$|x^mP(x)| < |\lambda Q(x)|$$

ce qui entraîne que le polynôme $R_{m,\lambda}$ a, dans le cercle unité, le même nombre de zéros que le polynôme Q.

Si 0 n'appartient pas à I, pour tout réel $\lambda > 1$, le polynôme $R_{m,\lambda}$ n'a pas de zéro intérieur au cercle unité, en faisant tendre λ vers 1 on voit qu'il en est de même pour R_m.

Tous les zéros du polynôme R_m appartiennent au cercle unité.

Si 0 appartient à I, pour tout réel $\lambda > 1$, le polynôme $R_{m,\lambda}$ a un zéro intérieur au cercle unité. Le polynôme R_m a, au plus, un zéro intérieur au cercle unité. Or les égalités

$$R_m(0) = Q(0) \quad \text{et} \quad R_m(1) = P(1) + Q(1) = 2Q(1)$$

entraînent que $R_m(0)$ et $R_m(1)$ sont de signe contraire. Le polynôme R_m a donc un zéro $\frac{1}{\tau_{0,m}}$ vérifiant $0 < \frac{1}{\tau_{0,m}} < 1$ et donc un autre zéro vérifiant $\tau_{0,m} > 1$. (Remarquons que si R_m n'est pas irréductible le polynôme irréductible dont $\tau_{0,m}$ est racine ne peut être constammant de degré 2.)

Le polynôme R_m a donc pour racine dans V_I un élément τ_m de T_I.

b) *Limite de la suite τ_m.* Pour tout p de I, on étudie la valuation de $P(\tau_m)$ dans les différents corps Q_p. τ_m étant racine du polynôme R_m on a l'égalité

$$P(\tau_m) = -\frac{Q(\tau_m)}{\tau_m^m} = -\tau_m^{s-m}P(1/\tau_m). \tag{1}$$

Pour tout p de I, on utilisera également l'expression de la décomposition de $P(x)$ en facteurs du premier degré dans la clôture algébrique de Q_p, soit

$$P(x) = q(x-\theta_p)(x-\theta_p^{(2)})\ldots(x-\theta_p^{(s)}),$$

ce qui implique l'égalité

$$P(\tau_m) = q(\tau_m-\theta_p)(\tau_m-\theta_p^{(2)})\ldots(\tau_m-\theta_p^{(s)}). \tag{2}$$

Limite, pour tout p de I^- de la suite $\tau_{m,p}$ dans $\boldsymbol{Q}_p$. (On supprimera l'indice p dans θ_p et $\tau_{m,p}$ pour plus de simplicité dans l'écriture.) Remarquons que

$$|\tau_m|_p = p^{t_p} > 1.$$

L'égalité (1) entraîne la majoration

$$|P(\tau_m)|_p \leqslant p^{t_p(s-m)} \tag{3}$$

tandis que l'égalité (2) entraîne la relation

$$|P(\tau_m)|_p = p^{-t_p}|\tau_m - \theta|_p \prod_{i=2}^{s} |\tau_m - \theta^{(i)}|_p,$$

et, en raison des inégalités, $|\theta^{(i)}|_p \leqslant 1$,

$$|P(\tau_m)|_p = |\tau_m - \theta|_p p^{t_p(s-2)}; \tag{4}$$

l'inégalité (3) et l'égalité (4) donnent alors

$$|\tau_m - \theta|_p \leqslant p^{-t_p(m-2)},$$

inégalité qui démontre, pour tout p de I^-, que la limite de la suite $\tau_{m,p}$ est θ_p.

Limite, si 0 appartient à I, de la suite $\tau_{m,0}$. (Nous supprimerons également l'indice 0 dans la démonstration.) Remarquons que la suite τ_m ne converge certainement pas vers 1, en effet: $R_m(1) = 2Q(1)$, et $Q(1)$ est un entier rationnel non nul. En égalant des deux expressions de $P(\tau_m)$ données par les relations (1) et (2) on a l'égalité

$$(\tau_m - \theta)\prod_{i=2}^{s}(\tau_m - \theta^{(i)}) = -\tau_m^m(1-\tau_m\theta)\prod_{i=2}^{s}(1-\tau_m\theta^{(i)})$$

et donc

$$|\tau_m - \theta| = \frac{\tau_m\theta - 1}{\tau_m^m}\prod_{i=2}^{s}\left|\frac{1-\tau_m\theta^{(i)}}{\tau_m - \theta^{(i)}}\right|.$$

Or d'une part l'inégalité $\tau_m > 1$ entraîne

$$\prod_{i=2}^{s}(\tau_m - \theta^{(i)}) > \prod_{i=2}^{s}(1-\theta^{(i)}) = l,$$

où l est un nombre fixé, d'autre part les inégalités: pour $i = 2, \ldots, s$ $|\theta^{(i)}| < 1$ entraînent

$$\prod_{i=2}^{s}|1-\tau_m\theta^{(i)}| < (1+\tau_m)^{s-1}. \tag{5}$$

On peut écrire alors l'inégalité (5) sous la forme

$$|\tau_m - \theta| \leqslant \frac{(1+\tau_m\theta)(1+\tau_m)^{s-1}}{\tau_m^m l},$$

ou encore

$$|\tau_m - \theta| < \frac{2^s\tau_m^s\theta}{\tau_m^m l} = \frac{C}{\tau_m^{m-s}}, \tag{6}$$

C étant une constante; cette dernière inégalité montre que la limite de la suite $\tau_{m,0}$ est θ_0.

Dans V_I la limite de la suite τ_m est donc θ.

3.2. Cas particulier: 0 appartient à I et les polynômes P et Q sont confondus. Soit θ un élément de S_I^0, racine d'un polynôme P,

$$P(X) = qX^2 + q_1X + q,$$

où $q = \prod_{p\in I^-}|\theta|_p = \prod_{p\in I^-} p^{t_p}$, et, pour tout p de I^-, $|q_1|_p = 1$, et ayant deux zéros réels θ_0 et $1/\theta_0$ avec $\theta_0 > 1$. La somme $\theta + 1/\theta = -q_1/q$ est un rationnel de l'anneau $\boldsymbol{Z}[I]$, supérieur à 2 et dont la valeur absolue est, pour tout p de I^-, p^{t_p}.

Soit T_m le polynôme de Tchébycheff défini par

$$T_m(X) = 2\cos mY \quad \text{où} \quad X = 2\cos Y,$$

et S_m le polynôme défini par

$$S_m(X) = T_m(X)(X + q_1/q) - 1$$

ou, sous forme entière,

$$S_m(X) = T_m(X)(qX+q_1) - q.$$

Nous allons montrer qu'à la suite des polynômes S_m on peut associer une suite de nombres α_m, zéros de ces polynômes, dont la limite est $-q_1/q$, et que le changement de variable $X = Z + 1/Z$ permet d'en déduire une suite τ_m d'éléments de T_I dont la limite est θ.

a) Limite de la suite α_m.

Limite pour tout p de I^- de la suite $\alpha_{m,p}$ dans $\boldsymbol{Q}_p$. Le polynôme T_m étant un polynôme à coefficients entiers rationnels dont le terme de plus haut degré a comme coefficient 1, les termes de plus haut degré du polynôme S_m sont donc

$$S_m(X) = qX^{m+1} + X^m(q_1 + qa) + \ldots$$

où a est un entier rationnel.

D'après l'égalité $|q_1 + qa|_p = |q_1|_p = 1$, le polynôme S_m a, dans la clôture algébrique de $\boldsymbol{Q}_p$, un zéro et un seul $\alpha_{m,p}$, extérieur au cercle unité. (Comme précédemment, nous supprimerons l'indice p dans $\alpha_{m,p}$.)

Posons $\varphi(X) = qX + q_1$, et égalons les deux expressions de $\varphi(\alpha_m)$,

$$\varphi(\alpha_m) = q\alpha_m + q_1 = \frac{q}{T_m(\alpha_m)}.$$

En remarquant que

$$|T_m(\alpha_m)|_p = |\alpha_m^m|_p = p^{mt_p},$$

on obtient l'égalité
$$\left|a_m + \frac{q_1}{q}\right|_p = p^{-mt_p},$$
qui montre que la limite de la suite a_m est $-q_1/q$ dans $\boldsymbol{Q}_p$.

Limite de la suite $a_{m,0}$ dans $\boldsymbol{R}$. Le polynôme T_m a m zéros distincts, appartenant à l'intervalle $[-2, +2]$, le polynôme S_m a donc m zéros dans l'intervalle $[-2, +2]$ et un zéro dans l'intervalle $[-q_1/q, -q_1/q+\varepsilon_m]$, où la limite de ε_m est nulle.

La limite de la suite a_m est donc $-q_1/q$.

b) La suite τ_m est une suite d'éléments de T_I dont la limite est θ. Soit R_m le polynôme défini par
$$R_m(Z) = S_m\left(Z+\frac{1}{Z}\right),$$
R_m est un polynôme réciproque dont les termes de plus haut degré sont
$$qZ^{2m+2}+(a_1q-q_1)Z^{2m+1}+\ldots;$$
pour tout p de I^-, le polynôme R_m a donc un zéro et un seul, $\tau_{m,p}$ extérieur au cercle unité dans la clôture algébrique de $\boldsymbol{Q}_p$, dans $\boldsymbol{C}$ il a deux zéros réels, l'un $\tau_{m,0}$ supérieur à 1, l'autre $1/\tau_{m,0}$ inférieur; tous les autres zéros appartiennent au cercle unité.

L'élément τ_m défini par $a_m = \tau_m+1/\tau_m$ appartient donc à T_I, et la suite τ_m a pour limite θ.

Comme dans le domaine réel le problème suivant se pose: S_I^0 est-il l'ensemble dérivé de T_I? Mais le problème des ensembles dérivés est plus complexe ici que dans le domaine réel, puisque l'on ne sait pas si l'ensemble S_I^0 est fermé.

CHAPITRE III

ENSEMBLE A_I

Le but de ce chapitre est d'introduire dans l'anneau V_I un ensemble généralisant l'ensemble des nombres a dont nous avons rappelé, dans l'introduction, la définition et les principales propriétés.

La définition des nombres a est liée à l'étude de certaines suites croissantes d'entiers rationnels, aussi le premier paragraphe de ce chapitre sera consacré à l'introduction de suites d'éléments de l'anneau $\boldsymbol{Z}[I]$ dont, pour tout p de I, la suite des valeurs absolues correspondantes est croissante.

1. Ensemble de suites remarquables définies dans l'anneau $\boldsymbol{Z}[I]$

1.1. Définition de l'ensemble $\mathscr{E}_I$. $\mathscr{E}_I$ est l'ensemble des suites dont le terme général u_n appartient à l'anneau $\boldsymbol{Z}[I]$ et est déterminé par la donnée des deux premiers termes u_0 et u_1 et par les relations,
$$(\mathrm{R}_p)\qquad \left|\frac{u_{n+1}^2}{u_n} - u_{n+2}\right|_p \leqslant 1, \quad \text{pour tout } p \text{ de } I^-,$$
et, si 0 n'appartient pas à I,
$$(\mathrm{R}_0)\qquad -1/2 < u_n \leqslant 1/2$$
si 0 appartient à I,
$$(\mathrm{R}_0')\qquad -\frac{1}{2}\leqslant \frac{u_{n+1}^2}{u_n} - u_{n+2} < \frac{1}{2}.$$

La donnée des deux premiers termes u_0 et u_1, et l'ensemble, pour tout p de I, des relations (R_p) déterminent effectivement une suite d'éléments de l'anneau $\boldsymbol{Z}[I]$, en effet les relations d'Artin:
$$\frac{u_{n+1}^2}{u_n}e_I = E\left(\frac{u_{n+1}^2}{u_n}\right)e_I + \varepsilon_I\left(\frac{u_{n+1}^2}{u_n}\right)$$
et
$$u_{n+2}e_I = E(u_{n+2})e_I,$$
$(\varepsilon_I(u_{n+2})e_I$ est nul comme entier rationnel vérifiant $-1<\varepsilon_I(u_{n+2})<1)$ entraînent que le rationnel $E\left(\frac{u_{n+1}^2}{u_n}\right) - u_{n+2}$ de $\boldsymbol{Z}[I]$ est, grâce à l'ensemble des relations (R_p) pour tout p de I^-, un entier. La relation (R_0) (resp. (R_0')) entraîne que cet entier est nul. L'égalité, pour tout entier $n \geqslant 0$,
$$u_{n+2} = E\left(\frac{u_{n+1}^2}{u_n}\right)$$
montre que, u_0 et u_1 étant données, le terme général u_n est déterminé.

Les remarques précédentes mettent en outre en évidence l'équivalence de la relation
$$u_{n+2} = E\left(\frac{u_{n+1}^2}{u_n}\right)$$
avec la relation
$$E\left(\frac{u_{n+1}^2}{u_n} - u_{n+2}\right) = 0,$$
ou avec l'ensemble des relations (R_p), pour tout p de I^+.

1.2. Condition suffisante de croissance des suites de l'ensemble $\mathscr{E}_I$. Ensemble $\mathscr{E}'_I$.

a) *Soit u_n le terme général d'une suite de l'ensemble $\mathscr{E}_I$; pour tout p de I^-, la suite $|u_n|_p$ est croissante si u_0 et u_1 vérifient $|u_1|_p > |u_0|_p > 1$.*

En supposant réalisée, pour tout p de I^-, l'inégalité

$$\left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right|_p > 1,$$

l'inégalité ultramétrique

$$|u_{n+1}|_p \leqslant \max\left(\left|\frac{u_n^2}{u_{n-1}} - u_{n+1}\right|_p, \left|\frac{u_n^2}{u_{n-1}}\right|_p\right)$$

entraîne, grace à la relation (R_p)

$$|u_{n+1}|_p = \left|\frac{u_n^2}{u_{n-1}}\right|_p > |u_n|_p.$$

b) *Dans le cas où 0 appartient à I, la suite u_n est croissante si u_0 est positif et si l'inégalité $u_1 \geqslant u_0 + \sqrt{2u_0}$ est vérifiée.*

On suppose a priori $u_0 > 0$, la suite sera à termes positifs. Pour trouver une condition suffisante de croissance, on cherche deux nombres a et b, $(a > 1$ et $b > 0)$ tels que l'ensemble des relations

$$(\mathrm{H}_n) \qquad u_n \geqslant au_{n-1} + b$$

et (R'_0) entraînent la relation

$$(\mathrm{H}_{n+1}) \qquad u_{n+1} \geqslant au_n + b.$$

Or les relations (H_n) et (R'_0) entraînent les inégalités

$$u_{n+1} \geqslant u_n\left(a + \frac{b}{u_{n-1}}\right) - \frac{1}{2} > au_n + ab - \frac{1}{2}.$$

Pour que cette dernière inégalité entraîne la relation (H_{n+1}) il suffit que

$$ab - 1/2 \geqslant b \quad \text{ou} \quad b(a-1) \geqslant 1/2.$$

On prendra donc $a > 1$ et $b \geqslant 1/2(a-1)$ et le problème est maintenant de trouver la relation entre u_0 et u_1 pour que cette relation soit vérifiée pour l'ordre 1.

En prenant $b = 1/2(a-1)$ la relation (H_1) s'écrit

$$(\mathrm{H}_1) \qquad u_1 > au_0 + \frac{1}{2(a-1)}.$$

On pose $\varphi(a) = au_0 + \dfrac{1}{2(a-1)}$; cette expression est minimum si $\varphi'(a) = u_0 - \dfrac{1}{2(a-1)^2} = 0$, donc si $a - 1 = \sqrt{\dfrac{1}{2u_0}}$.

Dans ces conditions la relation

$$(\mathrm{H}_1) \qquad u_1 \geqslant u_0 + \sqrt{2u_0}$$

représente pour u_1 la minoration la plus faible qui permette, pour tout entier $n \geqslant 0$, la réalisation de la relation (H_n).

c) Définition de l'ensemble $\mathscr{E}'_I$. *$\mathscr{E}'_I$ est le sous-ensemble de $\mathscr{E}_I$ constitué des suites dont les deux premiers termes vérifient, pour tout p de I^-:*

$$|u_1|_p > |u_0|_p > 1,$$

et si 0 appartient à I:

$$u_0 > 0 \quad \text{et} \quad u_1 \geqslant u_0 + \sqrt{2u_0}.$$

2. Ensemble A_I. Relation avec l'ensemble S_I

2.1. Convergence dans l'anneau V_I de la suite de terme général $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}e_I$, associée à une suite u_n de l'ensemble $\mathscr{E}'_I$. On considère une suite de $\mathscr{E}'_I$ de terme général u_n et on lui associe, dans l'anneau V_I, la suite de terme général $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}e_I$. On désigne par γ_n le rationnel $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

a) Etude, pour tout p de I^-, de la convergence dans Q_p de la suite de terme général γ_n. Pour tout p de I^-, on pose $p^{t_p} = \left|\dfrac{u_1}{u_0}\right|_p$ $(t_p > 0)$; pour tout entier $n \geqslant 0$, l'égalité

$$|u_{n+1}|_p = \left|\frac{u_n^2}{u_{n-1}}\right|_p$$

entraîne

$$|u_{n+1}|_p = |u_0|_p p^{(n+1)t_p}.$$

Evaluons $|\gamma_{n+1} - \gamma_n|_p$:

$$|\gamma_{n+1} - \gamma_n|_p = \frac{1}{|u_{n+1}|_p}\left|u_{n+2} - \frac{u_{n+1}^2}{u_n}\right|_p \leqslant \frac{p^{-(n+1)t_p}}{|u_0|_p}.$$

Donc, pour tout p de I^- et pour tout couple d'entiers m et n vérifiant $m \geqslant n \geqslant 0$, l'inégalité

$$|\gamma_m - \gamma_n|_p \leqslant \frac{p^{-(n+1)t_p}}{|u_0|_p}$$

montre que, pour tout p de I^-, la suite de terme général γ_n est une suite de Cauchy dans $\boldsymbol{Q}_p$; elle a donc une limite ω_p dans $\boldsymbol{Q}_p$, et, pour tout entier $n \geqslant 0$, l'inégalité

$$|\omega_p - \gamma_n|_p \leqslant \frac{p^{-(n+1)t_p}}{|u_0|_p}$$

est vérifiée.

b) Etude, dans le cas où 0 appartient à I, de la convergence dans $\boldsymbol{R}$ de la suite de terme général γ_n. La relation (R_0') entraîne pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$|\gamma_{n+1} - \gamma_n| \leqslant \frac{1}{2u_{n+1}}$$

et donc, pour tout couple d'entiers m et n vérifiant $m \geqslant n \geqslant 0$

$$|\gamma_m - \gamma_n| \leqslant \sum_{i=n}^{m} \frac{1}{2u_{i+1}}.$$

D'après les relations (H_n), on a pour tout entier $n \geqslant 0$

$$u_n > a^n u_0 \quad \text{où} \quad a = 1 + \sqrt{\frac{1}{2u_0}}.$$

Donc, pour tout couple d'entiers m et n vérifiant $m \geqslant n \geqslant 0$, l'inégalité

$$|\gamma_m - \gamma_n| < \frac{1}{2a^n(a-1)u_0}$$

montre que la suite de terme général γ_n est une suite de Cauchy dans $\boldsymbol{R}$, elle converge donc et sa limite ω_0 vérifie, pour tout entier $n \geqslant 0$

$$|\omega_0 - \gamma_n| < \frac{1}{2a^n(a-1)u_0}.$$

La suite de terme général $\gamma_n e_I$ converge dans V_I vers un élément ω de composantes ω_p, pour tout p de I.

Remarquons que l'égalité, pour tout p de I^-,

$$|u_n|_p = |u_0|_p p^{nt_p}$$

entraîne, si on pose,

$$q = \prod_{p \in I^-} p^{t_p} \quad \text{et} \quad l = \prod_{p \in I^-} |u_0|_p,$$

que le rationnel u_n mis sous forme irréductible a pour dénominateur lq^n.

On désigne par A_I l'ensemble des éléments limites des suites de terme général $\frac{u_{n+1}}{u_n} e_I$ associées à toutes les suites de l'ensemble $\mathscr{E}_I'$.

2.2. Définition de l'ensemble A_I. *A_I est l'ensemble des éléments de l'anneau V_I qui sont limites d'une suite de terme général $\frac{u_{n+1}}{u_n} e_I$ associée à une suite u_n de rationnels de l'anneau $\boldsymbol{Z}[I]$, déterminée par la donnée de ses deux premiers termes u_0 et u_1 vérifiant,*

$$|u_1|_p > |u_0|_p \geqslant 1, \quad \textit{pour tout } p \textit{ de } I^-,$$

$$-\tfrac{1}{2} < u_1 \leqslant \tfrac{1}{2} \quad \textit{et} \quad -\tfrac{1}{2} < u_0 \leqslant \tfrac{1}{2}, \quad \textit{si } 0 \textit{ n'appartient pas à } I,$$

$$u_1 \geqslant u_0 + \sqrt{2u_0} \quad \textit{avec} \quad u_0 > 0, \quad \textit{si } 0 \textit{ appartient à } I,$$

et par la relation de récurrence,

$$E\left(\frac{u_{n+1}^2}{u_n} - u_{n+2}\right) = 0.$$

2.3. La suite $\frac{u_n}{\omega^n}$ associée à un élément ω de A_I converge dans l'anneau V_I.

a) Pour tout p de I^- la suite $\frac{u_n}{\omega_p^n}$ converge dans $\boldsymbol{Q}_p$. Pour tout p de I^-, l'inégalité

$$\left|\frac{u_m}{\omega_p^m} - \frac{u_n}{\omega_p^n}\right|_p \leqslant p^{-(n+2)t_p},$$

vérifiée pour tout couple d'entiers m et n vérifiant $m \geqslant n \geqslant 0$, montre que la suite $\frac{u_n}{\omega_p^n}$ est une suite de Cauchy, elle converge donc dans $\boldsymbol{Q}_p$ et sa limite λ_p vérifie

$$\left|\lambda_p - \frac{u_n}{\omega_p^n}\right|_p < p^{-(n+2)t_p} \quad \text{pour tout entier } n \geqslant 0.$$

b) Etude de la suite dans $\boldsymbol{R}$. Reprenons l'inégalité

$$|\gamma_m - \gamma_n| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{u_{i+1}};$$

en écrivant l'expression de sa limite quand m tend vers l'infini

$$|\omega_0 - \gamma_n| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{u_{i+1}},$$

et en remarquant que l'on a l'égalité

$$u_{i+1} = u_n \gamma_n \dots \gamma_{i+1},$$

on voit que l'on peut trouver N tel que $n > N$ entraîne $\gamma_n > \omega_0 - \varepsilon$ et donc

$$|\omega_0 - \gamma_n| \leqslant \frac{1}{2u_n} \cdot \frac{1}{(\omega_0 - 1 - \varepsilon)}.$$

Il existe entre deux termes consécutifs de la suite $\dfrac{u_n}{\omega_0^n}$ la relation

$$\left|\frac{u_{n+1}}{\omega_0^{n+1}} - \frac{u_n}{\omega_0^n}\right| < \frac{1}{2\omega_0^{n+1}(\omega_0 - 1 - \varepsilon)},$$

et l'inégalité qui s'en déduit, valable pour tout couple d'entiers $m \geqslant n \geqslant 0$:

$$\left|\frac{u_m}{\omega_0^m} - \frac{u_n}{\omega_0^n}\right| < \frac{1}{2(\omega_0 - 1 - \varepsilon)\,\omega_0^n(\omega_0 - 1)},$$

montre que la suite $\dfrac{u_n}{\omega_0^n}$ est une suite de Cauchy, donc convergente; soit λ_0 sa limite, il existe entre cette limite et le terme général $\dfrac{u_n}{\omega_0^n}$ la relation vérifiée pour tout entier $n \geqslant N$

$$\left|\lambda_0 - \frac{u_n}{\omega_0^n}\right| < \frac{1}{2(\omega_0 - 1 - \varepsilon)\,\omega_0^n(\omega_0 - 1)}.$$

Dans l'anneau V_I, la suite de terme général $\dfrac{u_n}{\omega^n}$ a donc pour limite l'élément λ de V_I de composantes λ_p, pour tout p de I.

2.4. Répartition de $\lambda\omega^n$. Pour tout p de I, les inégalités liant dans Q_p, λ_p et $\dfrac{u_n}{\omega_p^n}$ obtenues au paragraphe précédent, peuvent s'écrire.

Pour tout p de I^- et tout entier $n \geqslant 0$,

$$|\lambda_p \omega_p^n - u_n|_p \leqslant p^{-2t_p},$$

et si 0 appartient à I, pour tout entier $n \geqslant N$,

$$|\lambda_0 \omega_0^n - u_n| \leqslant \frac{1}{2(\omega_0 - 1)(\omega_0 - 1 - \varepsilon)}.$$

Elles mettent en évidence que le rationnel u_n est égal au terme $E(\lambda\omega^n)$ de la décomposition d'Artin de $\lambda\omega^n$, pour tout entier $n \geqslant 0$, si 0 n'appartient pas à I, et pour tout entier $n \geqslant N$, en supposant en outre $\omega_0 > 2$, si 0 appartient à I.

En posant, pour tout p de I, $\varepsilon_{n,p} = \varepsilon_p(\lambda\omega^n)$, les inégalités précédentes s'écrivent dans les mêmes conditions:

$$|\varepsilon_{n,p}|_p \leqslant p^{-2t_p}, \quad \text{pour tout } p \text{ de } I^-,$$

et

$$|\varepsilon_{n,0}| \leqslant \frac{1}{2(\omega_0 - 1)(\omega_0 - 1 - \varepsilon)}, \quad \text{si 0 appartient à } I.$$

2.5. Réciproque. *Soit ω un élément de V_I, vérifiant, pour tout p de I, $|\omega|_p > 1$; une condition suffisante pour que ω appartienne à A_I est qu'il existe un élément λ de V_I vérifiant, pour tout p de I, $|\lambda|_p \geqslant 1$ et tel que l'on ait, pour tout entier n à partir d'un certain rang n_0,*

$$|\varepsilon_I(\lambda\omega^n)|_p \leqslant \frac{1}{|\omega|_p^2}, \quad \textit{pour tout } p \textit{ de } I^-,$$

et

$$\varepsilon_0(\lambda\omega^n) \leqslant \eta\, \frac{1}{2(\omega_0 + 1)^2}, \quad \textit{si 0 appartient à } I.$$

Démonstration. On pose $u_n = E(\lambda\omega^n)$; on a ainsi défini une suite d'éléments de l'anneau $\mathbf{Z}[I]$, on doit montrer que cette suite appartient à l'ensemble $\mathcal{E}'_I$ et que ω est la limite, quand n augmente indéfiniment de la suite de terme général $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} e_I$. L'expression, pour tout p de I, de la valeur absolue,

$$\left|u_{n+2} - \frac{u_{n+1}^2}{u_n}\right|_p = \left|\frac{(\varepsilon_{n,p}\,\omega - \varepsilon_{n+1,p})}{u_n} + \varepsilon_{n,p}\,\omega^2 - 2\omega\varepsilon_{n+1,p} + \varepsilon_{n+1,p}\right|_p$$

permet de déduire des hypothèses et pour tout entier $n \geqslant n_0$, les inégalités

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - u_{n+2}\right|_p \leqslant 1, \quad \text{pour tout } p \text{ de } I^-,$$

et

$$\left|\frac{u_{n+1}^2}{u_n} - u_{n+2}\right| < \frac{1}{2}, \quad \text{si 0 appartient à } I;$$

d'autre part si 0 n'appartient pas à I, le rationnel u_n vérifie, pour tout entier $n \geqslant 0$

$$-\tfrac{1}{2} < u_n \leqslant \tfrac{1}{2}.$$

Pour tout p de I, les inégalités $|\omega|_p > 1$ et $|\lambda|_p \geqslant 1$ entraînent, pour tout p de I^- et tout entier $n \geqslant 0$,

$$|u_n|_p > |u_{n-1}|_p,$$

et si 0 n'appartient pas à I, pour tout entier $n \geqslant n_1$,

$$u_n > u_{n-1} + 2\sqrt{u_{n-1}}.$$

En posant $N = \max(n_0, n_1)$ et $\lambda' = \lambda^N$ on définit ainsi pour $n > N$ une suite de l'ensemble $\mathscr{E}'_I$ (on supposera ultérieurement pour simplifier $N = 0$).

L'égalité, valable pour tout p de I,

$$|u_{n+1} - u_n\omega_p|_p = |-\varepsilon_{n+1,p} + \varepsilon_{n,p}\omega|_p$$

entraîne, pour tout entier $n \geqslant n_0$ la majoration,

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - \omega_p\right|_p \leqslant \frac{p^{-(n-1)t_p}}{|u_0|_p}, \quad \text{pour tout } p \text{ de } I^-,$$

et

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - \omega_0\right| \leqslant \frac{1}{2\,|u_n|\,(\omega_0+1)^2}, \quad \text{si } 0 \text{ appartient à } I.$$

Ces dernières inégalités montrent que la suite de terme général $\frac{u_{n+1}}{u_n}e_I$ associée à la suite u_n de l'ensemble $\mathscr{E}'_I$, converge et a pour limite ω qui appartient donc à l'ensemble A_I.

Remarque. Dans le cas où 0 n'appartient pas à I, les propriétés de la valuation ultramétrique entraînent que l'existence d'un élément λ de V_I, vérifiant, pour tout p de I, $|\lambda|_p \geqslant 1$, et tel que soit réalisé, pour tout p de I, et tout entier $n \geqslant n_0$, l'inégalité

$$|\varepsilon_{n,p}|_p \leqslant \frac{1}{|\omega|_p^2},$$

représente une condition nécessaire et suffisante pour que l'élémens appartienne à l'ensemble A_I. On ne peut pas énoncer un résultat sout forme de condition nécessaire et suffisante, si 0 appartient à I.

2.6. Conséquence: les éléments de l'ensemble S_I appartiennent à l'ensemble A_I. Soit θ un élément de l'ensemble S_I; on cherche dans l'anneau $\mathbf{Q}_I[\theta]$, un élément λ tel que l'on ait, pour tout entier n à partir d'un certain rang

$$|\varepsilon_I(\lambda\theta^n)|_p \leqslant \frac{1}{|\theta|_p^2}, \quad \text{pour tout } p \text{ de } I^-,$$

et

$$|\varepsilon_0(\lambda\theta^n)|_0 \leqslant \frac{1}{2(\theta_0+1)^2} \quad \text{si } 0 \text{ appartient à } I;$$

la démonstration reprenant point par point celle du paragraphe 3.3 du chapitre I, nous ne ferons qu'en indiquer les particularités. Les éléments μ_h sont pris dans l'intersection des ensembles $S_{I_h}^{p'}$ pour tout les p' de I^+,

et le choix de l'entier ν est tel qu'en posant:

$$\varepsilon_{n,p} = \sum_{i=2}^{s} \lambda_p^{(i)}\theta_p^{(i)n}, \quad \text{pour tout } p \text{ de } I^-,$$

$$M_p = \max_{i=2,\ldots,s} |\lambda_p^{(i)}|_p = \max_{i=2,\ldots,s} |\mu_p^{(i)}|_p^{\beta}, \quad \text{pour tout } p \text{ de } I^-,$$

et

$$M_0 = \max_{i=1,\ldots,s} |\lambda_0^{(i)}| = \max_{i=1,\ldots,s} |\mu_0^{(i)}|^{\beta}, \quad \text{si } 0 \text{ n'appartient pas à } I,$$

$$M_0 = \max_{i=2,\ldots,s} |\lambda_0^{(i)}| = \max_{i=2,\ldots,s} |\mu_0^{(i)}|^{\beta}, \quad \text{si } 0 \text{ appartient à } I,$$

on ait, pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$|\varepsilon_{n,p}|_p \leqslant M_p \leqslant p^{-2t_p}, \quad \text{pour tout } p \text{ de } I^-,$$

et

$$sM_0 < \tfrac{1}{2}, \quad \text{si } 0 \text{ n'appartient pas à } I,$$

$$(s-1)M_0 \leqslant \frac{1}{2(\theta_0+1)^2}, \quad \text{si } 0 \text{ appartient à } I.$$

3. Propriétés de l'ensemble A_I

3.1. *L'ensemble A_I est dénombrable.*

En effet, un élément de A_I est associé à une suite de rationnels déterminée par la donnée de ses deux premiers termes u_0 et u_1, qui appartiennent à l'ensemble dénombrable $\mathbf{Z}[I]e_I$.

3.2. *Soit W_I l'ensemble des éléments x de V_I qui vérifient, pour tout p de I, $|x|_p > 1$; l'ensemble A_I est dense dans l'ouvert W_I.*

Nous allons montrer que dans tout ouvert de W_I il y a au moins un élément ω de A_I. Soit a un élément quelconque de W_I, et soit O_I l'ouvert de W_I défini par

$$|x-a|_p < p^{-h_p} \quad \text{pour tout } p \text{ de } I^-$$

(où h_p est un entier rationnel > 0), et

$$|x-a|_0 < \eta \quad \text{si } 0 \text{ appartient à } I$$

(ou η est un réel > 0).

a) Si 0 n'appartient pas à I. L'ensemble $e_I\mathbf{Z}[I]$ est dense dans V_I, il existe donc dans O_I un élément de cet ensemble, nous allons montrer qu'il représente l'élément $\gamma_0 = \frac{u_1}{u_0}$ associé à une suite de l'ensemble $\mathscr{E}'_I$, qui détermine un élément ω de A_I appartenant à O_I. Connaissant le rapport $\frac{u_1}{u_0}$ il suffit, pour déterminer la suite, de connaître l'un des éléments u_1 ou u_0 et pour que ω limite de la suite de terme général $\frac{u_{n+1}}{u_n} e_I$, appartienne à O_I, il suffit, pour tout p de I, étant donné l'inégalité ultramétrique

$$|\omega-a|_p \leqslant \max(|\omega-\gamma_0|_p, |\gamma_0-a|_p)$$

et la relation $|\omega-\gamma_0|_p \leqslant \frac{1}{|u_1|_p}$, de prendre $|u_1|_p > p^{h_p}$.

Or le rapport $\frac{u_1}{u_0}$ étant connu, pour tout p de I, $p^{t_p} = \left|\frac{u_1}{u_0}\right|_p$ est déterminé et donc le nombre $q = \prod_{p \in I} p^{t_p}$ l'est également.

Or les rationnels u_0 et u_1, mis sous forme irréductible, ont respectivement comme dénominateur l et lq où l est un produit de puissances positives ou nulles des nombres premiers p de I; en choisissant le nombre l tel que, pour tout p de I,

$$|lq|_p < p^{-h_p},$$

et, ce choix fait, en prenant alors le numérateur du rationnel u_1 tel que,

$$u_1 < \tfrac{1}{2}, \quad \text{si } \gamma_0 \text{ est inférieur à } 1;$$

$$u_1\gamma_0 < \tfrac{1}{2}, \quad \text{si } \gamma_0 \text{ est supérieur à } 1;$$

l'élément u_1 étant ainsi fixé, u_0 s'en déduit et la suite ainsi définie détermine un élément ω de O_I.

b) Si 0 appartient à I. Le principe de la démonstration est le même que dans le cas où 0 n'appartient pas à I, l'ensemble Q_I est dense dans V_I, il existe dans l'ouvert O_I un élément de Q_I, nous allons montrer qu'on peut le considérer comme élément γ_0 associé à un élément ω de A_I appartenant à l'ouvert O_I. On suppose a priori $\gamma_0 > 0$ et $u_1 > u_0 > 0$.

Le rapport $\frac{u_1}{u_0}$ étant connu le choix de u_1 sera donc lié aux inégalités,

$$|\omega-\gamma_0|_p \leqslant \frac{1}{|u_1|_p} \quad \text{et} \quad |\omega-\gamma_0| \leqslant \frac{1}{u_1-u_0} \quad \text{pour tout } p \text{ de } I^-$$

Or l'inégalité $|u_1|_p > p^{h_p}$ entraîne

$$|\omega-a|_p < p^{-h_p};$$

et d'autre part dans l'inégalité triangulaire,

$$|\omega-a| \leqslant |\omega-\gamma_0| + |\gamma-a|$$

si l'on pose $|\gamma_0-a| = \eta' < \eta$ et si l'on prend $\frac{1}{u_1-u_0} < \eta-\eta'$ on réalise $|\omega-a| \leqslant \eta$.

Pour que ω appartienne à O_I, il suffit que soient réalisées les inégalités,

$$|u_1|_p > p^{h_p} \quad \text{pour tout } p \text{ de } I^-$$

et

$$\frac{1}{u_1-u_0} = \frac{1}{u_1(1-1/\gamma_0)} < \eta-\eta'.$$

Les rationnels u_0 et u_1, mis sous forme irréductible ont comme dénominateur respectivement l et lq, où l est un produit de puissances positives ou nulles des nombres premiers p associés aux éléments I^-, en choisissant l tel que soit vérifiée, pour tout p de I^-,

$$|lq|_p < p^{-h_p}$$

et ce choix fait, en prenant alors le numérateur de u_1 tel que soit vérifiée, l'inégalité

$$u_1 > \frac{\gamma_0}{(\gamma_0-1)(\eta-\eta')}$$

l'élément ω de A_I associé à la suite ainsi définie appartient à O_I.

Cette étude laisse ouvertes de nombreuses questions on a montré par exemple l'inclusion de S_I dans l'ensemble A_I; y a-t-il identité entre ces ensembles? Existe-t-il dans A_I des éléments non algébriques? Un autre problème, lié au précédent, est celui des relations entre l'ensemble A_I et les ensembles introduits par Mme Grandet-Hugot [6], dont on peut penser qu'ils sont inclus dans A_I.

Travaux cités

[1] E. Artin, *Algebraic numbers and algebraic functions*, New York and Princeton University, 1950–1951, multigraphie.

[2] F. Bertrandias, *Ensembles remarquables d'adèles algébriques*, Bull. Soc. Math. France, Memoire 4, 1965. Thèse Sc. Math. Paris, 1965.

[3] D. Cantor, *Power series with integral coefficients*, Bull. Amer. Math. Soc. 69 (1963), p. 362–366.

[4] C. Chabauty, *Sur la répartition modulo 1 de certaines suites p-adiques*, C. R. Acad. Sc. Paris, 231 (1950), p. 465–466.

[5] B. Dwork, *On the zeta function of a hypersurface*, Paris, Presses universitaires de France, 1962. Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Publications Math. 12, p. 5–68.

[6] M. Grandet-Hugot, *Répartition modulo 1 de* $\{\lambda a^n\}$ *dans les adèles*, Ann Scien. ENS. 83 (1966).

[7] C. Pisot, *La répartition modulo 1 et les nombres algébriques*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, série 2, 7 (1938), p. 205–248 (thèse Sc. math. Paris, 1938).

[8] C. Pisot, *Répartition modulo 1 des puissances successives des nombres réels*, Comment. Math. Helv. 19 (1946–1947), p. 153–160.
[9] — et J. Dufresnoy, *Sur un ensemble fermé d'entiers algébriques*, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., série 3, 70 (1953), p. 129–136.
[10] — *Etude de certaines fonctions méromorphes bornées dans le cercle unité. Application à un ensemble fermé d'entiers algébriques*, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., série 3, 72 (1955), p. 69–92.
[11] — *Familles compactes de fractions rationnelles et ensembles fermés de nombres algébriques*, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., série 3, 81 (1964), p. 165–188.
[12] R. Salem, *A remarquable class of algebraic integers. Proof of a conjecture of Vijayaraghavan*, Duke Math. Journ. 11 (1944), p. 103–109.
[13] — *Power series with integral coefficients*, Duke Math. Journ. 12 (1945), p. 153–172.
[14] — *Algebraic Numbers and Fourier Analysis*.
[15] A. Thue, *Über eine Eigenschaft die keine transcendente Grösse haben kann*, Videnskapss. Skrifter. Kristiana I, Math. naturv. Klasse, 1912, n° 25.

INSTITUT HENRI POINCARÉ
Paris

Reçu par la Rédaction le 28. 2. 1969

ACTA ARITHMETICA
XVI (1970)

Über eine Turánsche Ungleichung mit reellen Charakteren

von

W. Haneke (Marburg/Lahn)

1. Es sei eine natürliche Zahl $k \geqslant 3$ und eine Dirichletsche L-Funktion $L(s, \chi_1)$ zu einem reellen Charakter $\chi_1 \bmod k$ gegeben, die eine "Ausnahmenullstelle" β mit

$$0 < \delta = 1-\beta < \frac{c_0}{\log^2 k} \tag{1.1}$$

bei genügend kleinem c_0 besitzt. Dabei bezeichnet c_0 und ebenso im folgenden $c_1, c_2, \ldots$ eine positive absolute Konstante, die sich numerisch explizit angeben läßt. Dies gilt auch von den später auftretenden $\ll$-und O-Konstanten.

P. Turán [4] behandelte mit der in [3] entwickelten Methode die Frage nach dem Zusammenhang zwischen der Lage von β und der Verteilung der Primzahlen $p < X$ mit $\chi_1(p) = 1$ bei gegebenem $X > k^{c_1}$.

Ziel der vorliegenden Note ist es, ein weiteres Ergebnis in dieser Richtung herzuleiten: Wir beweisen die Abschätzung

$$\sum_{p<X} \frac{1+\chi_1(p)}{p} \log^2 p \ll \frac{\log k}{\log(1/\delta)} \log_2 k + \delta(\log^3 X + \log^3 k) \tag{1.2}$$

für

$$X > \exp\left(c_2\left[\frac{\log k}{\log(1/\delta)} \log_2 k\right]^2\right).$$

Unsere Methode besteht darin, eine effektive Form des Linnikschen Satzes über die Lage der Ausnahmenullstelle β (vgl. Hilfssatz 1) zur Auswertung einer geeigneten Siebungleichung (vgl. Hilfssatz 5) heranzuziehen. Dazu benötigen wir zunächst die Abkürzungen

$$\chi_0(n) = 1 \quad \text{für alle ganzen } n \tag{1.3}$$

und

$$\theta = \frac{c_3}{\log k} \log \frac{ec_0}{\delta \log k} \tag{1.4}$$

bei genügend kleinem c_3.