References

[1] M. G. Arsove, *Similar bases and isomorphisms in Fréchet spaces*, Math. Ann. 135 (1958), p. 283–293.
[2] — and R. E. Edwards, *Generalized bases in topological linear spaces*, Studia Math. 19 (1960), p. 95–113.
[3] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear operators*, Part I, New York 1958.
[4] I. A. Ezrohi, *The general form of linear operators in spaces with a countable basis*, Doklady Akad. Nauk SSSR (N. S.) 59 (1948), p. 1537–1540 (Russian) [Abstract, Math. Reviews 9 (1948), p. 448.]
[5] O. T. Jones and J. R. Retherford, *On similar bases in barrelled spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 18 (1967), p. 677–680.
[6] J. L. Kelley, I. Namioka et al., *Linear topological spaces*, Princeton 1963.
[7] Y. Komura, *Some examples on linear topological spaces*, Math. Ann. 153 (1964), p. 150–162.
[8] G. Köthe, *Topologische lineare Räume I*, Die Grund. der Math. Wiss., Band 107, Berlin 1960.
[9] C. W. McArthur and J. R. Retherford, *Uniform and equicontinuous Schauder bases of subspaces*, Canad. J. Math. 17 (1965), p. 207–212.
[10] — *Some remarks on bases in linear topological spaces*, Math. Ann. 164 (1966), p. 38–41.

STETSON UNIVERSITY and LOUISIANA STATE UNIVERSITY

Reçu par la Rédaction le 1. 11. 1968

STUDIA MATHEMATICA, T. XXXIV. (1970)

Les nombres de Pisot et l'analyse harmonique

par

Y. MEYER (Paris)

Le but de ce travail était de démontrer qu'un ensemble de nombres réels, du type Cantor, construit à l'aide d'un rapport de dissection (constant) ξ est un ensemble de synthèse dès que ξ^{-1} est un nombre de Pisot([1]). Le résultat que nous avons en fait prouvé est plus général et moins précis (th. X) mais, chemin faisant, nous avons eu l'occasion de relier les nombres de Pisot et aussi les nombres de Salem à divers points de l'analyse harmonique.

Dans la partie I sont étudiés les *ensembles harmonieux* de nombres réels: nous appelons ainsi toute partie Λ de $\boldsymbol{R}$ telle que les restrictions à Λ des caractères du groupe $\boldsymbol{R}$, muni de la topologie discrète, soient uniformément approchables, sur Λ, par des caractères du groupe $\boldsymbol{R}$ muni de la topologie usuelle. Ces ensembles Λ sont, s'ils ne sont pas trop dispersés, caractérisés par le théorème IV.

Dans la partie II, une catégorie plus vaste d'ensembles Λ de nombres réels est étudiée: on dit que Λ a un *compact associé* s'il existe un nombre réel ε positif, non nul, et un ensemble compact K de la droite réelle tels que, pour tout polynôme trigonométrique à spectre dans Λ, $P(x)$, on ait

$$\sup_{x\in K}|P(x)| \geqslant \varepsilon \sup_{x\in R}|P(x)|.$$

Ces derniers ensembles jouent, pour le problème de la synthèse, un rôle analogue à celui des progressions arithmétiques intervenant dans un théorème de C. Herz ([3], th. VII, p. 124) et c'est, grâce à ce fait, que nous obtenons le théorème X dans le partie III.

I. LES ENSEMBLES HARMONIEUX

1. Propriétés générales des ensembles harmonieux

1.1. Le groupe additif des nombres réels est noté $\boldsymbol{R}$ et le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1 est noté $\boldsymbol{T}$. Sauf avis contraire, les topologies considérées sur $\boldsymbol{R}$ et $\boldsymbol{T}$ sont les topologies usuelles.

([1]) L'auteur vient de prouver ce résultat quand, en outre, $0 < \xi < 1/3$.

Soit Λ une partie de $\boldsymbol{R}$; deux espaces d'applications de Λ dans $\boldsymbol{T}$, $X(\Lambda)$ et $x(\Lambda)$ sont définis comme suit:

Définition. L'ensemble des restrictions à Λ de tous les homomorphismes de $\boldsymbol{R}$ dans $\boldsymbol{T}$ est noté $X(\Lambda)$; les éléments de $X(\Lambda)$ seront appelés des *caractères faibles sur* Λ. L'ensemble des restrictions à Λ de tous les homomorphismes continus de $\boldsymbol{R}$ dans $\boldsymbol{T}$ est noté $x(\Lambda)$; les éléments de $x(\Lambda)$ seront appelés des *caractères forts sur* Λ.

Grâce au th. 2.1.4, p. 36 [9], on peut définir plus simplement $X(\Lambda)$: soit H le sous groupe de $\boldsymbol{R}$ engendré par Λ: $X(\Lambda)$ est l'ensemble des restrictions à Λ de tous les homomorphismes de H dans $\boldsymbol{T}$ ou encore les éléments χ de $X(\Lambda)$ sont les fonctions définies sur Λ, de module 1, telles que, pour tout entier n, toute suite $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ d'éléments de Λ et toute suite $(p_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ d'entiers relatifs, la relation $\sum_1^n p_i\lambda_i = 0$ entraîne $\prod_{1\leqslant i\leqslant n}[\chi(\lambda_i)]^{p_i} = 1$; $x(\Lambda)$ est l'ensemble des applications de Λ dans $\boldsymbol{T}$ de la forme $\lambda \to e^{i\lambda t}$ $(t\in\boldsymbol{R})$.

Deux topologies peuvent être considérées sur $X(\Lambda)$ et sont compatibles avec la structure de groupe de $X(\Lambda)$: celle de la convergence simple sur Λ et celle de la convergence uniforme sur Λ. Pour la première $X(\Lambda)$ est compact et $X(\Lambda)$ est la fermeture de $x(\Lambda)$ (th. 1.8.3, p. 31 [9]).

Définition. Nous dirons que Λ est un *ensemble harmonieux* si, pour la topologie de la convergence uniforme sur Λ, $X(\Lambda)$ est la fermeture de $x(\Lambda)$.

1.2. Voici deux conditions équivalentes à "Λ est harmonieux".

THÉORÈME I. *Soit Λ un ensemble de nombres réels et ε un nombre réel dans l'intervalle* $]0, 2[$. *Les trois conditions ci-dessous sont équivalentes*:

(a) *A tout caractère faible χ sur Λ on peut associer un nombre réel t tel que, pour tout λ de Λ, on ait* $|\exp(i\lambda t)-\chi(\lambda)|\leqslant\varepsilon$.

(b) *On peut trouver un nombre réel T tel qu'à tout caractère faible χ sur Λ on puisse associer un nombre réel t ayant les propriétés*

(i) $|t|\leqslant T$,

(ii) $|\exp(i\lambda t)-\chi(\lambda)|\leqslant\varepsilon$ $(\lambda\in\Lambda)$.

(c) *On peut trouver un nombre réel T tel que tout intervalle de longueur $2T$ contienne un nombre réel t vérifiant toutes les inégalités* $|\exp(i\lambda t)-1|\leqslant\varepsilon$ $(\lambda\in\Lambda)$.

La démonstration de ce résultat s'écrit mieux en utilisant, au lieu de $X(\Lambda)$, le compactifié de Bohr $\tilde{\boldsymbol{R}}$ de $\boldsymbol{R}$: $\tilde{\boldsymbol{R}}$ est le groupe dual de $\boldsymbol{R}$ muni de la topologie discrète et les éléments χ de $\tilde{\boldsymbol{R}}$ sont donc les homomorphismes de $\boldsymbol{R}$ dans $\boldsymbol{T}$. Un tel élément χ de $\tilde{\boldsymbol{R}}$ sera appelé un *caractère faible*. S'il est, en fait, de la forme $x\to\exp(iax)$, $a\in\boldsymbol{R}$, on dira que χ est un *caractère fort*; tout caractère fort est faible et cette remarque permet de définir une injection de $\boldsymbol{R}$ dans $\tilde{\boldsymbol{R}}$. Par abus de notations, nous considérerons $\boldsymbol{R}$ comme une partie de $\tilde{\boldsymbol{R}}$ et nous utiliserons la notation additive pour la loi de groupe de $\tilde{\boldsymbol{R}}$; alors $\tilde{\boldsymbol{R}}$ est dense dans $\tilde{\boldsymbol{R}}$. Enfin $\boldsymbol{R}$ est compact.

Montrons que (a) entraîne (b). Soit $V(\varepsilon)$ l'ensemble de tous les éléments χ de $\tilde{\boldsymbol{R}}$ tels que, pour tout λ de Λ, on ait $|\chi(\lambda)-1|\leqslant\varepsilon$; $V(\varepsilon)$ est fermé dans $\tilde{\boldsymbol{R}}$ et donc $V(\varepsilon)$, muni de la topologie induite, est compact. A tout entier positif n associons la partie $K_n = [-n, n]+V(\varepsilon)$ de $\tilde{\boldsymbol{R}}$; K_n est compact. La condition (a) signifie que la réunion des K_n est tout $\tilde{\boldsymbol{R}}$. Grâce au théorème de Baire, l'intérieur $\mathring{K}_n$ de K_n n'est pas vide dès que n est assez grand. Considérons alors, pour cette valeur de n, les ensembles $\mathring{K}_n+t$ où $t\in\boldsymbol{R}$; parce que $\boldsymbol{R}$ est dense dans $\tilde{\boldsymbol{R}}$, leur réunion $\bigcup_{t\in\boldsymbol{R}}(\mathring{K}_n+t)$ est tout $\tilde{\boldsymbol{R}}$ et il existe un ensemble fini F de nombres réels tel que $\mathring{K}_n+F = \tilde{\boldsymbol{R}}$. A fortiori on a $[-n, n]+F+V(\varepsilon) = \tilde{\boldsymbol{R}}$ et (b) est prouvé avec $T = n+\sup(F)$.

Montrons maintenant que (b) entraîne (c). Soit t le centre de l'intervalle donné de longueur $2T$ et χ le caractère $x\to e^{itx}$. On peut, grâce à (b), trouver un nombre réel s tel que $|s|\leqslant T$ et que, pour tout λ de Λ, $|\exp(i\lambda s)-\exp(i\lambda t)|\leqslant\varepsilon$. On pose alors $u = t-s$ et l'on a, pour tout λ dans Λ, $|\exp(i\lambda u)-1|\leqslant\varepsilon$.

Puisque (b) entraîne (a), vérifions que (c) entraîne (b). Par le raisonnement que nous venons de faire, on voit qu'à tout nombre réel t, on peut, grâce à (c), associer un nombre réel s tel que $t-s$ appartienne à $V(\varepsilon)$ et que $|s|\leqslant T$. L'ensemble compact $[-T, T]+V(\varepsilon)$ contient $\boldsymbol{R}$; c'est donc $\tilde{\boldsymbol{R}}$.

La condition (c) peut être présentée comme une condition de répartition modulo 1. Soit x un nombre réel et $\|x\|$ la distance de x à $\boldsymbol{Z}$ (ou à l'entier le plus proche de x). A tout ε de $]0, 2[$ correspond un nombre réel a dans $]0, 1/2[$ tel que $|\exp(2\pi ix)-1|\leqslant\varepsilon$ et $\|x\|\leqslant a$ soient équivalents.

Nous dirons, suivant Bésicovitch [1], qu'un ensemble E de nombres réels est *relativement dense* s'il existe un nombre réel positif A tel que tout intervalle de longueur A contienne au moins un point de E.

COROLLAIRE. *Soit Λ un ensemble de nombres réels et, pour tout $\varepsilon>0$, $E(\varepsilon)$ l'ensemble des nombres réels t tels que, pour tout λ de Λ, on ait $\|t\lambda\|\leqslant\varepsilon$. Alors Λ est harmonieux si et seulement si $E(\varepsilon)$ est, pour tout ε positif, relativement dense.*

1.3. Voici une importante propriété métrique des ensembles harmonieux.

THÉORÈME II. *A tout ensemble harmonieux Λ on peut associer un nombre positif non nul d tel que la distance entre deux points distincts de Λ dépasse toujours d.*

Avant de montrer le théorème, remarquons que si Λ est harmonieux les ensembles $\Lambda+\Lambda$ ou $\Lambda-\Lambda$ le sont aussi comme on le vérifie aussitôt. Ainsi pour prouver notre résultat, il suffit de montrer que si Λ est harmonieux, 0 ne peut être un point d'accumulation de Λ. Supposons qu'il en soit ainsi. Soit $\varepsilon = 1/4$, par exemple, et T un nombre réel tel que la distance entre deux éléments consécutifs de l'ensemble $E(1/4)$ défini au corollaire du théorème I ne dépasse jamais $2T$. Si $\lambda \in \Lambda$ et $0 < |\lambda| < (8T)^{-1}$, la distance entre deux éléments consécutifs de $\lambda E(1/4)$ ne dépasse jamais $1/4$. Mais, par définition de $E(1/4)$, les points de $\lambda E(1/4)$ devraient être situés dans des intervalles de longueur $1/2$ et de centres entiers. C'est contradictoire.

1.4. La réunion de deux ensembles harmonieux n'est pas toujours un ensemble harmonieux. Par exemple un sous groupe discret de $\boldsymbol{R}$ est harmonieux mais la réunion de $\boldsymbol{Z}$ et de $\boldsymbol{Z}\sqrt{2}$ ne l'est pas comme le montre le théorème II. Un ensemble fini est toujours harmonieux.

THÉORÈME III. *Soit Λ un ensemble harmonieux et F un ensemble fini de nombres réels. La réunion $\Lambda \cup F$ (et donc la somme $\Lambda+F$) est un ensemble harmonieux.*

Avant de prouver ce résultat, donnons en une application. Soit Λ un ensemble harmonieux et a un nombre réel. L'ensemble $\Lambda \cup \{a\}$ et donc l'ensemble $\Lambda+a$ sont harmonieux et ceci montre que si Λ est un ensemble harmonieux et si a et b sont deux nombres réels, l'ensemble $a+b\Lambda$ est harmonieux (que $b\Lambda$ soit harmonieux en même temps que Λ est évident).

Passons à la démonstration. Soit, pour tout $\varepsilon > 0$, $V(\varepsilon)$ l'ensemble des éléments χ de $\tilde{\boldsymbol{R}}$ tels que, pour tout λ dans Λ, on ait $|\chi(\lambda)-1| \leqslant \varepsilon$. Soit $W(\varepsilon)$ la fermeture dans $\tilde{\boldsymbol{R}}$ de $V(\varepsilon) \cap \boldsymbol{R}$. On a $V(\varepsilon) \cap \boldsymbol{R} = W(\varepsilon) \cap \boldsymbol{R}$ et $W(\varepsilon) \cap \boldsymbol{R}$ est dense dans $W(\varepsilon)$. Nous allons en conservant ces notations, montrer le résultat suivant:

LEMME. *Si Λ est un ensemble harmonieux et Ω un ouvert de $\tilde{\boldsymbol{R}}$ contenant 0, pour tout $\varepsilon > 0$, $\Omega \cap V(\varepsilon) \cap \boldsymbol{R}$ est un ensemble relativement dense de nombres réels.*

Le théorème III en découle: il suffit d'appeler Ω l'ensemble des éléments χ de $\tilde{\boldsymbol{R}}$ tels que, pour tout t de F, on ait $|\chi(t)-1| \leqslant \varepsilon$. Reste à prouver le lemme. Quelques remarques ensemblistes sur $W(\varepsilon)$ sont nécessaires: on a $W(\varepsilon) = -W(\varepsilon)$ et $W(\varepsilon)+W(\varepsilon) \subset W(2\varepsilon)$. On en déduit aussitôt, pour toute partie Ω de $\tilde{\boldsymbol{R}}$ et tout x de $W(\varepsilon)$, l'inclusion $(x+\Omega) \cap W(\varepsilon) \subset x+\Omega \cap W(2\varepsilon)$. D'autre part, la réunion

$$\bigcup_{x \in \boldsymbol{R} \cap W(\varepsilon)} (x+\Omega) = \Omega + \boldsymbol{R} \cap W(\varepsilon)$$

contient $W(\varepsilon)$ car $\boldsymbol{R} \cap W(\varepsilon)$ est dense dans $W(\varepsilon)$. Mais $W(\varepsilon)$ est compact; il existe donc un ensemble fini G de nombres réels appartenant à $W(\varepsilon)$ tel que $W(\varepsilon)$ soit contenu dans $G+\Omega$. Alors $W(\varepsilon) = (G+\Omega) \cap W(\varepsilon)$ est contenu dans $G+\Omega \cap W(2\varepsilon)$. Appelons L un compact de $\boldsymbol{R}$ tel que $L+W(\varepsilon) = \tilde{\boldsymbol{R}}$. On a $L+G+\Omega \cap W(2\varepsilon) = \tilde{\boldsymbol{R}}$; $K = L+G$ est un compact de $\boldsymbol{R}$ et le lemme est prouvé (avec 2ε au lieu de ε).

2. Ensembles harmonieux et relativement denses

2.1. Rappelons qu'une partie Λ de $\boldsymbol{R}$ est dite *relativement dense* s'il existe un nombre réel T tel que tout intervalle de longueur T contienne au moins un point de Λ.

Les ensembles harmonieux et relativement denses sont caractérisés de la façon suivante:

THÉORÈME IV (Caractérisation des ensembles harmonieux et relativement denses de $\boldsymbol{R}$). (a) *Soit E une partie de $\boldsymbol{R}$ qui est un espace vectoriel sur $\boldsymbol{Q}$ de dimension finie n; soit I l'application identique de E dans $\boldsymbol{R}$ et $L_1, \ldots, L_{n-1}$ $n-1$ applications $\boldsymbol{Q}$-linéaires de E dans $\boldsymbol{R}$ telle que $I, L_1, \ldots, L_{n-1}$ soient n applications $\boldsymbol{Q}$-linéaires indépendantes sur $\boldsymbol{R}$. Soit M un $\boldsymbol{Z}$-module libre de rang n contenu dans E et Λ la partie de M formée des λ dans M tels que $|L_1(\lambda)| \leqslant 1, \ldots, |L_{n-1}(\lambda)| \leqslant 1$. Alors Λ est harmonieux et relativement dense.*

(b) *Soit Λ' un ensemble harmonieux et relativement dense de $\boldsymbol{R}$; alors Λ' est contenu dans une partie Λ de $\boldsymbol{R}$ décrite par* (a).

2.2. Nous prouverons d'abord le (a). Soit $(s_1, \ldots, s_n)$ une base du $\boldsymbol{Z}$-module M; tout caractère faible sur M est défini à l'aide d'une suite θ_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, de nombres réels dans $[0, 1[$ par

$$\chi(\lambda) = \exp\Big(2\pi i \sum_1^n a_k \theta_k\Big) \quad \text{si } \lambda = \sum_1^n a_k s_k,\ a_k \in \boldsymbol{Z}.$$

A tout $\varepsilon > 0$ on va associer n nombres réels $t_1, \ldots, t_{n-1}$ et x tels que $|t_j| \leqslant \varepsilon$ $(1 \leqslant j \leqslant n-1)$ et que, pour tout λ dans M, on ait

$$\chi(\lambda) = \exp(2\pi i \lambda x) \exp\Big(2\pi i \sum_1^{n-1} t_j L_j(\lambda)\Big). \tag{2.2.1.}$$

Cela entraînera, si λ est dans Λ, $|\chi(\lambda) - \exp(2\pi i \lambda x)| \leqslant 2\pi(n-1)\varepsilon$ et le (a) du théorème sera prouvé.

Posons $L_j(s_k) = b(k, j)$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$. On désire avoir

$$\theta_k \equiv s_k x + \sum_1^{n-1} b(k, j) t_j \pmod 1$$

avec

$$|t_j| \leqslant \varepsilon \quad (1 \leqslant j \leqslant n-1).$$

Soit C l'ensemble de tous les points de $\boldsymbol{R}^n$ de la forme

$$\Big(s_k x + \sum_1^{n-1} b(k,j)t_j\Big)_{1\leqslant k\leqslant n}$$

qui sont les images de tous les points de $\boldsymbol{R}^n$ de la forme $(x, t_1, \ldots, t_{n-1})$ tels que $|t_j| \leqslant \varepsilon$ $(1 \leqslant j \leqslant n-1)$. Grâce à l'indépendance sur $\boldsymbol{R}$ de I, $L_1, \ldots, L_{n-1}$, C contient un cylindre ouvert dont l'axe est la droite D, ensemble des points de $\boldsymbol{R}^n$ de la forme $(s_k x)_{1\leqslant k\leqslant n}$, $x \in \boldsymbol{R}$.

Grâce, cette fois, à l'indépendance sur $\boldsymbol{Z}$ des s_k, l'image de D dans $\boldsymbol{R}^n/\boldsymbol{Z}^n$ est dense et l'image de C est tout $\boldsymbol{R}^n/\boldsymbol{Z}^n$ ce qui prouve 2.2.1.

2.3. La preuve du (b) nécessite plusieurs étapes: on construit d'abord le $\boldsymbol{Z}$-module M puis les formes linéaires $L_1, \ldots, L_{n-1}$. On montre qu'elles sont majorées en module par ε sur Λ' puis enfin que $I, L_1, \ldots, L_{n-1}$ sont $\boldsymbol{R}$-indépendantes.

(i) *Construction de M.*

LEMME 1. *Soit M le $\boldsymbol{Z}$-module engendré par Λ'. Alors M est un $\boldsymbol{Z}$-module libre de rang fini.*

Le théorème II montre que l'on peut ordonner Λ' en une suite croissante $(\lambda_k)_{-\infty<k<+\infty}$. L'ensemble $\Lambda'-\Lambda'$ est harmonieux; donc l'ensemble F des différences $\lambda_{k+1}-\lambda_k$ $(-\infty < k < +\infty)$ qui est borné, parce que Λ' est relativement dense, vérifie la conclusion du théorème II. Ainsi F est fini.

Soit M le $\boldsymbol{Z}$-module engendré par λ_1 et F; M est aussi le $\boldsymbol{Z}$-module engendré par Λ'. Le théorème de structure des $\boldsymbol{Z}$-modules montre alors que M est libre et de type fini. Soit n le rang de M.

(ii) *Construction de $L_1, \ldots, L_{n-1}$.* Le lemme suivant y joue un grand rôle:

LEMME 2. *Soit $(\lambda_k)_{-\infty<k<+\infty}$ une suite de nombres réels telle que l'ensemble F des différences $\lambda_{k+1}-\lambda_k$ soit fini. Il existe un nombre réel positif η tel que, si $0 < \varepsilon < \eta$, tout caractère faible χ sur $\boldsymbol{R}$ vérifiant toutes les inégalités $|\chi(\lambda_k)-1| \leqslant \varepsilon$ $(-\infty < k < +\infty)$ s'écrive $\chi = \exp(2\pi i L)$, où L est une application $\boldsymbol{Q}$-linéaire de $\boldsymbol{R}$ dans lui-même telle pour tout k, $|L(\lambda_k)| \leqslant \varepsilon$.*

Une remarque précède la démonstration: soit x un nombre réel et $\|x\|$ la distance de x à $\boldsymbol{Z}$. Pour tout nombre réel positif ε, $|\exp(2\pi i x)-1| \leqslant 2\varepsilon$ entraîne $\|x\| \leqslant \varepsilon$.

Soit Λ' l'ensemble des λ_k $(-\infty < k < +\infty)$ et M le $\boldsymbol{Z}$-module libre de rang fini engendré par Λ'. Soit $s_1, \ldots, s_n$ une base de M. Chaque s_j peut être écrit comme une combinaison linéaire à coefficients entiers des λ_k; des inégalités $|\chi(\lambda_k)-1| \leqslant \varepsilon$, on déduit donc les n inégalités $|\chi(s_j)-1| \leqslant A\varepsilon$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ où A ne dépend que de Λ' (et pas de ε). Supposons que $A\varepsilon < 1/2$ et soit alors L l'application $\boldsymbol{Z}$-linéaire de M dans $\boldsymbol{R}$ définie par les $2n$ conditions $\chi(s_j) = \exp\big(2\pi i L(s_j)\big)$ et $|L(s_j)| \leqslant A\varepsilon$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$. Chaque élément de $\lambda_1 \cup F$ est une combinaison linéaire à coefficients entiers des s_j, $1 \leqslant j \leqslant n$. On en déduit, pour tout λ dans $\lambda_1 \cup F$, l'inégalité $|L(\lambda)| \leqslant B\varepsilon$ où B ne dépend que de Λ'; mais l'on a aussi, pour tout λ dans $\lambda_1 \cup F$, $\chi(\lambda) = \exp\big(2\pi i L(\lambda)\big)$ et l'on a, pour ces valeurs de λ, $|\chi(\lambda)-1| \leqslant 2\varepsilon$ ou encore $\|L(\lambda)\| \leqslant \varepsilon$. Si $B\varepsilon < 1/2$, l'inégalité $|L(\lambda)| \leqslant B\varepsilon$, jointe à $\|L(\lambda)\| \leqslant \varepsilon$, entraîne $|L(\lambda)| \leqslant \varepsilon$.

Montrons enfin que $|L(\lambda_k)| \leqslant \varepsilon$ pour tout k. On procède par récurrence sur k. On a, par le résultat précédent, $|L(\lambda_{k+1})-L(\lambda_k)| \leqslant \varepsilon$ et, si $|L(\lambda_k)| \leqslant \varepsilon$, on en déduit que $|L(\lambda_{k+1})| \leqslant 2\varepsilon$. Mais l'on a aussi $\|L(\lambda_{k+1})\| \leqslant \varepsilon$ (car $\chi(\lambda_{k+1}) = \exp\big(2\pi i L(\lambda_{k+1})\big)$ et $|\chi(\lambda_{k+1})-1| \leqslant \varepsilon$) et, si $\varepsilon < 1/4$-ce que nous supposerons-, on obtient $|L(\lambda_{k+1})| \leqslant \varepsilon$.

Achevons la construction de $L_1, \ldots, L_{n-1}$. Soit θ un nombre réel, non nul, transcendant sur l'extension $\boldsymbol{Q}[s_1, \ldots, s_n]$ et soient $L'_1, \ldots, L'_{n-1}$ les applications $\boldsymbol{Z}$-linéaires de M dans $\boldsymbol{R}$ définies par les conditions $L'_j(s_k) = \theta\delta(j,k)$ où $1 \leqslant k \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$ et où $\delta(j,k)$ est le symbole de Kronecker. Soit I l'application identique de M dans $\boldsymbol{R}$.

Puisque Λ' est harmonieux, pour tout nombre positif ε, non nul, et tout j, $1 \leqslant j \leqslant n-1$ on peut trouver un caractère faible χ_j et un nombre réel x_j ayant les deux propriétés suivantes:

(i) pour tout λ de Λ', on a $|\chi_j(\lambda)-1| \leqslant \varepsilon$;

(ii) pour tout λ de M, on a $\exp\big(2\pi i L'_j(\lambda)\big) = \exp(2\pi i \lambda x_j)\chi_j(\lambda)$.

Grâce au lemme 2, on peut, dès que ε est assez petit, associer à chaque χ_j $(1 \leqslant j \leqslant n-1)$ une application $\boldsymbol{Z}$-linéaire, L_j, de M dans $\boldsymbol{R}$ telle que

$$\chi_j(\lambda) = \exp\big(2\pi i L_j(\lambda)\big) \text{ et } |L_j(\lambda)| \leqslant \varepsilon \quad \text{si } 1 \leqslant j \leqslant n-1 \text{ et } \lambda \in \Lambda'.$$

Il suffit, pour terminer la démonstration du théorème IV, de démontrer que $I, L_1, \ldots, L_{n-1}$ sont $\boldsymbol{R}$-indépendantes. Soit Z_j l'application $\boldsymbol{Z}$-linéaire de M dans $\boldsymbol{R}$ définie par $Z_j = L'_j - x_j I - L_j$; Z_j ne prend, sur M, que des valeurs entières. Une relation de dépendance linéaire entre $I, L_1, \ldots, L_{n-1}$ s'écrirait

$$\sum_1^{n-1} a_j(L'_j - Z_j) + bI = 0.$$

Le déterminant des n formes $L'_1-Z_1, \ldots, L'_{n-1}-Z_{n-1}, I$ serait nul et ceci entraîne que θ soit algèbrique sur l'extension $\boldsymbol{Q}[s_1, \ldots, s_{n-1}]$.

2.4. *Les pseudogroupes.*

Définition. On appelle *pseudogroupe* toute partie Γ de $\boldsymbol{R}$ définie par la donnée d'un entier n, de $2n-1$ nombres réels, non nuls, $a_1, \ldots, a_n$, $b_2, \ldots, b_n$ comme suit: Γ est l'ensemble de tous les nombres réels s'écrivant $a_1 k + b_2\{a_2 k\} + \ldots + b_n\{a_n k\}$ lorsque k décrit $\boldsymbol{Z}$ (la différence entre le nombre réel x et l'entier le plus proche est notée $\{x\}$).

THÉORÈME V. *Tout pseudogroupe est un ensemble relativement dense et harmonieux; à tout ensemble Λ relativement dense et harmonieux de nombres réels on peut associer un pseudogroupe Γ et un ensemble fini F tels que Λ soit contenu dans $\Gamma+F$.*

Comme $\Gamma+F$ est harmonieux en même temps que Γ, le théorème 2.4 caractèrise les ensembles relativement denses et harmonieux à l'aide des pseudogroupes.

2.5. La démonstration du théorème 2.4 nécessite quelques définitions. Soit $\mathscr{E}$ un espace vectoriel sur $\boldsymbol{R}$ de dimension finie n supérieure à 1. Appelons *prisme* de $\mathscr{E}$ toute partie E de $\mathscr{E}$ définie par $n-1$ formes linéaires indépendantes sur $\mathscr{E}$, $f_1, \ldots, f_{n-1}$ comme suit: E est l'ensemble des éléments x de $\mathscr{E}$ vérifiant $|f_1(x)| \leqslant 1, \ldots, |f_{n-1}(x)| \leqslant 1$. Soit $\mathscr{F}$ un second espace vectoriel sur $\boldsymbol{R}$ de dimension finie supérieure à 1 et $\mathscr{L}$ une application linéaire de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$. L'image par $\mathscr{L}$ d'un prisme de $\mathscr{E}$ est toujours contenue dans un prisme de $\mathscr{F}$.

Passons à la démonstration. Soient Γ un pseudogroupe et k_j, $2 \leqslant j \leqslant n$, des entiers relatifs tels que $\{a_j k\} = a_j k - k_j$ et $|a_j k - k_j| \leqslant 1/2$. Alors Γ est l'ensemble des nombres réels de la forme $(a_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)k - b_2k_2-\ldots-b_nk_n$ tels que $|a_jk-k_j| \leqslant 1/2$ si $2 \leqslant j \leqslant n$. Appelons M le $\boldsymbol{Z}$-module engendré par $a_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n, b_2, \ldots, b_n$; M est libre et de rang m où $1 \leqslant m \leqslant n$. Une base $(s_1, \ldots, s_m)$ de M permet de définir une application L, $\boldsymbol{Z}$-linéaire de $\boldsymbol{Z}^n$ dans $\boldsymbol{Z}^m$, par

$$L(k, k_2, \ldots, k_n) = (p_1, \ldots, p_m)$$

si $(a_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)k - b_2k_2-\ldots-b_nk_n = p_1s_1+\ldots+p_ms_m$.

Soit $\mathscr{L}$ l'application $\boldsymbol{R}$-linéaire de $\boldsymbol{R}^n$ dans $\boldsymbol{R}^m$ qui coincide sur $\boldsymbol{Z}^n$ avec L. Les conditions $|a_jx-x_j| \leqslant 1/2$ $(2 \leqslant j \leqslant n)$ déterminent un prisme de $\boldsymbol{R}^n$ dont l'image par $\mathscr{L}$ est contenue dans un prisme de $\boldsymbol{R}^m$; ceci montre que si les entiers $k, k_2, \ldots, k_n$ vérifient les conditions $|a_jk-k_j| \leqslant 1/2$ $(2 \leqslant j \leqslant n)$, les entiers $p_1, \ldots, p_m$ qui leur sont associés vérifient des conditions $|l_j(p_1, \ldots, p_m)| \leqslant 1$, $1 \leqslant j \leqslant m-1$, où les l_j sont $m-1$ applications $\boldsymbol{R}$-indépendantes de $\boldsymbol{Z}^m$ dans $\boldsymbol{R}$. Soient L_j les $m-1$ applications $\boldsymbol{Z}$-linéaires de M dans $\boldsymbol{R}$ définies par

$$L_j(p_1s_1+\ldots+p_ms_m) = l_j(p_1, \ldots, p_m) \qquad (1 \leqslant j \leqslant m-1).$$

Alors Γ est contenu dans l'ensemble des éléments λ de M pour lesquels $|L_j(\lambda)| \leqslant 1$ $(1 \leqslant j \leqslant m-1)$. Si l'application identique de M dans $\boldsymbol{R}$ dépendait linéairement des L_j, $1 \leqslant j \leqslant m-1$, l'ensemble Γ serait borné ce qui est manifestement faux. Le théorème IV s'applique donc et montre que tout pseudogroupe est harmonieux.

Réciproquement, soit Λ un ensemble harmonieux et relativement dense. On peut, grâce au théorème IV, trouver un entier n, $n-1$ formes linéaires définies sur $\boldsymbol{R}^n$ et indépendantes, les l_j, $1 \leqslant j \leqslant n-1$ et n nombres réels $s_1, \ldots, s_n$ linéairement indépendants sur $\boldsymbol{Z}$ tels que Λ soit contenu dans l'ensemble des nombres réels s'écrivant $p_1s_1+\ldots+p_ns_n$ avec la condition que les p_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ soient des entiers relatifs vérifiant les $n-1$ inégalités $|l_j(p_1, \ldots, p_n)| \leqslant 1$. Quitte à changer l'ordre des indices, il existe une constante A et $n-1$ nombres réels $b_2, \ldots, b_n$ tels que, sur $\boldsymbol{R}^n$, les relations $|l_j(x_1, \ldots, x_n)| \leqslant 1$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$, entraînent les relations $|b_{j+1}x_1 - x_{j+1}| \leqslant A$. Il y a donc un ensemble fini F_{j+1} d'entiers tel que les inégalités, sur $\boldsymbol{Z}^n$, $|l_j(p_1, \ldots, p_n)| \leqslant 1$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$ entraînent

$$p_{j+1} \in b_{j+1}p_1 - \{b_{j+1}p_1\} + F_{j+1};$$

appelons F l'ensemble $s_2F_2+\ldots+s_nF_n$, posons $a_1 = s_1+b_2s_2+\ldots+b_ns_n$, $a_2 = -s_2, \ldots, a_n = -s_n$ et la seconde partie du théorème 2.4 est prouvée.

3. Ensembles remarquables d'entiers algébriques

3.1. Soit K un corps réel de nombres algébriques, c'est-à-dire une extension algébrique de degré n de $\boldsymbol{Q}$ qui soit contenue dans $\boldsymbol{R}$. Soient $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ les n $\boldsymbol{Q}$-isomorphismes distincts de K dans $\boldsymbol{C}$ où σ_1 est l'application identique de K dans $\boldsymbol{C}$.

Un élément x de K est un *nombre de Pisot de degré n* si x est un entier algébrique de K tel que $|\sigma_2(x)| < 1, \ldots, |\sigma_n(x)| < 1$ (alors tous les conjugués de x autres que x lui-même ont un module strictement inférieur à 1).

Un élément x de K est un *nombre de Salem de degré n* si x est un entier algébrique de K, distinct de 1 et de -1, tel que $|\sigma_2(x)| \leqslant 1, \ldots, |\sigma_n(x)| \leqslant 1$, un de ces modules étant égal à 1.

Les nombres de Pisot et de Salem sont réels; nous n'excluons pas le cas où ils seraient négatifs.

THÉORÈME VI (Caractérisation des ensembles harmonieux et stables par multiplication). (a) *Soit K, $\boldsymbol{Q} \subset K \subset \boldsymbol{R}$, un corps réel de nombres algébriques, soit n le degré de K et Λ l'ensemble de tous les nombres de Pisot et de Salem, de degré n, appartenant à K. Alors Λ est un ensemble de nombres réels harmonieux et stable par multiplication.*

(b) *Soit Λ' un ensemble de nombres réels harmonieux et stable par multiplication. Alors il existe un ensemble harmonieux Λ du type décrit en* (a) *tel que Λ' soit une partie stable par multiplication de $\Lambda \cup \{-1, 1\}$.*

3.2. La partie (a) du théorème 3.1 résulte du théorème IV. En effet, parmi les n isomorphismes σ_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, r_1 sont réels et $2r_2$ sont complexes mais deux à deux conjugués. Quitte à changer l'ordre des σ_j, on les supposera réels si $1 \leqslant j \leqslant r_1$ avec $\sigma_1 = Id$ et complexes si $j > r_1$; les σ_j pour lesquels $2 \leqslant j \leqslant r_1$, les parties réelles des σ_1 où $j > r_1$ et les parties imaginaires de ces mêmes σ_j sont $n-1$ applications $\boldsymbol{Q}$-linéaires et $\boldsymbol{R}$-indépendantes de K dans $\boldsymbol{R}$, que nous noterons L_k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$. L'ensemble

M des entiers algébrique de K est un $\boldsymbol{Z}$-module libre de rang n. Ainsi Λ est contenu dans la partie de M formée des λ tels que $|L_k(\lambda)| \leqslant 1$ $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$. Le théorème IV montre que Λ est harmonieux. Que Λ soit stable par multiplication et évident.

La réciproque nécessite le résultat suivant:

3.3. Proposition. *Soit θ un nombre réel et Λ l'ensemble des puissances θ^n, $n \geqslant 0$, de θ. Alors Λ est harmonieux si et seulement si θ est un entier algébrique dont tous les conjugués (sauf θ) ont un module inférieur ou égal à 1.*

Dans la démonstration de la proposition 3.3 deux cas doivent être distingués: θ algébrique et θ transcendant. Si θ est transcendant, les restrictions à Λ des caractères faibles sont toutes les suites $(C_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de nombres complexes de module 1. Chacune de ces suites est-elle, uniformément sur Λ, approchable par des caractères forts? Méla ([4], th. 5.2) a montré qu'il n'en est rien et nous allons donner de ce fait une nouvelle démonstration.

3.4. Lemme. *Soit θ un nombre réel; il existe une suite $(C_n)_{n \geqslant 0}$ prenant les valeurs ± 1 et un nombre réel positif, ε, tel que, pour tout x réel,*

$$\sup_{n \geqslant 0} |C_n - \exp(2\pi i x \theta^n)| \geqslant \varepsilon.$$

Le cas où $|\theta| \leqslant 1$ est évident. Nous supposerons donc $|\theta| > 1$. On appelle Δ_ε l'ensemble des nombres complexes z de module 1 tels que $|z-1| \leqslant \varepsilon$ ou $|z+1| \leqslant \varepsilon$ et K_ε l'ensemble des x réels tels que $\exp(2\pi i x \theta^n)$ appartienne à Δ_ε pour tout n, $n \geqslant 0$. Dès que ε est assez petit, 0 est un point isolé de K_ε: en effet, si x appartient à K_ε, on a

$$|\exp(4\pi i x \theta^n) - 1| \leqslant 2\varepsilon$$

qui entraîne $\|2x\theta^n\| \leqslant \varepsilon$ $(n \geqslant 0)$. Si $|2x| \leqslant \varepsilon$, il y a un plus grand entier m tel que, si $n \leqslant m$, on ait $|2x\theta^n| \leqslant \varepsilon$ (si $|\theta| > 1$, m est fini). On a donc $|2x\theta^{n+1}| \geqslant 1-\varepsilon$, car $2x\theta^{n+1}$ appartient à un intervalle de longueur 2ε dont le centre est un entier. On en déduit que $\theta \geqslant (1-\varepsilon)/\varepsilon$ ce qui est inéxact si ε est assez petit. L'inclusion $K_\varepsilon - K_\varepsilon \subset K_{2\varepsilon}$, entraîne que, si ε est assez petit, tout point de K_ε est isolé. Alors K_ε est dénombrable. Mais l'ensemble de toutes les suites de ± 1 ne l'est pas et il existe donc une suite $(C_n)_{n \geqslant 0}$ prenant les valeurs ± 1 et qui n'est pas, à ε près, égale à une suite $\big(\exp(2\pi i x \theta^n)\big)_{n \geqslant 0}$ où $x \in K_\varepsilon$ et donc, à fortiori pas, à une suite $\big(\exp(2\pi i x \theta^n)\big)_{n \geqslant 0}$ où $x \in \boldsymbol{R}$.

3.5. Si θ est algébrique, soit k son degré, soit $P(X) = a_0 X^k + \ldots + a_k$ un élément irréductible de $\boldsymbol{Z}[X]$ tel que $P(\theta) = 0$ et soient θ_j, $1 \leqslant j \leqslant k-1$, les conjugués de θ; les θ_j sont des racines simples de $P(X) = 0$. Quitte à les réordonner, on supposera qu'un entier $p < k$ est défini par la condition que $|\theta_j| \leqslant 1$ si $j \leqslant p$ et $|\theta_j| > 1$ si $j > p$ (si aucun des $|\theta_j|$ n'est inférieur ou égal à 1, on pose $p = 0$).

Si Λ est harmonieux, aussi petit que soit $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel x, non nul, tel que, pour tout n, $\|\theta^n x\| \leqslant \varepsilon$. Posons $\theta^n x = p_n + \varepsilon_n$, $p_n \in \boldsymbol{Z}$, $|\varepsilon_n| \leqslant \varepsilon$. On a, pour tout n positif, $a_0 \theta^{n+k} + a_1 \theta^{n+k-1} + \ldots + a_k \theta^n = 0$ d'où l'on déduit que

$$a_0 p_{n+k} + \ldots + a_k p_n = -(a_0 \varepsilon_{n+k} + \ldots + a_k \varepsilon_n).$$

Si $\varepsilon(|a_0| + \ldots + |a_k|) < 1$, l'entier du premier membre est nul et le second membre l'est aussi. On a donc $\varepsilon_n = \lambda_1 \theta_1^n + \ldots + \lambda_p \theta_p^n$ où les λ_j sont des coefficients complexes (seules interviennent les racines de module inférieur ou égal à 1 car ε_n est borné). Les séries formelles $\sum_{n \geqslant 0} \theta^n X^n$ et $\sum_{n \geqslant 0} \varepsilon_n X^n$ représentent les fractions rationnelles $1/(1-\theta X)$ et $\sum_1^p \lambda_j/(1-\theta_j X)$ dont la différence est la fraction rationnelle irréductible $U(X)/V(X)$ où

$$V(X) = (1-\theta X) \prod_1^p (1-\theta_j X).$$

La série formelle $\sum_{n \geqslant 0} p_n X^n$ représente donc une fraction rationnelle et, d'après un théorème de Fatou ([3], lemme 2, p. 64), on peut trouver deux éléments premiers entre eux $A(X)$ et $B(X)$ de $\boldsymbol{Z}[X]$ tels que $B(0) = 1$ et que $\sum_{n \geqslant 0} p_n X^n = A(X)/B(X)$. On a alors $V(X) = B(X)$. Cela montre que θ est un entier algébrique dont les conjugués sont les θ_j, $1 \leqslant j \leqslant p$. La proposition 3.3 est prouvée.

3.6. Pour achever de démontrer le théorème VI, il nous suffit d'établir le lemme suivant:

Lemme. *Soit S un ensemble, stable pour la multiplication, d'entiers algébriques de Pisot ou de Salem. Il existe un corps réel K de nombres algébriques tel que S soit une partie stable par multiplication de $\{-1, 1\} \cup T$ où T est l'ensemble des nombres de Pisot ou de Salem de K ayant un degré égal à celui de K.*

Si x appartient à S et $x \neq \pm 1$, posons $n = d^0[x; \boldsymbol{Q}]$ et, $K = \boldsymbol{Q}[x]$. Nous allons montrer que S est contenu dans K. On sait déjà que tout élément y de S est un nombre algébrique. Posons $p = d^0[y; K]$. Si $p = 1$, le lemme est prouvé. Si $p > 1$, il y a exactement p $\boldsymbol{Q}[x]$-isomorphismes distincts de $\boldsymbol{Q}[x, y]$ dans $\boldsymbol{C}$. Soit τ l'un d'eux différent de l'identité et soit $\tau(y) = z$; z est un conjugué de y et puisque $|x| > 1$, il y a un entier m tel que $|x^m z| > 1$. Mais alors $x^m y$ ne peut être ni un nombre de Pisot, ni de Salem car le module d'un de ses conjugués, distincts de lui-même, dépasse 1.

Par des démonstrations analogues à celle de la proposition 3.3 on montre les résultats suivants:

THÉORÈME VII. *Soit θ un nombre réel strictement supérieur à 1, Λ l'ensemble des nombres réels de la forme $n\theta^n$, $n \geqslant 0$, et Λ' l'ensemble de tous les nombres réels s'écrivant comme des sommes finies $\sum_{n\geqslant 0} \varepsilon_n \theta^n$ où ε_n vaut 0 ou 1. Si θ est un nombre de Pisot, Λ et Λ' sont harmonieux. Si Λ ou Λ' est harmonieux, θ est un nombre de Pisot.*

II. CONDITIONS ENTRAÎNANT QU'UN ENSEMBLE DE NOMBRES RÉELS AIT UN COMPACT ASSOCIÉ

1. Notations et rappels

Appelons $M(\boldsymbol{R}^n)$, $n \geqslant 1$, l'ensemble des mesures de Radon bornées sur $\boldsymbol{R}^n$, à valeurs complexes; $M(\boldsymbol{R}^n)$ est une algèbre de Banach pour le produit de convolution et, par transport de structure, on définit l'algèbre $B(\boldsymbol{R}^n)$ de toutes les transformées de Fourier $\hat{\mu}$ des éléments μ de $M(\boldsymbol{R}^n)$. On pose $\|\hat{\mu}\|_{B(\boldsymbol{R}^n)} = \|\mu\|_{M(\boldsymbol{R}^n)}$.

Si E est une partie fermée de $\boldsymbol{R}^n$, soit $I(E)$ l'idéal fermé de $B(\boldsymbol{R}^n)$ composé de tous les éléments de $B(\boldsymbol{R}^n)$ nuls sur E et soit $B(E)$ l'algèbre quotient $B(\boldsymbol{R}^n)/I(E)$ munie de la norme quotient. L'opération de restriction à E des éléments de $B(\boldsymbol{R}^n)$ définit une injection canonique de $B(E)$ dans l'espace de toutes les fonctions, à valeurs complexes, continues et bornées sur E.

Si Λ est une partie de $\boldsymbol{R}$, appelons $P.T.(\Lambda)$ l'espace vectoriel normé composé de toutes les fonctions P, définies sur $\boldsymbol{R}$, à valeurs complexes et pouvant s'écrire

$$P(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda e^{i\lambda x}$$

où les a_λ sont des nombres complexes tous nuls sauf un nombre fini. La norme de P dans $P.T.(\Lambda)$ est $\|P\|_\infty = \sup_{x\in\boldsymbol{R}} |P(x)|$.

2. Définition et premières propriétés des spectres réguliers (2)

2.1. On dira qu'une partie Λ de $\boldsymbol{R}$ est un *spectre régulier* s'il existe un compact K de $\boldsymbol{R}$ et un $\varepsilon > 0$ tels que, pour tout P de $P.T.(\Lambda)$, on ait

$$\sup_{x\in K} |P(x)| \geqslant \varepsilon \|P\|_\infty. \tag{1}$$

On dira aussi que le couple (K, ε) est *adapté à Λ* si (1) est vérifié. Si A est un nombre réel positif, on dira que le couple (A, ε) est adapté

(2) Voir [2], Définition, p. 297.

à Λ pour exprimer que, si $K = [-A, A]$, le couple (K, ε) est adapté à Λ. Appelons "pas" de Λ la quantité $\{\inf|x'-x|;\ x\in\Lambda,\ x'\in\Lambda,\ x \neq x'\}$. On a alors ([8], th. 1)

2.2. PROPOSITION. *Si le couple (A, ε) est adapté à Λ, alors le pas de Λ est supérieur ou égal à $2\varepsilon A^{-1}$. Soit l un nombre réel positif tel que $Al < \varepsilon$ et soit H l'homéomorphisme canonique de $\Lambda + [-l, l]$ sur $\Lambda \times [-l, l]$ défini par $H(\lambda + t) = (\lambda, t)$, $\lambda\in\Lambda$, $|t| \leqslant l$. Soit V un ferme contenu dans $[-l, l]$. Pour tout élément Ψ de $B(\Lambda\times V)$, $\varphi = \Psi\circ H$ appartient à $B(\Lambda + V)$ et*

$$\|\Psi\|_{B(\Lambda\times V)} \leqslant \|\varphi\|_{B(\Lambda+V)} \leqslant (\varepsilon - Al)^{-1}\|\Psi\|_{B(\Lambda\times V)}.$$

La proposition permet d'appliquer les résultats ci-dessous au problème de la synthèse, de l'unicité et des isomorphismes en analyse harmonique (voir [6] et [8]).

3. Une condition nécessaire et suffisante pour que Λ soit un spectre régulier

3.1. THÉORÈME VIII. *Une partie Λ de $\boldsymbol{R}$ est un spectre régulier si et seulement si l'espace dual de $P.T.(\Lambda)$ est canoniquement isomorphe à $B(\Lambda)$.*

Décrivons l'isomorphisme canonique: à élément L du dual de $P.T.(\Lambda)$, on peut associer la suite définie par $l_\lambda = L(e^{i\lambda x})$ et l'on a $|l_\lambda| \leqslant \|L\|$. La condition exprimée dans le théorème 3.1 est que $(l_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ appartienne à $B(\Lambda)$. Sans faire d'hypothèse sur Λ, $B(\Lambda)$ peut être considéré comme une partie du dual de $P.T.(\Lambda)$ de la façon suivante: soit μ dans $M(\boldsymbol{R})$ un représentant d'un élément de $B(\Lambda)$ et soit L la forme linéaire continue sur $P.T.(\Lambda)$ définie par $P(L) = \int P d\mu$; L ne dépend pas du représentant choisi et voilà définie une injection de $B(\Lambda)$ dans le dual de $P.T(\Lambda)$. Si, en outre, Λ est un spectre régulier, cette injection est surjective. En effet, soit (K, ε) un couple adapté à Λ. L'espace $P.T.(\Lambda)$ est isomorphe à un espace de fonctions continues sur K: les restrictions à K des éléments de $P.T.(\Lambda)$. Grâce au théorème de Hahn-Banach, à tout élément L du dual de $P.T.(\Lambda)$, on peut associer une mesure μ portée par K et telle que $L(P) = \int P d\mu$ $(P\in P.T.(\Lambda))$.

Pour montrer la réciproque, nous aurons besoin du lemme suivant.

3.2. Si χ est un caractère faible et si $P(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda e^{i\lambda x}$, posons

$$P(\chi) = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda \chi(\lambda).$$

Puisque $\boldsymbol{R}$ est dense dans $\tilde{\boldsymbol{R}}$, on a

$$|P(\chi)| \leqslant \|P\|_\infty = \sup_{x\in\boldsymbol{R}} |P(x)|.$$

LEMME. *Si Λ n'est pas un spectre régulier, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une suite $(P_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de $P.T.(\Lambda)$ et un caractère faible χ sur $\boldsymbol{R}$ tels que*

(a) $\|P_n\|_\infty = 1$,

(b) *P_n converge uniformément vers 0 sur tout compact de $\boldsymbol{R}$,*

(c) $|P_n(\chi)| \geqslant 1-\varepsilon$ $(n \geqslant 1)$.

Avant de prouver le lemme, montrons pourquoi il entraîne le théorème VII. Supposons que les hypothèses du théorème soient satisfaites et que Λ ne soit pas, cependant, un spectre régulier. Au caractère χ défini par le lemme, est associée la forme linéaire continue $P \to P(\chi)$ sur $P.T.(\Lambda)$. On devrait pouvoir trouver une mesure bornée μ sur $\boldsymbol{R}$ telle que $P(\chi) = \int P d\mu$. Mais (a) et (b) entraînent $\int P_n d\mu \to 0$ $(n \to +\infty)$ tandis que, grâce à (c), $P_n(\chi)$ ne tend pas vers 0. Il y a contradiction et le théorème est prouvé.

Il reste à prouver le lemme 3.2. On va construire, par récurrence, la suite $(P_n)_{n\geqslant 1}$ et une suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ de nombres réels tels que

(a) $\|P_n\|_\infty = 1$,

(b) $\sup\limits_{|x|\leqslant n} |P_n(x)| \leqslant n^{-1}$,

(c) $\operatorname{Re}[P_1(x_n)+\ldots+P_n(x_n)] \geqslant n-\varepsilon(2^{-1}+\ldots+2^{-n})$,

(d) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

Supposons vérifiés (a), (b), (c) pour l'entier n et montrons comment choisir x_{n+1} et P_{n+1} (les choix de x_1 et P_1 sont évidents).

Soit, puisque Λ n'est pas un spectre régulier, $(Q_n)_{n\geqslant 1}$, une suite d'éléments de $P.T.(\Lambda)$ telle que

$$\|Q_n\|_\infty = 1, \quad \sup_{|x|\leqslant n}|Q_n(x)| \to 0 \quad (n \to +\infty).$$

La somme $S_n = P_1+\ldots+P_n$ est une fonction presque périodique (comme tout polynôme trigonométrique); il en est de même de $\operatorname{Re}[S_n]$ et il existe donc un nombre réel positif L_n tel que tout intervalle de longueur $2L_n$ contienne un x vérifiant

$$\operatorname{Re}[S_n(x)] \geqslant \|\operatorname{Re}[S_n]\|_\infty - \varepsilon\cdot 2^{-n-2} \geqslant n-\varepsilon(2^{-1}+\ldots+2^{-n}+2^{-n-2}).$$

Soit m un entier assez grand pour que, sur l'intervalle $[-n-1-L_n, n+1+L_n]$ on ait $|Q_m(x)| \leqslant 1/(n+1)$ et $m = m_n$ étant ainsi fixé, soit r_n un nombre réel tel que $|Q_m(r_n)| \geqslant 1-\varepsilon\cdot 2^{-n-2}$. Quitte à multiplier Q_m par un nombre complexe de module 1, ce qui ne change pas les autres propriétés de Q_m, on peut même supposer que $\operatorname{Re}[Q_m(r_n)] \geqslant 1-\varepsilon\cdot 2^{-n-2}$. Mais l'intervalle de centre r_n et de longueur $2L_n$ contient un nombre réel x_{n+1} tel que

$$\operatorname{Re}[S_n(x_{n+1})] \geqslant n-\varepsilon(2^{-1}+\ldots+2^{-n}+2^{-n-2}).$$

On pose alors $P_{n+1}(x) = Q_m(x-x_{n+1}+r_n)$ et l'on a bien

$$\sup_{|x|\leqslant n+1} |P_{n+1}(x)| \leqslant (n+1)^{-1}, \quad \|P_{n+1}\|_\infty = 1$$

et

$$\operatorname{Re}[P_1(x_{n+1})+\ldots+P_{n+1}(x_{n+1})] \geqslant n+1-\varepsilon(2^{-1}+\ldots+2^{-n-1}).$$

On peut, dans cette construction, imposer à la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une croissance arbitrairement rapide. Les inégalité (c) entraînent immédiatement $|P_j(x_n)| \geqslant 1-\varepsilon$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ et si χ est un élément de $\tilde{\boldsymbol{R}}$ point d'accumulation de l'ensemble des x_n, $n \geqslant 1$, on en déduit $|P_j(\chi)| \geqslant 1-\varepsilon$ $(j \geqslant 1)$.

On pourrait aussi prouver le théorème VIII par un argument de catégorie de Baire mais le procédé ci-dessus me semble plus attrayant.

3.3. Applications du théorème VIII. Soit Λ un ensemble discret de nombres réels (tout point de Λ est isolé). L'intérêt du théorème VIII est de montrer que l'on peut savoir si Λ est ou non un spectre régulier dès que l'on connait, à un isomorphisme près, l'algèbre de Banach $B(\Lambda)$. En effet Λ est exactement l'ensemble des points isolés du spectre de l'algèbre de Banach $B(\Lambda)$ et si $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda \delta(x-\lambda) = \mu$ est une mesure de support fini et porté par Λ, μ définit une forme linéaire sur $B(\Lambda)$ dont la norme est précisément $\|\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda e^{i\lambda x}\|_\infty$. Ainsi la connaissance, à un isomorphisme près, de l'espace $P.T.(\Lambda)$ et permet de décider si $B(\Lambda)$ est le dual de $P.T.(\Lambda)$.

3.4. PROPOSITION. *Une condition suffisante pour qu'une partie Λ de $\boldsymbol{R}$ soit un spectre régulier est qu'il existe un nombre réel a, $0 < a < 1$, tel que, pour tout caractère faible χ sur $\boldsymbol{R}$, on puisse trouver une mesure μ portée par $\boldsymbol{R}$ telle que la norme de $\hat{\mu}-\chi$ dans le dual de $P.T.(\Lambda)$ ne dépasse pas a.*

Raisonnons par l'absurde et utilisons le lemme 3.2 et ses notations. On aura

$$|\langle \chi-\hat{\mu}, P_n\rangle| \leqslant \|P_n\|_\infty\, a \leqslant a.$$

Mais $\int P_n d\mu \to 0$ $(n \to +\infty)$. D'où $|P_n(\chi)| \leqslant a$. Si l'on a choisi le nombre ε intervenant au (c) de 3.2 dans l'intervalle $]0, 1-a[$, on obtient une contradiction.

3.5. PROPOSITION. *Il existe une constante $\delta > 0$ telle que la condition suivante entraîne qu'une partie Λ de $\boldsymbol{R}$ soit un spectre régulier: à tout caractère faible χ sur $\boldsymbol{R}$ on peut associer un x réel tel que*

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} |\chi(\lambda) - e^{i\lambda x}| \leqslant \delta.$$

Pour montrer 3.5, le lemme suivant, dû à Varopoulos ([11], p. 3831, lemme 1) est utile:

3.6. Lemme. *A tout $\varepsilon > 0$ on peut associer un δ de $]0, \pi/4]$ et une fonction f définie sur T, à valeurs complexes, telle que*

$$f(e^{ix}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{inx}, \qquad \sum_{-\infty}^{+\infty} |a_n| < \varepsilon \quad \text{et} \quad f(e^{ix}) = e^{ix} - 1$$

sur $[-\delta, \delta]$.

Nous employons ce résultat avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ce qui définit δ dans 3.5. Voici alors la démonstration de 3.5. Si, pour un $t \in \boldsymbol{R}$, $\sup_{\lambda \in \Lambda} |\chi(\lambda) - e^{it\lambda}| < \delta$ on a,

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} |e^{-it\lambda}\chi(\lambda) - 1)| < \delta.$$

Posant $e^{ix} = \chi(\lambda) e^{-it\lambda}$ le lemme donne

$$e^{-it\lambda}\chi(\lambda) - 1 = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \big(e^{-int\lambda}\chi^n(\lambda)\big)$$

ou

$$\chi(\lambda) - e^{it\lambda} = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \chi_n(\lambda) \tag{1}$$

avec $\sum_{-\infty}^{+\infty} |a_n| < \frac{1}{2}$, les χ_n étant des caractères faibles. Si $P(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda e^{i\lambda x}$, il vient, par simple combinaison linéaire des égalités (1) avec les coefficients c_λ,

$$P(\chi) - P(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n P(\chi_n);$$

d'où $|P(\chi) - P(t)| \leqslant 2^{-1} \|P\|_\infty$ et l'on peut alors appliquer 3.4 (la mesure μ est la masse 1 au point t).

3.7. Théorème IX. *Si tout caractère faible peut être approché, uniformément sur Λ, par une suite de caractères forts, le dual de $P.T.(\Lambda)$ est isométriquement $B(\Lambda)$ et, à tout ε de $]0, 1[$ on peut associer un ensemble compact K de nombres réels tel que le couple (K, ε) soit adapté à Λ.*

La démonstration de ce résultat est une adaptation immédiate de celle du théorème VIII et de la proposition 3.5.

Corollaire 1. *Un ensemble harmonieux de nombres réels est un spectre régulier.*

Corollaire 2. *Soit θ un nombre réel et Λ l'ensemble de toutes les sommes finies $\sum_{k \geqslant 0} \varepsilon_k \theta^k$ où ε_k prend les valeurs 0 ou 1. Une condition nécessaire et suffisante pour que Λ soit un spectre régulier est que θ soit un nombre de Pisot.*

(Nous n'excluons pas 1 et tous les nombres négatifs des nombres de Pisot).

En effet, si θ est un nombre de Pisot, Λ est harmonieux (th. VII) et donc Λ est un spectre régulier.

Si θ n'est pas un nombre de Pisot, pour aucun x non nul, la série $\sum_{n \geqslant 1} \sin^2(x\theta^n)$ ne converge et l'on en déduit aussitôt que, pour tout x non nul, la suite

$$p_n(x) = \cos(x/2)\cos(\theta x/2) \ldots \cos(\theta^n x/2)$$

tend vers 0. Posons

$$P_n(x) = p_n(x) \exp[(ix/2)(1 + \theta + \ldots + \theta^n)].$$

Alors $P_n(x)$ est bien de la forme $\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda e^{i\lambda x}$. Sur $]0, +\infty[$, les fonctions $|P_n(x)|$ tendent en décroissant vers 0; elles tendent donc uniformément vers 0 sur tout compact de la forme $[\varepsilon, \varepsilon^{-1}]$, $\varepsilon > 0$, et Λ n'est pas un spectre régulier.

III. APPLICATIONS

1. Problème de la synthèse harmonique

1.1. Nous allons nous restreindre aux "ensembles symétriques" de nombres réels définis à partir d'un intervalle $[a, b]$ et d'une suite $(\xi_k)_{k \geqslant 1}$ de nombres réels, appelés rapports de dissection, de la façon suivante: E_1 est la réunion des deux intervalles $[a, a + (b-a)\xi_1]$ et $[b - (b-a)\xi_1, b]$; pour construire E_2 on opère comme pour construire E_1 sur chacun des deux intervalles composant E_1 mais ξ_1 est remplacé par ξ_2 et ainsi de suite. Le fermé E est l'intersection des E_k $(k \geqslant 1)$. Si $\xi_k = 1/3$, on obtient l'ensemble triadique de Cantor. Soit Λ_k l'ensemble des origines des intervalles composant E_k.

Soit S une distribution, à valeurs complexes, dont le support est contenu dans E. On dit que S est une *pseudomesure* si la transformée de Fourier $\hat{S}$ de S est une fonction bornée. On pose alors $\|S\|_{PM} = \|\hat{S}\|_\infty$ et l'on vérifie aussitôt que l'espace vectoriel de toutes les pseudomesures de support contenu dans E est un espace de Banach pour la norme $\|S\|_{PM}$. Cet espace sera noté $PM(E)$.

On peut, par transport de structure, définir l'algèbre de Banach $A(\boldsymbol{R})$ de toutes les transformées de Fourier $\hat{f}$ des éléments f de $L^1(\boldsymbol{R})$ ($L^1(\boldsymbol{R})$ est une algèbre de Banach quand le produit est le produit de convolution).

Les éléments S de $PM(E)$ définissent des formes linéaires continues sur $A(\boldsymbol{R})$ par $\langle S, \hat{f} \rangle = \langle \hat{S}, f \rangle = \int_{\boldsymbol{R}} \hat{S}(x) f(x)\, dx$.

1.2. La "synthèse parfaite". Nous dirons que l'ensemble symétrique E a la propriété de *synthèse parfaite* si dans la topologie $\sigma(PM(E), A(\boldsymbol{R}))$, tout élément S de $PM(E)$ est limite d'une suite $(S_k)_{k\geqslant 1}$ de pseudomesures portées par Λ_k et définies par

$$S_k = \sum_{\lambda\in\Lambda_k} \delta(x-\lambda) \int_{\lambda}^{\lambda+l_{k+1}} dS(t) \tag{1.2.1}$$

(l_{k+1} est la longueur commune des intervalles composant E_{k+1} et $\delta(x-\lambda)$ est la masse unité en λ; $\sigma(PM(E), A(\boldsymbol{R}))$ est la topologie de la convergence simple sur $A(\boldsymbol{R})$ des éléments de $PM(E)$).

1.3. Théorème X. *Soit K une extension réelle de degré fini n de $\boldsymbol{Q}$ et a un nombre réel dans l'intervalle $[0, 1[$. Appelons $S(a)$ l'ensemble des nombres de Pisot de K, de degré n, dont tous les conjugués (sauf le nombre lui-même) ont un module inférieur à a.*

La propriété de la synthèse parfaite est vérifiée par tous les ensembles symétriques construits à l'aide de rapports de dissections $(\xi_k)_{k\geqslant 1}$ tels que, pour tout k, ξ_k^{-1} appartienne à $S(a)$ privé d'une partie finie $F(a)$.

1.4. Avant de prouver ce résultat, examinons le cas plus particulier des ensembles symétriques $E(\xi)$ à rapport de dissection constant ξ. Le théorème X ne permet pas de montrer qu'un tel ensemble a la propriété de synthèse parfaite dès que ξ^{-1} est un nombre de Pisot (il faudrait pour cela que l'ensemble fini $F(a)$ du théorème X puisse être vide). Il est à remarquer cependant que, *si ξ^{-1} n'est pas un nombre de Pisot, $E(\xi)$ n'a pas la propriété de synthèse parfaite.* Appelons en effet L_k l'endomorphisme de $PM(E)$ défini par la formule 1.2.1. Grâce au théorème de Banach-Steinhaus, la propriété de synthèse parfaite ne peut avoir lieu que s'il existe une constante C telle que, pour tout k, $\|L_k\| \leqslant C$. Soit μ la mesure de Lebesgue construite sur $E(\xi)$, μ_k la mesure portée par Λ_k et donnant à chaque point de Λ_k la masse 2^{-k} et soit ν_k la mesure de Lebesgue construite sur l'ensemble symétrique $\xi^k E$. Nous allons voir qu'il est possible de trouver une suite $(t_k)_{k\geqslant 1}$ de nombres réels tels que, si $T_k = \nu_k * [\mu_k e^{it_k x}]$ la limite de $\|T_k\|_{PM}$ soit 0 tandis que $\|L_k(T_k)\|_{PM}$ soit égal à 1. Ceci rend impossible $\sup_{k\geqslant 1}\|L_k\| < +\infty$. D'abord $L_k(T_k) = \mu_k e^{it_k x}$ et $\|L_k(T_k)\|_{PM} = \|\hat{\mu}_k(x-t_k)\|_\infty = \|\hat{\mu}_k\|_\infty = 1$.

Pour évaluer ensuite $\|T_k\|_{PM}$ posons

$$p_k(x) = \cos(x/2)\ldots\cos(\theta^k x/2).$$

Nous avons déjà montré (cor. 2 du th. IX) que, sur tout compact de la forme $[\varepsilon, \varepsilon^{-1}]$, $\varepsilon > 0$, les p_k tendent uniformément vers 0. On a successivement

$$\|T_k\|_{PM} = \|\hat{T}_k\|_\infty = \|\hat{\mu}(\xi^k x)\hat{\mu}_k(x-t_k)\|_\infty = \|\hat{\mu}(t)p_k(t-\xi^{-k}t_k)\|_\infty.$$

Puisque $\hat{\mu}$ tend vers 0 à l'infini, on peut choisir les translations $\xi^{-k}t_k$ de sorte que $\lim\|T_k\|_{PM} = 0$.

1.5. Il suffit, pour prouver le théorème X, de supposer $a = 0$ et $b = 1$ car la propriété de synthèse parfaite est invariante par les transformations affines.

Nous allons montrer, en premier lieu, qu'il existe un ensemble harmonieux Λ, ne dépendant que de K et de a, tel que, pour tout k, $(\xi_1, \ldots, \xi_k)^{-1}\Lambda_k$ soit une partie de Λ.

Les points de $(\xi_1, \ldots, \xi_k)^{-1}\Lambda_k$ sont donnés par la formule

$$\lambda = \varepsilon_1(\xi_1^{-1}-1)\xi_2^{-1}\ldots\xi_k^{-1} + \varepsilon_2(\xi_2^{-1}-1)\xi_3^{-1}\ldots\xi_k^{-1} + \ldots + \varepsilon_k(\xi_k^{-1}-1)$$

où les ε_j $(1 \leqslant j \leqslant k)$ prennent les valeurs 0 ou 1.

Ce sont des entiers algébriques de K dont les conjugués ne dépassent pas $(1+a)(1-a)^{-1}$ comme le montre le calcul élémentaire. En reprenant la démonstration du (a) du théorème VI, on voit que la réunion Λ des ensembles $(\xi_1, \ldots, \xi_k)^{-1}\Lambda_k$ est un ensemble harmonieux. Soit alors (A, ε) un couple adapté à Λ. Le couple $(A\xi_1^{-1}\ldots\xi_k^{-1}, \varepsilon)$ est donc adapté à Λ_k. Grâce au théorème IV de [8], l'ensemble E a la propriété de synthèse parfaite dès que $\overline{\lim} A\xi_1^{-1}\ldots\xi_k^{-1}l_{k+1} < \varepsilon$ ce qui, dans notre cas, revient à $\overline{\lim}\,\xi_{k+1} < A^{-1}\varepsilon$. Mais les éléments de K qui sont des nombres de Pisot de degré n et dont la valeur absolue ne dépasse pas $A\varepsilon^{-1}$ sont en nombre fini. Quitte à priver $S(a)$ d'une partie finie $F(a)$, on est assuré que $\xi^{-1}\in S(a)\setminus F(a)$ entraîne $\xi < A^{-1}\varepsilon$.

2. Ensembles des zéros des fonctions presque périodiques

Nous nous intéressons ici aux ensembles E de nombres réels qui sont exactement l'ensemble des zéros d'une fonction d'une variable réelle uniformément continue et presque périodique.

Proposition. *Soit K une extension réelle de degré fini n de $\boldsymbol{Q}$ et Λ l'ensemble des nombres de Pisot ou de Salem de degré n appartenant à K. Alors Λ est l'ensemble des zéros d'une fonction presque périodique au sens de Bohr.*

(Nous n'excluons pas 1 et tous les nombres négatifs de l'ensemble des nombres de Pisot ou de Salem).

Pour montrer ce résultat il suffit de prouver que si t est un nombres réel n'appartenant pas à Λ, alors t n'appartient pas davantage à fermeture $\bar{\Lambda}$ de Λ dans le compactifié de Bohr $\tilde{\boldsymbol{R}}$ de $\boldsymbol{R}$; pour cela on déterminera un entier n, un homomorphisme continu H de $\boldsymbol{R}$ dans $\boldsymbol{T}^n$ tel que $H(t)$ n'appartienne pas à la fermeture de $H(\Lambda)$ (dans $\boldsymbol{T}^n$).

Soit A l'ensemble des entiers algébriques de K. Nous distinguerons les trois cas: t n'appartient pas à K, t appartient à K sans appartenir à A et enfin t appartient à A sans être un nombre de Pisot ou de Salem.

Si t n'appartient pas à K, il existe un caractère faible χ égal à 1 sur K et à -1 en t. Sur l'ensemble harmonieux $\Lambda \cup \{t\}$, χ est uniformément approchable par des caractères continus. Il existe donc un homomorphisme continu H de $\boldsymbol{R}$ dans $\boldsymbol{T}$ tel que $H(t)$ n'appartienne pas à l'adhérence de $H(\Lambda)$.

Si t appartient à K sans appartenir à Λ, le raisonnement est semblable. Soit $s_1, \ldots, s_n$ une base du $\boldsymbol{Z}$-module A et $L_1, \ldots, L_n$ les applications $\boldsymbol{Q}$-linéaires de K dans $\boldsymbol{Q}$ définies par $L_j(s_k) = \delta(j, k)$ où δ est le symbole de Kronecker. Puisque t n'appartient pas à A, pour un j au moins, $L_j(t)$ n'est pas un entier. Soit χ le caractère faible défini sur K par $\chi(\lambda) = \exp\big(2\pi i L_j(\lambda)\big)$. Alors χ est égal à 1 sur Λ mais est différent de 1 en t. On termine comme ci-dessus.

Si t appartient à A sans appartenir à Λ la preuve est un peu plus longue. Soient $\sigma_1 = Id, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ les n $\boldsymbol{Q}$-isomorphismes de K dans $\boldsymbol{C}$. Nous supposons les σ_j réels si $1 \leqslant j \leqslant r_1$ et complexes si $r_1 < j \leqslant n$. Posons $n - r_1 = 2r_2$ et supposons, quitte à changer encore l'ordre des indices, que si $r_1 < j \leqslant r_1 + r_2$, σ_j et σ_{j+r_2} soient complexes conjugués. Définissons une application $\boldsymbol{Q}$-linéaire L de K dans $\boldsymbol{R}^{n-1}$ de la façon suivante: si λ appartient à K,

$$L(\lambda) = \big(\sigma_2(\lambda), \ldots, \sigma_{r_1}(\lambda), \operatorname{Re}\sigma_{r_1+1}(\lambda), \operatorname{Im}\sigma_{r_1+1}(\lambda), \ldots \\ \ldots, \operatorname{Re}\sigma_{r_1+r_2}(\lambda), \operatorname{Im}\sigma_{r_1+r_2}(\lambda)\big).$$

Appelons U le compact de $\boldsymbol{R}^{n-1}$ qui est l'ensemble des points $(x_2, \ldots, x_n)$ tels que $|x_2| \leqslant 1, \ldots, |x_{r_1}| \leqslant 1$, $|x_{r_1+1}|^2 + |x_{r_1+2}|^2 \leqslant 1, \ldots, |x_{n-1}|^2 + |x_n|^2 \leqslant 1$.

La condition, pour un élément λ de K, d'être un nombre de Pisot ou Salem de degré n peut être exprimée en $\lambda \in A$ et $L(\lambda) \in U$. Si $t \in A$ et $t \notin \Lambda$, alors $L(t) \notin U$. Pour tout nombre réel ε non nul, soit Ξ_ε l'homomorphisme de K dans $\boldsymbol{T}^{n-1}$ défini par $\Xi_\varepsilon(\lambda) = \exp\big(2\pi i \varepsilon L(\lambda)\big)$. Dès que ε est assez petit, $\Xi_\varepsilon(t)$ n'appartient pas à l'adhérence de $\Xi_\varepsilon(\Lambda)$ dans $\boldsymbol{T}^{n-1}$. Mais Ξ_ε est uniformément approchable sur l'ensemble harmonieux $\Lambda \cup \{t\}$ par des homomorphismes continus H de $\boldsymbol{R}$ dans $\boldsymbol{T}^{n-1}$ et il existe donc un tel H ayant la propriété que $H(t)$ n'appartienne pas à l'adhérence de $H(\Lambda)$.

THÉORÈME XI. *Soit L une extension réelle de degré fini de $\boldsymbol{Q}$ et Λ l'ensemble des nombres de Pisot ou de Salem de L. Alors Λ est l'ensemble des zéros d'une fonction presque périodique au sens de Bohr.*

En effet il n'y a qu'un nombre fini de corps intermédiaires K compris entre $\boldsymbol{Q}$ et L. A un tel corps K associons l'ensemble $\Lambda(K)$ des éléments λ de Λ tels que $K = Q[\lambda]$: Λ est la réunion finie des $\Lambda(K)$ et chaque $\Lambda(K)$ est, grâce à la proposition 2.1, l'ensemble des zéros d'une fonction presque périodique. Il en est de même de Λ.

Travaux cités

[1] A. S. Besicovitch, *Almost periodic functions*, Cambridge 1932.
[2] J.-P. Kahane, *Sur les fonctions moyennes-périodiques bornées*, Ann. Inst. Fourier 7 (1957), p. 293–314.
[3] — et R. Salem, *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*, Paris 1962.
[4] J. F. Méla, *Sur certains ensembles exceptionnels en Analyse de Fourier*, Ann. Inst. Fourier 18, 2 (1968), p. 31-71.
[5] Y. Meyer, *Une caractérisation des nombres de Pisot*, C. R. Acad. Sc. Paris 266 (1968), p. 63–64.
[6] — *Problème de l'unicité et de la synthèse en analyse harmonique*, ibidem 266 (1968), p. 275–276.
[7] — *Nombres de Pisot et Analyse harmonique*, ibidem 267 (1968), p. 196–198.
[8] — *Isomorphismes entre certaines algèbres de restrictions*, Ann. Inst. Fourier 18, 2 (1968), p. 73-86.
[9] W. Rudin, *Fourier analysis on groups*, 1962.
[10] R. Salem, *Algebraic numbers and Fourier analysis*, 1961.
[11] N. Th. Varopoulos, *Sur les ensembles parfaits et les séries trigonométriques*, C. R. Acad. Sc. Paris 260 (1965), p. 3831–3834.

Reçu par la Rédaction le 20. 11. 1968