STUDIA MATHEMATICA, T. XXXIV. (1970)

Fonctions continues et fonctions bornées non adhérentes dans $L^\infty(T)$ à la suite de leurs sommes partielles de Fourier

par

EDMOND BUSKO (Orsay, France)

On désigne par $S_n(f)$, la n^e somme partielle de Fourier de $f\in L(\boldsymbol{T})$, et par

$$S_n(x;f) = \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin(u/2)}\,du,$$

sa valeur en $x\in\boldsymbol{T}$.

Les questions qui sont soulevées ont leur origine dans la remarque simple suivante: étant donnée une fonction $f\in L(\boldsymbol{T})$ continue en x_0, il existe une sous-suite $\big(S_{n_k}(x_0;f)\big)$ qui converge vers $f(x_0)$. Cela résulte de la convergence des moyennes de Cesàro-Fejér

$$\sigma_n(x_0;f) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(x_0;f)$$

vers $f(x_0)$ (cf. [4], tome 1, p. 89). En effet, supposons qu'on ait $\delta>0$ tel que

$$|S_n(x_0)-f(x_0)|\geqslant\delta$$

dès que n est assez grand; les coefficients a_k et b_k tendant vers 0 avec $1/k$, $S_n(x_0)-f(x_0)$ garde alors un signe constant, par exemple, $S_n(x_0)-f(x_0)>0$ à partir d'un certain rang, dans ces conditions, on aurait

$$\liminf_{n\to\infty}\big(\sigma_n(x_0)-f(x_0)\big) = \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\big(S_k(x_0)-f(x_0)\big)\geqslant\delta\,!$$

Etant donnée une fonction continue $f\in\mathscr{C}(\boldsymbol{T})$, existe-t-il alors nécessairement une sous-suite $\big(S_{n_k}(f)\big)$ qui converge uniformément vers f? La réponse est négative, et cette note est consacrée à la construction explicite de fonctions continues et de fonctions bornées pour lesquelles $\lim\limits_{n\to\infty}\|S_n(f)\|_\infty = +\infty$.

On montre en même temps que les estimations $\|S_n(f)\|_\infty = O(\log n)$ pour les fonctions bornées et $\|S_n(f)\|_\infty = o(\log n)$ pour les fonctions continues ne peuvent être améliorées (cf. [4], tome 1, pp. 66 et 298). Les résultats trouvés ont conduit à la définition du phénomène de Gibbs fort (cf. [4], tome 1, p. 61) et à un exemple de fonction continue présentant le phénomène de Gibbs fort presque partout (ceci ne pouvant avoir lieu partout: cf. [3]).

DÉFINITION. Une fonction $f \in L(T)$ présente le *phénomène de Gibbs fort à droite* au point x_0 (relativement à ses sommes partielles de Fourier) si:

1° f admet une limite à droite $f(x_0+)$ au point x_0;

2° la suite $(S_n(f))$ converge vers f dans un intervalle $]x_0, x_0+h[$ $(h>0)$;

3° il existe une suite décroissante (x_n) tendant vers x_0 telle que

$$\liminf_{n\to\infty} S_n(x_n;f) > f(x_0+) \quad \text{ou} \quad \limsup_{n\to\infty} S_n(x_n;f) < f(x_0+).$$

L'amplitude du phénomène est la borne supérieure des nombres

$$\liminf_{n\to\infty} S_n(x_n;f) - f(x_0+) \quad \text{et} \quad f(x_0+) - \limsup_{n\to\infty} S_n(x_n;f)$$

pour toutes les suites (x_n) tendant vers x_0 en décroissant.

On a une définition analogue pour le phénomène fort à gauche; de façon générale, on dit que f présente le *phénomène de Gibbs fort* au point x_0 si le phénomène de Gibbs fort existe à droite ou à gauche en x_0.

EXEMPLE. La fonction

$$f(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin nx}{n} \qquad \left(= \frac{\pi - x}{2} \text{ dans }]0, 2\pi[\right)$$

présente le phénomène de Gibbs fort à l'origine. Les amplitudes à droite et à gauche sont égales à

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx - \frac{\pi}{2}$$

(cf. [4], tome 1, p. 61).

Présentation de la méthode. La méthode est fondée sur l'utilisation des polynômes

$$P_{\lambda,\mu,\nu}(x) = \frac{\cos(\nu-\mu)x}{\mu} + \frac{\cos(\nu-\mu+1)x}{\mu-1} + \ldots + \frac{\cos(\nu-\lambda)x}{\lambda} - \frac{\cos(\nu+\lambda)x}{\lambda} - \ldots - \frac{\cos(\nu+\mu)x}{\mu}$$
$$= 2\sin\nu x \sum_{k=\lambda}^{\mu} \frac{\sin kx}{k},$$

pour λ, μ, ν entiers vérifiant $0 < \lambda \leqslant \mu < \nu$.

Par la transformation d'Abel, on a

$$\sum_{k=\lambda}^{\mu} \frac{\sin kx}{k} = \sum_{k=\lambda}^{\mu-1}\left[\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\sum_{p=\lambda}^{k} \sin px\right] + \frac{1}{\mu}\sum_{p=\lambda}^{\mu} \sin px,$$

de sorte que

$$\left|\sum_{k=\lambda}^{\mu} \frac{\sin kx}{k}\right| \leqslant \frac{1}{\lambda|\sin(x/2)|} \leqslant \frac{\pi}{\lambda|x|} \quad \text{pour} \quad 0 < |x| \leqslant \pi.$$

En outre, il existe une constante $A > \pi$ telle que

$$\left|\sum_{k=\lambda}^{\mu} \frac{\sin kx}{k}\right| \leqslant A$$

(cf. [4], tome 1, p. 61). Donc, dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$,

$$(1) \qquad |P_{\lambda,\mu,\nu}(x)| \leqslant 2\min\left(A, \frac{\pi}{\lambda|x|}\right).$$

Passant aux sommes de Fourier, on a, lorsque $\nu - \lambda \leqslant n < \nu + \lambda$,

$$(2) \qquad S_n(0; P_{\lambda,\mu,\nu}) = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu-1} + \ldots + \frac{1}{\lambda} > \int_\lambda^\mu \frac{dx}{x} = \log\frac{\mu}{\lambda},$$

c'est-à-dire aussi

$$S_n(0; P_{\lambda,\mu,\nu}) - P_{\lambda,\mu,\nu}(0) > \log\frac{\mu}{\lambda}.$$

Puis, pour $n \geqslant \nu + \mu$,

$$(3) \qquad S_n(x; P_{\lambda,\mu,\nu}) - P_{\lambda,\mu,\nu}(x) \equiv 0.$$

Par la transformation d'Abel appliquée à chacun des deux groupes de termes convenables qui apparaissent dans $S_n(x; P_{\lambda,\mu,\nu}) - P_{\lambda,\mu,\nu}(x)$, on a, pour $n \geqslant 0$ et $0 < |x| \leqslant \pi$,

$$(4) \qquad |S_n(x; P_{\lambda,\mu,\nu}) - P_{\lambda,\mu,\nu}(x)| \leqslant \frac{3\pi}{\lambda|x|},$$

et par le même argument

$$(5) \qquad |S_n(x; P_{\lambda,\mu,\lambda})| \leqslant \frac{3\pi}{\lambda|x|}.$$

Et enfin, grâce à l'inégalité $\log x \geqslant 2\log 2(x-1)$ sur $[\frac{1}{2}, 1]$, on a, pour $0 < n \leqslant \mu/2$,

$$(6) \qquad |S_n(x; P_{\lambda,\mu,\nu})| \leqslant \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu-1} + \ldots + \frac{1}{\mu-n+1}$$

$$< \int_{\mu-n}^{\mu} \frac{dx}{x} = \log\frac{\mu}{\mu-n} \leqslant 2\frac{n}{\mu}\log 2 \leqslant \log 2.$$

La méthode consiste à définir les fonctions comme somme de polynômes $P_{\lambda,\mu,\nu}$ convenablement translatés, de façon que pour un point et un entier n convenablement choisis et associés, la contribution principale à la n^e somme de Fourier soit due à un seul de ces polynômes.

THÉORÈME 1. *Pour toute suite* (a_n), $0 < a_n = o(\log n)$ $(n \to \infty)$, *il existe une fonction continue* $f \epsilon \mathscr{C}(\boldsymbol{T})$ *telle que*:

1° $(S_n(f))$ *converge vers* f, *uniformément dans tout intervalle* $[\varepsilon, 2\pi]$ $(0 < \varepsilon < 2\pi)$;

2° *il existe une suite* (x_n), > 0, *tendant vers* 0 *en décroissant telle que* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n(x_n; f)}{a_n} = +\infty$.

Démonstration. On peut supposer que (a_n) tend vers $+\infty$ en croissant.

Définissons des suites $(\beta_n), (\gamma_n)$ réelles, $(\lambda_n), (\mu_n), (\nu_n)$ d'entiers vérifiant:

(i) $0 < \lambda_n \leqslant \mu_n < \nu_n$ pour $n > 0$;

(ii) $\bigcup\limits_{n>0} [\nu_n - \lambda_n, \nu_n + \lambda_n]$ contient un intervalle infini;

(iii) $(\beta_n), (\gamma_n), (\mu_n), (\nu_n - \lambda_n)$ sont > 0 et tendent vers $+\infty$ en croissant, la suite (ν_n) est strictement croissante;

(iv) $\sum\limits_{n>0} \gamma_n/\lambda_n < +\infty$;

(v) $1/2\gamma_1 + \sum\limits_{n>0} 1/\gamma_n < 1/2$;

(vi) $\liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log(\mu_n/\lambda_n)}{\log \nu_n} = 2B > 0$;

(vii) $a_n \beta_n = o(\log n)$ $(n \to \infty)$.

On pose alors

$$R_k(x) = P_{\lambda_k,\mu_k,\nu_k}(x) \quad \text{et} \quad r_k = 4\pi \sum_{m \geqslant k} \frac{1}{\gamma_m}.$$

Ceci définit une suite > 0 tendant vers 0 de façon monotone (grâce à (iii) et (v)). Plus précisément, $r_k - \dfrac{2\pi}{\gamma_k} = r_{k+1} + \dfrac{2\pi}{\gamma_k} \geqslant r_{k+1} + \dfrac{2\pi}{\gamma_{k+1}}$ d'après (iii), et $r_1 + \dfrac{2\pi}{\gamma_1} < 2\pi$ d'après (v); de sorte que les intervalles $J_k = \left]r_k - \dfrac{2\pi}{\gamma_k}, r_k + \dfrac{2\pi}{\gamma_k}\right[$ sont disjoints (dans $\boldsymbol{T}$) deux à deux.

Hors de J_k, on a $|x - r_k| \geqslant 2\pi/\gamma_k$, donc

$$|R_k(x - r_k)| \leqslant \frac{2\pi}{\lambda_k |x - r_k|} \leqslant \frac{\gamma_k}{\lambda_k}$$

d'après (1); donc la série

$$\sum_{k>0} \frac{1}{\beta_k} R_k(x - r_k)$$

converge uniformément sur $\boldsymbol{T}$ vers une fonction continue $f \epsilon \mathscr{C}(\boldsymbol{T})$ (choisissant $0 < k_1 \leqslant k_2$, on a, d'après (1) et (iii),

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{1}{\beta_k} |R_k(x - r_k)| \leqslant \frac{1}{\beta_{k_1}} \left(2A + \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{\gamma_k}{\lambda_k}\right)$$

et ceci est $o(1)$ lorsque $k_1 \to +\infty$, d'après (iii) et (iv)).

D'après l'uniforme convergence,

$$S_n(x; f) = \sum_{k>0} \frac{1}{\beta_k} S_n(x - r_k; R_k).$$

On va montrer que la contribution principale à la somme de Fourier $S_n(f)$ au point $x = r_k$ est due au terme $\dfrac{1}{\beta_k} S_n(x - r_k; R_k)$ pour $x = r_k$ et pour un choix convenable de n.

On remarque d'abord que $\lambda_k = o(\nu_k)$ $(k \to +\infty)$, d'après (i), (iii) et (vi); donc, dès que k est assez grand,

$$\log\frac{\mu_k}{\lambda_k} \geqslant \frac{7B}{4} \log \nu_k \geqslant \frac{3B}{2} \log(\nu_k + \lambda_k);$$

en outre, d'après (iii), $k < \nu_k < \nu_k + \lambda_k$, donc $\beta_k \leqslant \beta_{\nu_k+\lambda_k}$. Par conséquent, si k est assez grand et $\nu_k - \lambda_k \leqslant n < \nu_k + \lambda_k$, on a, d'après (2),

$$(7) \qquad \frac{1}{a_n \beta_k} S_n(0; R_k) > \frac{1}{a_n \beta_k} \log\frac{\mu_k}{\lambda_k} \geqslant \frac{3B \log(\nu_k + \lambda_k)}{2 a_{\nu_k+\lambda_k} \beta_{\nu_k+\lambda_k}},$$

et ceci tend vers $+\infty$, lorsque $k\to\infty$, d'après (iii) et (vii). Par ailleurs, l'inégalité (5) entraîne

$$(8)\qquad \sum_{m\neq k}\frac{1}{\beta_m}|S_n(r_k-r_m;\,R_m)|\leqslant\sum_{m\neq k}\frac{3\pi}{\beta_m\lambda_m|r_k-r_m|}<\frac{3}{2}\sum_{m\neq k}\frac{\gamma_m}{\beta_m\lambda_m},$$

ce qui est $O(1)$ pour $k\to\infty$, d'après (iii) et (iv).

Définissons la suite (x_n): on pose $x_n=r_k$ où $k=k(n)$ est le plus petit des indices j pour lesquels $\nu_j-\lambda_j\leqslant n<\nu_j+\lambda_j$; d'après (ii) et (iii), $k(n)$ est une fonction (définie à partir d'un certain entier) tendant vers $+\infty$ en croissant, donc (x_n) satisfait aux conditions de l'énoncé.

Regroupant les estimations (7) et (8) et tenant compte de $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$, on trouve, pour n assez grand,

$$\frac{S_n(x_n;f)}{a_n}=\frac{1}{a_n\beta_k}S_n(0;\,R_k)+\frac{1}{a_n}\sum_{m\neq k}\frac{1}{\beta_m}S_n(r_k-r_m;R_m)\geqslant\frac{B\log(\nu_k+\lambda_k)}{a_{\nu_k+\lambda_k}\beta_{\nu_k+\lambda_k}},$$

où $k=k(n)$; le dernier terme écrit tend vers $+\infty$ avec n (vii): d'où le 2° du théorème.

Soit maintenant $[\varepsilon,2\pi]$ avec $0<\varepsilon<2\pi$, et m_0 tel que $J_{m_0}\subset\,]0,\varepsilon[$. Si $m\geqslant m_0$ et $n\geqslant\max\limits_{1\leqslant j\leqslant m}(\nu_j+\mu_j)$, on a, d'après (3), pour $1\leqslant j\leqslant m$,

$$S_n(x-r_j;\,R_j)-R_j(x-r_j)\equiv 0.$$

De sorte que

$$S_n(x;\,f)-f(x)=\sum_{k>m}\frac{1}{\beta_k}[S_n(x-r_k;\,R_k)-R_k(x-r_k)],$$

donc, en vertu de (4), sur $[\varepsilon,2\pi]$,

$$|S_n(x;f)-f(x)|\leqslant\frac{3}{2}\sum_{k>m}\frac{\gamma_k}{\beta_k\lambda_k},$$

ce qui est $o(1)$ lorsque $m\to+\infty$; donc lorsque $n\to\infty$, le premier membre est $o(1)$: d'où le 1° du théorème.

Pour achever, nous donnons un exemple de suites $(\lambda_k),(\mu_k),(\nu_k)$ et (γ_k) assujetties aux conditions (i) à (vi). Pour simplifier on utilise un double indice (les indices étant ordonnés par l'ordre lexicographique). Pour $k>0$ et $0\leqslant j\leqslant 2^{k+3}-2^{k-1}-4=j_k$, on pose

$$\lambda_{k,j}=2^{3k},\quad \mu_{k,j}=2^{4k},\quad \nu_{k,j}=2^{4k}+j2^{3k+1}+1\quad\text{et}\quad\gamma_{k,j}=k^22^k/a$$

(où $a>0$ est convenable).

On a

$$\bigcup_{0\leqslant j\leqslant j_k}[\nu_{k,j}-\lambda_{k,j},\,\nu_{k,j}+\lambda_{k,j}[$$
$$=[2^{4k}-2^{3k}+1,\,2^{4(k+1)}-2^{3(k+1)}+1+2^{3k}[\,\supset[2^{4k}-2^{3k}+1,\,2^{4(k+1)}-2^{3(k+1)}+1[,$$

d'où (ii); puis

$$\frac{\gamma_{k,j}}{\lambda_{k,j}}=\frac{k^22^k}{a2^{3k}}\quad\text{et}\quad\sum_{j=0}^{j_k}\frac{\gamma_{k,j}}{\lambda_{k,j}}=(2^{k+3}-2^{k-1}-3)\frac{k^2}{a2^{2k}}<\frac{8k^2}{a2^k},$$

d'où (iv); aussi,

$$\sum_{j=0}^{j_k}\frac{1}{\gamma_{k,j}}=(2^{k+3}-2^{k-1}-3)\frac{a}{k^22^k}<\frac{8a}{k^2},$$

on a donc (v) si a est choisi suffisamment petit; enfin

$$\frac{\log(\mu_{k,j}/\lambda_{k,j})}{\log\nu_{k,j}}>\frac{k\log 2}{4(k+1)\log 2}\geqslant\frac{1}{8},$$

d'où (vi).

La vérification de (i) et (iii) est immédiate.

Remarque. La fonction f présente le phénomène de Gibbs fort à droite (mais pas à gauche), en $x=0$, avec une amplitude infinie; ce qui montre la dissymétrie du phénomène (cf. [2]).

Cependant la partie paire $\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ présente le phénomène de Gibbs fort à l'origine à droite et à gauche avec une amplitude infinie.

Dans la démonstration précédente, on s'aperçoit que les termes β_k ne sont pas indispensables à certaines estimations.

En fait, on a le

THÉORÈME 2. *Il existe une fonction g bornée sur $\boldsymbol{T}$, continue dans $]0,2\pi[$ et une constante $B>0$ telles que:*

1° $(S_n(g))$ *converge vers g uniformément dans tout intervalle $[\varepsilon,2\pi]$* $(0<\varepsilon<2\pi)$;

2° *il existe une suite (x_n), >0, tendant vers 0 en décroissant, telle que*

$$S_n(x_n;\,g)\geqslant B\log n,$$

dès que n est assez grand.

Démonstration. On reprend les notations, les suites et la démonstration (légèrement modifiée) du Théorème 1. La série $\sum\limits_{k>0}R_k(x-r_k)$

converge uniformément dans tout intervalle $[\varepsilon, 2\pi]$, car si $m_0 \leqslant k_1 \leqslant k_2$ où m_0 est tel que $J_{m_0} \subset]0, \varepsilon[$, on a, dans $[\varepsilon, 2\pi]$,

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} |R_k(x-r_k)| \leqslant \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{\gamma_k}{\lambda_k} = o(1) \qquad (k_1 \to \infty)$$

d'après (iv).

Posant $g(x) = \sum_{k>0} R_k(x-r_k)$ on a aussi

$$\|g\|_\infty \leqslant 2A + \sum_{k>0} \frac{\gamma_k}{\lambda_k}$$

d'après (1); donc g est bornée sur $\boldsymbol{T}$, continue dans $]0, 2\pi[$.

Par le théorème de Lebesgue sur l'intégration terme à terme, on a

$$S_n(x; g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} g(x+t) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin(t/2)} dt = \sum_{k>0} S_n(x-r_k; R_k).$$

D'après (5)

$$\sum_{m\neq k} |S_n(r_k-r_m); R_m| \leqslant \frac{3}{2} \sum_{m\neq k} (\gamma_m/\lambda_m),$$

et, par conséquent, on a

$$S_n(x_n; g) \geqslant \frac{3B}{2} \log(\nu_k+\lambda_k) - \frac{3}{2} \sum_{m\neq k} (\gamma_m/\lambda_m) \geqslant B \log n,$$

dès que n est assez grand ($k = k(n)$); c'est le 2° du théorème. Enfin, si ε, m_0, m et n sont comme dans la démonstration du Théorème 1, 1°, on a, d'après (4), sur $[\varepsilon, 2\pi]$,

$$|S_n(x; g) - g(x)| \leqslant \sum_{k>m} |S_n(x-r_k; R_k) - R_k(x-r_k)| \leqslant \frac{3}{2} \sum_{k>m} (\gamma_k/\lambda_k),$$

le dernier terme est $o(1)$ lorsque $m \to \infty$; d'où le 1° du théorème.

Le théorème 3 généralise un aspect du Théorème 1.

THÉORÈME 3. *Pour toute suite* (a_n): $0 < a_n = o(\log n)$ $(n \to \infty)$ *il existe une fonction continue* $\varphi \in \mathscr{C}(\boldsymbol{T})$ *telle que, pour tout intervalle* I $(\mathring{I} \neq \emptyset)$,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in I} \frac{S_n(x; \varphi)}{a_n} \right) = +\infty.$$

De façon précise, tout point $y \in \boldsymbol{T}$ *est limite d'une suite décroissante* (x_n) *et d'une suite croissante* (x_n') *telles que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n(x_n; \varphi)}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{S_n(x_n'; \varphi)}{a_n} = +\infty.$$

Démonstration. On reprend les suites définies au Théorème 1. On note

$$E_k = \bigcup_{m\geqslant k} [J_m \cup (-J_m)].$$

Le procédé consiste à répartir les «irrégularités» dues aux polynômes $P_{\lambda,\mu,\nu}$ sur un ensemble partout dence (ici les dyadiques de $]0, 2\pi[$). On choisit une suite croissante d'entiers (k_q) vérifiant:

(viii) $2^q\left(r_{k_q} + \dfrac{2\pi}{\gamma_{k_q}}\right) < 2\pi$ pour $q > 0$;

(ix) $\displaystyle\sum_{q>0} \frac{1}{\beta_{k_q}} < +\infty$;

(x) $\displaystyle\sum_{q>0} \left(2^q \sum_{k\geqslant k_q} \frac{\gamma_k}{\beta_k \lambda_k}\right) < +\infty$;

(xi) $J_k \cap \left(\dfrac{2\pi}{2^q} + E_{k_q}\right) \neq \emptyset \Rightarrow \nu_k + \mu_k \leqslant \min(\nu_{k_q} - \lambda_{k_q}, \mu_{k_q}/2)$.

(Il suffit pour cela que la suite (k_q) tende vers $+\infty$ suffisamment vite.)

Les intervalles $\dfrac{2\pi j}{2^q} \pm J_k$ $(q > 0, 0 < j$ impair $< 2^q$, $k \geqslant k_q)$ étant disjoints deux à deux pour q fixé, d'après (viii), on a, en vertu de (1) et de la croissance des β_k, pour $k_q \leqslant k_1^* \leqslant k_2^*$,

$$(9) \quad \sum_{\substack{(j,k):\\ 0<j \text{ impair} <2^q\\ k_1^* \leqslant k \leqslant k_2^*}} \frac{1}{\beta_k} \left(\left| R_k\left(x - \frac{2\pi j}{2^q} - r_k\right) \right| + \left| R_k\left(x - \frac{2\pi j}{2^q} + r_k\right) \right| \right) \leqslant \frac{2A}{\beta_{k_1^*}} + 2^q \sum_{k=k_1^*}^{k_2^*} \frac{\gamma_k}{\beta_k \lambda_k}$$

ce qui est $o(1)$ lorsque $k_1^* \to \infty$.

Donc

$$f_q(x) = \sum_{\substack{(j,k):\\ 0<j \text{ impair} <2^q\\ k\geqslant k_q}} \frac{1}{\beta_k} \left(R_k\left(x - \frac{2\pi j}{2^q} - r_k\right) + R_k\left(x - \frac{2\pi j}{2^q} + r_k\right) \right)$$

est une fonction continue et

$$\|f_q\|_\infty \leqslant \frac{2A}{\beta_{k_q}} + 2^q \sum_{k\geqslant k_q} \frac{\gamma_k}{\beta_k \lambda_k}$$

d'après (9).

D'où, d'après (ix) et (x), $\varphi = \sum_{q>0} f_q$ est aussi une fonction continue.

On a, en vertu de ces convergences uniformes,

$$S_n(\varphi) = \sum_{q>0} S_n(f_q)$$

avec

$$S_n(x;f_q) = \sum_{\substack{(j,k) \\ 0<j\text{impair}<2^q \\ k\geqslant k_q}} \frac{1}{\beta_k}\left(S_n\left(x-\frac{2\pi j}{2^q}-r_k;\,R_k\right)+S_n\left(x-\frac{2\pi j}{2^q}+r_k;\,R_k\right)\right).$$

Estimons la valeur de $S_n(\varphi)$ au point $x = \frac{2\pi j_0}{2^{q_0}}+\varepsilon r_k$, où $\varepsilon = \pm 1$ et k est assez grand et $\geqslant k_{q_0}$.

On a d'abord l'inégalité (7).

Au contraire, les intervalles de la forme $\frac{2\pi j}{2^{q_0}} \pm J_m$ $(m \geqslant k_{q_0})$ distincts de $\frac{2\pi j_0}{2^{q_0}}+\varepsilon J_k$ ne rencontrant pas ce dernier, on a, d'après (5),

$$\sum_{\substack{(j,m): \\ 0<j\text{impair}<2^{q_0} \\ m\geqslant k_{q_0}}}{}' \frac{1}{\beta_m}\left(\left|S_n\left(\frac{2\pi(j_0-j)}{2^{q_0}}+\varepsilon r_k - r_m;\,R_m\right)\right| + \right.$$
$$\left. + \left|S_n\left(\frac{2\pi(j_0-j)}{2^{q_0}}+\varepsilon r_k + r_m;\,R_m\right)\right|\right) \leqslant \frac{3}{2}\,2^{q_0}\sum_{m\geqslant k_{q_0}} \frac{\gamma_m}{\beta_m\lambda_m}$$

(ceci est une adaptation de (8)), $\sum'$ signifie qu'on retire de la somme le terme estimé par l'inégalité (7), pour lequel on a, à la fois $j = j_0$ et $\varepsilon r_k - r_m = 0$, ou, à la fois $j = j_0$ et $\varepsilon r_k + r_m = 0$. Examinons maintenant l'influence des $S_n(f_q)$ pour $q \neq q_0$. En premier lieu, soit $q_0 > q$; l'intervalle éventuel de la forme $\frac{2\pi j}{2^q} \pm J_m$ $(m \geqslant k_q, j$ impair) qui contient $\frac{2\pi j_0}{2^{q_0}}+\varepsilon r_k$ est tel que $\nu_m+\mu_m \leqslant \nu_{k_{q_0}}-\lambda_{k_{q_0}}$ d'après (xi); or, vu notre choix de n et la croissance de $\nu_k-\lambda_k$, nous avons $\nu_m+\mu_m \leqslant \nu_{k_{q_0}}-\lambda_{k_{q_0}} \leqslant \nu_k-\lambda_k \leqslant n$, donc

$$S_n\left(x-\frac{2\pi j}{2^q}\pm r_m;\,R_m\right) \equiv R_m\left(x-\frac{2\pi j}{2}\pm r_m\right);$$

dans la série définissant $S_n(f_q)$, les autres termes sont «petits» au point considéré: on a, d'après (1) et (5), par sommation,

$$\left|S_n\left(\frac{2\pi j_0}{2^{q_0}}+\varepsilon r_k;\,f_q\right)\right| \leqslant \frac{2A}{\beta_{k_q}}+\frac{3}{2}\,2^q\sum_{m\geqslant k_q}\frac{\gamma_m}{\beta_m\lambda_m}.$$

En second lieu, soit $q_0 < q$; pour l'intervalle éventuel $\frac{2\pi j}{2^q} \pm J_m$ $(m \geqslant k_q)$ qui contient $\frac{2\pi j_0}{2^{q_0}}+\varepsilon r_k$, nous avons

$$\left(\frac{2\pi}{2^q}+E_{k_q}\right) \cap J_k \neq \emptyset,$$

donc $n < \nu_k+\lambda_k \leqslant \nu_k+\mu_k \leqslant \mu_{k_q}/2$ (xi); alors, d'après (6),

$$|S_n(x;\,R_m)| \leqslant \log 2;$$

donc, comme précédemment,

$$\left|S_n\left(\frac{2\pi j_0}{2^{q_0}}+\varepsilon r_k;\,f_q\right)\right| \leqslant \frac{\log 2}{\beta_{k_q}}+\frac{3}{2}\,2^q\sum_{m\geqslant k_q}\frac{\gamma_m}{\beta_m\lambda_m}.$$

En regroupant les estimations, on trouve pour k assez grand et $\nu_k-\lambda_k \leqslant n < \nu_k+\lambda_k$ en tenant compte de $\log 2 < 2\pi < 2A$,

$$(10)\qquad \frac{S_n\left(\frac{2\pi j_0}{2^{q_0}}+\varepsilon r_k;\,\varphi\right)}{a_n} > \frac{3B\log(\nu_k+\lambda_k)}{2a_{\nu_k+\lambda_k}\beta_{\nu_k+\lambda_k}} - \frac{1}{a_n}\sum_{q>0}\left(\frac{2A}{\beta_{k_q}}+\frac{3}{2}\,2^q\sum_{m\geqslant k_q}\frac{\gamma_m}{\beta_m\lambda_m}\right).$$

Soit alors $y \in \boldsymbol{T}$. Il existe une suite $(x^*_{q_l})$ strictement décroissante de dyadiques $x^*_{q_l} = \frac{2\pi j_l}{2^{q_l}}$ (j_l impairs) tendant vers y; la fonction $k = k(n)$ étant définie comme au Théorème 1, et posant $x_n = x^*_{q_l}+r_k$ lorsque $k_{q_l} \leqslant k = k(n) < k_{q_{l+1}}$, on obtient une suite (x_n) tendant vers y en décroissant.

D'après (10), (ix), (x) et la croissance de a_n vers $+\infty$, on obtient

$$\frac{S_n(x_n;\,\varphi)}{a_n} > \frac{3B}{2}\cdot\frac{\log(\nu_k+\lambda_k)}{a_{\nu_k+\lambda_k}\beta_{\nu_k+\lambda_k}} - o(1) \qquad (n\to\infty).$$

D'où la conclusion annoncée. On obtient la suite (x'_n) de manière analogue.

Le Théorème 4 généralise un aspect du Théorème 2.

THÉORÈME 4. *Il existe une fonction bornée Ψ sur $\boldsymbol{T}$ telle que pour tout intervalle I ($\mathring{I} \neq \emptyset$),*

$$\liminf_{m\to\infty}\left(\sup_{x\in I}\frac{S_n(x;\,\Psi)}{\log n}\right) > 0.$$

De façon précise, pour presque tout $y \in \boldsymbol{T}$, il existe $\delta = \delta(y) > 0$, une suite décroissante (x_n) et une suite croissante (x'_n) tendant toutes deux vers y, et tels que

$$\left.\begin{matrix} S_n(x_n;\Psi) \\ S_n(x'_n;\Psi) \end{matrix}\right\} \geqslant \delta \log n \quad \textit{pour } n \geqslant \textit{un certain } n_0 = n_0(y).$$

Démonstration. Pour $U \subset V$, on note $V \setminus U$ le complémentaire de U dans V. On peut définir des suites (à indice double) $(\xi_{n,m})$ de points de $\boldsymbol{T}$ et d'entiers $(k_{n,m})$ vérifiant les conditions suivantes, où l'on pose

$$F_k = \bigcup_{m \geqslant k} \big(\bar{J}_m \cup -(\bar{J}_m)\big):$$

1) pour chaque $m > 0$, la suite $n \to k_{n,m}$ est croissante;

2) pour chaque $m > 0$,

$$(n \neq p) \Rightarrow (\xi_{n,m} + F_{k_{n,m}}) \cap (\xi_{p,m} + F_{k_{p,m}}) = \emptyset;$$

3) $\Omega_m = \bigcup_{n>0} (\xi_{n,m} + F_{k_{n,m}})$ est de mesure $\leqslant 2\pi/2^m$;

4) $\Omega_{m+1} \subset \Omega_m$ pour $m \geqslant 0$ (on pose $\Omega_0 = \boldsymbol{T}$);

5) $\Omega_m \setminus \Omega_{m+1}$ est sans point intérieur $(m \geqslant 0)$;

6) si $\eta(n)$ désigne le nombre de couples $(p, m) \in \boldsymbol{N}^2$ tels que $k_{p,m} \leqslant n$, on a

$$\sum_{n>0} \eta(n) \frac{\gamma_n}{\lambda_n} < +\infty;$$

7) $\big(m < m'$ et $(\xi_{n,m} + F_{k_{n,m}}) \cap (\xi_{n',m'} + F_{k_{n',m'}}) \neq \emptyset\big) \Rightarrow [\xi_{n',m'} + F_{k_{n',m'}}$ est $\subset$ dans un intervalle $\xi_{n,m} \pm J_k$ $(k \geqslant k_{n,m})$, et $\nu_k + \mu_k \leqslant \min(\nu_{k_{n',m'}} - \lambda_{k_{n',m'}}, \mu_{k_{n',m'}}/2)]$.

Ceci étant, on est assuré de la convergence de

$$\sum_{\substack{(k,n):n>0 \\ \text{et } k \geqslant k_{n,m}}} \big(R_k(x - \xi_{n,m} - r_k) + R_k(x - \xi_{n,m} + r_k)\big)$$

vers une fonction Ψ_m bornée. En effet, si L_1 et L_2 sont deux ensembles finis et disjoints de couples (k, n) vérifiant $n > 0$ et $k \geqslant k_{n,m}$, on a

$$(11) \quad \sum_{(k,n) \in L_1} \big(|R_k(x - \xi_{n,m} - r_k)| + |R_k(x - \xi_{n,m} + r_k)|\big) \leqslant 2A + 2 \sum_{\substack{k: \\ (k,n) \in L_1}} \eta(k) \frac{\gamma_k}{\lambda_k},$$

d'après 2), (1) et la définition de $\eta(n)$: le nombre d'intervalles $\xi_{p,m} + J_k$ où *k est fixé, ne* dépassant pas $\eta(k)$; par les mêmes arguments, sur

$$[\complement\,\Omega_m] \cup \Big[\bigcup_{(k,n) \in L_1} \big((\xi_{n,m} + J_k) \cup (\xi_{n,m} - J_k)\big)\Big],$$

on a

$$\sum_{(k,n) \in L_2} \big(|R_k(x - \xi_{n,m} - r_k)| + |R_k(x - \xi_{n,m} + r_k)|\big) \leqslant 2 \sum_{\substack{k: \\ (k,n) \in L_2}} \eta(k) \frac{\gamma_k}{\lambda_k},$$

et la convergence résulte alors de 6).

On a prouvé en même temps que

$$\|\Psi_m\|_\infty \leqslant 2A + 2 \sum_{k>0} \eta(k) \frac{\gamma_k}{\lambda_k}.$$

Par conséquent, si $0 < \varrho_m < 1$ et $\sum_{m>0} \varrho_m < +\infty$, $\Psi = \sum_{m>0} \varrho_m \Psi_m$ est une fonction bornée. On a

$$S_n(\Psi) = \sum_{m>0} \varrho_m S_n(\Psi_m),$$

et par le théorème de Lebesgue sur l'intégration terme à terme

$$S_n(x;\Psi_m) = \sum_{\substack{(k,p): \\ p>0, k \geqslant k_{p,m}}} \big(S_n(x - \xi_{p,m} - r_k; R_k) + S_n(x - \xi_{p,m} + r_k; R_k)\big).$$

Estimons les sommes de Fourier au point $x = \xi_{p_0,m_0} + \varepsilon r_{k_0}$ $(\varepsilon = \pm 1,$ $k_0 \geqslant k_{p_0,m_0})$.

Si k_0 est assez grand et $\nu_{k_0} - \lambda_{k_0} \leqslant n < \nu_{k_0} + \lambda_{k_0}$, on a

$$(12) \qquad \varrho_{m_0} S_n(0; R_{k_0}) \geqslant \varrho_{m_0} \log \frac{\mu_{k_0}}{\lambda_{k_0}} \geqslant \frac{3B}{2} \varrho_{m_0} \log n.$$

Au contraire,

$$(13) \quad \sideset{}{'}\sum_{\substack{(k,p,m): \\ p>0, m>0 \\ k \geqslant k_{p,m}}} \varrho_m\big(|S_n(\xi_{p_0,m_0} + \varepsilon r_{k_0} - \xi_{p,m} - r_k; R_k)| + {} + |S_n(\xi_{p_0,m_0} + \varepsilon r_{k_0} - \xi_{p,m} + r_k; R_k)|\big)$$

$$\leqslant \frac{3}{2} 2 \sum_{n>0} \eta(n) \frac{\gamma_n}{\lambda_n} + 2A \sum_{m<m_0} \varrho_m + \log 2 \sum_{m>m_0} \varrho_m,$$

$\sum'$ signifie qu'on supprime de la série le terme

$$\varrho_{m_0} |S_n(x - \xi_{p_0,m_0} - \varepsilon r_{k_0}; R_{k_0})|$$

pour $x = \xi_{p_0,m_0} + \varepsilon r_{k_0}$; dans le deuxième membre, le premier terme est un majorant (compte tenu de ce que les ϱ_m sont < 1) de la somme des

$$\varrho_m |S_n(\xi_{p_0,m_0} + \varepsilon r_{k_0} - \xi_{p,m} \pm r_k; R_k)|$$

pour tous les (k, p, m) tels que $\xi_{p,m} \pm J_k$ ne contient pas $\xi_{p_0,m_0} + \varepsilon r_{k_0}$; et cela s'obtient par définition de $\eta(k)$ et par application de (5); les deux derniers termes correspondent aux intervalles $\xi_{p,m} \pm J_k$ qui contiennent le point $\xi_{p_0,m_0} + \varepsilon r_{k_0}$: pour chaque m, il en existe un au plus, d'après 2); et on a alors: d'une part, si $m < m_0$, $\nu_k + \mu_k \leqslant \nu_{k_{p_0,m_0}} - \lambda_{k_{p_0,m_0}} \leqslant n$, d'après 7), soit

$$|S_n(x - \xi_{p,m} \mp r_k;\, R_k)| \equiv |R_k(x - \xi_{p,m} \mp r_k)| \leqslant 2A,$$

d'après (1) et (3), d'autre part, si $m > m_0$, $n < \nu_{k_0} + \mu_{k_0} \leqslant \mu_{k_{p,m}}/2$ d'après 7) encore, soit

$$|S_n(x - \xi_{p,m} \mp r_k;\, R_k)| \leqslant \log 2,$$

d'après (6). Soit

$$F = \bigcup_{m \geqslant 0} (\Omega_m \setminus \Omega_{m+1});$$

d'après 4),

$$\bigcup_{0 \leqslant k \leqslant m} \Omega_k \setminus \Omega_{k+1} = \Omega_0 \setminus \Omega_{m+1},$$

ce qui a une mesure $\geqslant 2\pi\left(1 - \dfrac{1}{2^{m+1}}\right)$, donc la mesure de F est $= 2\pi$.

Soit $y \in F$, il existe $m = m(y)$ (unique d'après 4)) tel que $y \in \Omega_m \setminus \Omega_{m+1}$, puis une suite décroissante tendant vers y de points $\xi_{p_q,m+1}$ tels que $p_{q+1} > p_q$ (ce qui est possible grâce aux conditions 5) et 7); on pose $x_n = \xi_{p_q,m+1} + r_k$ lorsque $k_{p_q,m+1} \leqslant k = k(n) < k_{p_{q+1},m+1}$ (voir 1)): la suite (x_n) tend vers y en décroissant. Et par les estimations (12) et (13), on a

$$S_n(x_n;\, \Psi) \geqslant B\varrho_{m+1}\log n,$$

dès que n est assez grand. Une construction analogue à gauche de y achève la démonstration.

On va maintenant généraliser l'aspect «phénomène de Gibbs fort» du Théorème 1.

THÉORÈME 5. *Il existe une fonction continue $h \in \mathscr{C}(T)$ telle que:*

1° $(S_n(h))$ *converge simplement vers h (convergence en chaque point);*

2° $\lim\limits_{n\to\infty} \|S_n(h)\|_\infty = +\infty$;

3° *h présente le phénomène de Gibbs fort à droite et à gauche presque partout.*

Démonstration. On reprend les notations, définitions et constructions précédentes. On suppose toujours que les suites (λ_k), (μ_k), (ν_k), (γ_k) vérifient (i) à (v); (vi) ne nous est plus indispensable; mais on abandonne (vii) nécessairement: voir la condition (I).

La principle modification porte sur la suite (β_k), et on introduit une suite (ϱ_n) plus précise qu'au Théorème 4; on suppose

(I) il existe a et b: $0 < a < \dfrac{b}{2}$ tel que $a \leqslant \dfrac{1}{\beta_n}\log\dfrac{\mu_n}{\lambda_n} \leqslant \dfrac{b}{2}$ pour $n > 0$;

(II) $0 < \varrho_n < 1$, $\sum\limits_{n>0} \varrho_n < \infty$ et $b\sum\limits_{k>n} \varrho_k < \dfrac{a}{3}\varrho_n$ pour $n > 0$;

(III) $\beta_k \geqslant 1$ pour $k > 0$ (dans le seul but de satisfaire $\dfrac{1}{\sqrt{\beta_k}} \geqslant \dfrac{1}{\beta_k}$).

On pose

$$h_1(x) = \sum_{\substack{(k,n):\\ n>0,\, k \geqslant k_{n,1}}} \frac{1}{\sqrt{\beta_k}}\big(R_k(x - \xi_{n,1} - r_k) + R_k(x - \xi_{n,1} + r_k)\big)$$

(on introduit h_1 essentiellement pour satisfaire le 2° du théorème) et pour $m > 1$

$$h_m(x) = \sum_{\substack{(k,n):\\ n>0,\, k \geqslant k_{n,m}}} \frac{1}{\beta_k}\big(R_k(x - \xi_{n,m} - r_k) + R_k(x - \xi_{n,m} + r_k)\big)$$

et enfin $h = \sum\limits_{m>0} \varrho_m h_m$. La convergence uniforme des séries est assurée par le fait que si L est un ensemble fini de couples (k, n): $n > 0$ et $k \geqslant k_{n,m}$, on a, dans le cas $m \neq 1$

$$\sum_{(k,n)\in L} \frac{1}{\beta_k}\big(|R_k(x - \xi_{n,m} - r_k)| + |R_k(x - \xi_{n,m} + r_k)|\big)$$
$$\leqslant 2A \max_{\substack{k:\\ (k,n)\in L}} \frac{1}{\beta_k} + 2\sum_{\substack{k:\\ (k,n)\in L}} \frac{\eta(k)\gamma_k}{\beta_k\lambda_k}$$

(ceci est une adaptation de (11)); dans le cas $m = 1$, remplacer β_k par $\sqrt{\beta_k}$ dans cette inégalité.

Cela montre que

$$\|h_1\|_\infty \leqslant \frac{2A}{\sqrt{\beta_{1,1}}} + 2\sum_{k \geqslant k_{1,1}} \frac{\eta(k)\gamma_k}{\sqrt{\beta_k}\,\lambda_k},$$

et pour $m \neq 1$

$$\|h_m\|_\infty \leqslant \frac{2A}{\beta_{1,m}} + 2\sum_{k \geqslant k_{1,m}} \frac{\eta(k)\gamma_k}{\beta_k\lambda_k}.$$

Phénomène de Gibbs. Appelons $l(n)$ le plus grand des entiers k pour lesquels $1 \leqslant j \leqslant k \Rightarrow \nu_j + \mu_j \leqslant n$: $l(n)$ tend vers $+\infty$ en croissant. On reprend la démonstration du Théorème 4 avec les modifications suivantes: on désigne par $\sum'$ la somme de tous les termes

$$(14)\qquad \frac{\varrho_m}{\beta_k}\,|S_n(\xi_{p_0,m_0}+\varepsilon r_{k_0}-\xi_{p,m}\mp r_k;\, R_k)-R_k(\xi_{p_0,m_0}+\varepsilon r_{k_0}-\xi_{p,m}\mp r_k)|$$

où (k, p, m) vérifie $m > 0$, $p > 0$, $k \geqslant k_{p,m}$, desquels on a enlevé le terme correspondant à

$$\xi_{p,m}+r_k = \xi_{p_0,m_0}+\varepsilon r_{k_0} \qquad (\text{si } \varepsilon = +1)$$

ou

$$\xi_{p,m}-r_k = \xi_{p_0,m_0}+\varepsilon r_{k_0} \qquad (\text{si } \varepsilon = -1)$$

(et où l'on remplace β_k par $\sqrt{\beta_k}$ si $m = 1$).

On a

$$(15)\qquad \sum{}' \leqslant \frac{3}{2}2\sum_{k>l(n)}\frac{\eta(k)\gamma_k}{\sqrt{\beta_k}\lambda_k}+b\sum_{m>m_0}\varrho_m\,;$$

en effet, le premier terme du deuxième membre de (15) est un majorant de la somme des termes (14) pour tous les (k, p, m) tels que $\xi_{p,m}\pm J_k$ ne contient pas $\xi_{p_0,m_0}+\varepsilon r_{k_0}$, et où l'on a tenu compte de l'identité $S_n(R_k) \equiv R_k$ si $k \leqslant l(n)$ et des inégalités $\varrho_m < 1$; au contraire, si $\xi_{p,m}\pm J_k$ contient $\xi_{p_0,m_0}+\varepsilon r_{k_0}$, ou bien $m < m_0$, mais alors d'après 7), $\nu_k+\mu_k \leqslant n$, donc le terme (14) correspondant est $= 0$, ou bien $m > m_0$, alors d'après (I)

$$\frac{1}{\beta_k}|S_n(\xi_{p_0,m_0}+\varepsilon r_{k_0}-\xi_{p,m}\mp r_k;\, R_k)-R_k(\xi_{p_0,m_0}+\varepsilon r_{k_0}-\xi_{p,m}\mp r_k)| \leqslant b$$

(on a $|S_n(x; R_k)-R_k(x)| < 2\log\dfrac{\mu_k}{\lambda_k}$), d'où le deuxième terme du deuxième membre de (15).

On a aussi, d'après (I),

$$(16)\qquad \frac{\varrho_{m_0}}{\beta_{k_0}}S_n(0;\, R_{k_0}) > \frac{\varrho_{m_0}}{\beta_{k_0}}\log\frac{\mu_{k_0}}{\lambda_{k_0}} \geqslant a\varrho_{m_0} \qquad (\text{si } m_0 \neq 1)$$

et

$$(17)\qquad \frac{\varrho_1}{\sqrt{\beta_{k_0}}}S_n(0;\, R_{k_0}) > a\varrho_1\sqrt{\beta_{k_0}}.$$

Soit alors $y \in F$, et (x_n) la suite associée à y, définie au Théorème 4 $(y \in \Omega_m \setminus \Omega_{m+1},\, m \geqslant 0)$.

Pour n suffisamment grand, on obtient en regroupant (15) et (16) d'une part, (15) et (17) d'autre part, et en tenant compte de (II)

$$S_n(x_n;\, h)-h(x_n) > a\varrho_{m+1}-\frac{a\varrho_{m+1}}{3}-\frac{a\varrho_{m+1}}{3} = \frac{a\varrho_{m+1}}{3} \qquad (\text{si } m \neq 0)$$

et

$$S_n(x_n;\, h)-h(x_n) > a\varrho_1\sqrt{\beta_k}-\frac{2a\varrho_1}{3} \qquad (k = k(n))$$

(si $m = 0$, c'est-à-dire $y \in T\setminus \Omega$).

On en déduit les parties 2° et 3° du théorème.

Convergence des sommes de Fourier. Soit $x \in \bigcap_{m>0}\Omega_m$; il existe une suite $m \to \xi_{n_m,m}$ et une suite $m \to J_{n_m}$ telles que $x \in \xi_{n_m,m}\pm J_{n_m}$.

En ce cas, par des arguments déjà étudiés,

$$|S_n(x;\, h)-h(x)| \leqslant \frac{3}{2}2\sum_{k>l(n)}\frac{\eta(k)\gamma_k}{\sqrt{\beta_k}\lambda_k}+b\sum_{\substack{m:\\ n_m>l(n)}}\varrho_m$$

et ceci est $o(1)$ lorsque $n \to \infty$.

Soit $x \in \Omega_m\setminus\Omega_{m+1}$; si $m > 0$, il existe un intervalle $\xi_{p_0,m}\pm J_{k_0}$ contenant x, alors

$$|S_n(x;\, h)-h(x)| \leqslant \frac{3}{2}2\sum_{k>l(n)}\frac{\eta(k)\gamma_k}{\sqrt{\beta_k}\lambda_k} \qquad \text{dès que } n \geqslant \nu_{k_0}+\mu_{k_0},$$

et ceci est $o(1)$ lorsque $n \to \infty$; si $m = 0$, on a la majoration précédente sans restriction sur n. Et cela achève la démonstration.

Nous indiquons maintenant comment on peut obtenir les suites $(\xi_{n,m})$ et $(k_{n,m})$ définies au Théorème 4.

Fixons, a priori, une fonction $\eta(n)$ tendant vers $+\infty$ en croissant telle que

$$\sum_{n>0}\eta(n)\frac{\gamma_n}{\lambda_n} < +\infty.$$

Nous allons procéder par récurrence et par «épuisement des intervalles». Supposons que a couples (n, m) ont été définis: plus précisément que les points $\xi_{n,m}$ et les entiers $k_{n,m}$ ont été définis pour $1 \leqslant m \leqslant m(a)$ et $1 \leqslant n \leqslant n(m, a)$:

$$\sum_{1\leqslant m\leqslant m(a)} n(m, a) = a.$$

Ceci de façon que:

1') pour chaque $m\,(1 \leqslant m \leqslant m(a))$, $n \to k_{n,m}$ est croissante $(1 \leqslant n \leqslant n(m, a))$;

2') pour chaque m $(1 \leqslant m \leqslant m(a))$,

$$(n \neq p) \Rightarrow (\xi_{n,m}+F_{k_{n,m}}) \cap (\xi_{p,m}+F_{k_{p,m}}) = \emptyset \quad (1 \leqslant n, p \leqslant n(m, a));$$

3') $\Omega_m^{n(m,a)} = \bigcup_{1\leqslant n\leqslant n(m,a)} (\xi_{n,m}+F_{k_{n,m}})$ est de mesure

$$\leqslant \frac{2\pi}{2^m}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n(m,a)}}\right);$$

4') $\Omega_{m+1}^{n(m+1,a)} \subset \Omega_m^{n(m,a)}$ pour $0 \leqslant m < m(a)$ (on pose pour tout a: $\Omega_0^{n(0,a)} = \boldsymbol{T}$);

6') le nombre de couples (n, m) vérifiant $1 \leqslant m \leqslant m(a)$, $1 \leqslant n \leqslant n(m, a)$ et $k_{n,m} \leqslant j$ est $\leqslant \eta(j)$;

7') $[1 \leqslant m < m' \leqslant m(a)$ et $(\xi_{n,m}+F_{k_{n,m}}) \cap (\xi_{n',m'}+F_{k_{n',m'}}) \neq \emptyset$ (où $1 \leqslant n \leqslant n(m, a)$ et $1 \leqslant n' \leqslant n(m', a)] \Rightarrow [(\xi_{n',m'}+F_{k_{n',m'}})$ est $\subset$ dans un intervalle $\xi_{n,m} \pm J_k$ $(1 \leqslant n \leqslant n(m, a)$ et $k \geqslant k_{n,m})$, et $\nu_k+\mu_k \leqslant \min \times \times(\nu_{k_{n',m'}}-\lambda_{k_{n',m'}}, \mu_{k_{n',m'}}/2)]$.

Notons

$$V = \bigcup_{1\leqslant m\leqslant m(a)} \Big(\bigcup_{1\leqslant n\leqslant n(m,a)} \big(\xi_{n,m}+(F_{k_{n,m}} \setminus E_{k_{n,m}})\big)\Big).$$

Soit W un intervalle composante connexe de $\complement V$ ayant la plus grande longueur, et ξ le milieu de W.

Alors il existe m_0 (unique d'après 4')) tel que $\xi \in \Omega_{m_0-1}^{n(m_0-1,a)} \setminus \Omega_{m_0}^{n(m_0,a)}$ $(0 < m_0 \leqslant m(a)+1$, on pose $\Omega_{m(a)+1}^{n(m(a)+1,a)} = \emptyset$ et $n(m(a)+1, a) = 0)$: ce qui permet de passer partiellement à l'étape $a+1$ en posant

$$m(a+1) = m(a) \quad \text{si} \quad m_0 \leqslant m(a),$$

ou

$$m(a+1) = m(a)+1 \quad \text{si} \quad m_0 = m(a)+1,$$

puis $n(m_0, a+1) = n(m_0, a)+1$ et $n(m, a+1) = n(m, a)$ pour $m \neq m_0$ et

$$\xi_{n(m_0,a+1),m_0} = \xi.$$

Il nous reste à choisir $k_{n(m_0,a+1),m_0} = k$. Il suffit que k soit assez grand pour que

1'') $k \geqslant k_{n(m_0,a),m_0}$;

2'') $\xi+F_k$ soit disjoint de chaque $\xi_{n,m_0}+F_{k_{n,m_0}}$ pour $1 \leqslant n \leqslant n(m_0, a)$;

3'') F_k soit de mesure $\leqslant \dfrac{2\pi}{2^m}\cdot\dfrac{1}{2^{n(m_0,a+1)}}$;

6'') 6') est encore réalisé lorsqu'on ajoute $k = k_{n(m_0,a+1),m_0}$ aux a entiers $k_{n,m}$ déjà définis, ce qui est possible en vertu du choix de la fonction $\eta(j)$.

7'') Si $m_0 > 1$, W est $\subset$ dans un intervalle $\xi_{n,m_0-1} \pm \bar{J}_j$, on choisit k assez grand pour que $\nu_j+\mu_j \leqslant \min(\nu_k-\lambda_k, \mu_k/2)$.

Cela entraîne qu'à l'étape $a+1$, les conditions 1') à 3'), 6') et 7') seront réalisées, la condition 4') résultant immédiatement de 7'').

On obtient bien ainsi pour chaque m, une suite $n \to \xi_{n,m}$ et une suite $n \to k_{n,m}$, car les $\xi_{n,m}+F_{k_{n,m}}$ sont disjoints deux à deux et de mesure > 0.

Et ces suites vérifient alors 1) à 4), 6) et 7); la condition 5) résulte de la construction.

Terminons par une remarque. L'ensemble des points en lesquels une fonction présente un phénomène de Gibbs fort avec amplitude $\geqslant \delta > 0$ est nécessairement sans point intérieur.

Dans le cas contraire, on aurait un intervalle ouvert I sur lequel la fonction présenterait ce phénomène; les sommes de Fourier seraient donc divergentes sur un ensemble dense dans I, contradiction!

La fonction du Théorème 3, par exemple, ne présente pas de phénomène de Gibbs fort. Par contre, celle du Théorème 5 est un exemple maximal.

Travaux cités

[1] T. H. Gronwall, *Über die Gibbssche Erscheinung*, Math. Ann. 72 (1912), p. 228–261.

[2] G. H. Hardy, and W. W. Rogosinski, *On the Gibbs phenomenon*, Journ. London Math. Soc. 18 (1943), p. 83–87.

[3] Z. Zalcwasser, *Sur le phénomène de Gibbs dans la théorie des séries de Fourier des fonctions continues*, Fund. Math. 12 (1928), p. 126–151.

[4] A. Zygmund, *Trigonometric series*, 2nd ed., vols I, II, Cambridge 1959.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES,
FACULTÉ DES SCIENCES, D'ORSAY

Reçu par la Rédaction le 17. 3. 1969