Interpolationseigenschaften von Entropie- und Durchmesseridealen kompakter Operatoren

von

HANS TRIEBEL (Jena)

H und H' seien (reelle oder komplexe) separable Hilberträume und T sei ein von H in H' abbildender kompakter Operator. Zur Beurteilung der Eigenschaften von T werden die Approximationszahlen

$$s_{n+1} = \inf \|T - K\|, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

gebildet, wobei das Infimum über sämtliche ausgearteten Operatoren K aus $L(H, H')$ zu nehmen ist, deren Wertevorrat höchstens n -dimensional ist. In [7] wurde die Zugehörigkeit des Operators T zu gewissen Normidealen untersucht. Von besonderer Bedeutung sind hierbei die Normideale $\mathfrak{S}_p$, die aus der Gesamtheit derjenigen Operatoren bestehen, für welche die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} s_n^p, 1 \leq p < \infty$, konvergiert. In [24] wurden die Normideale $\mathfrak{S}_p$ verallgemeinert und die Klassen $\mathfrak{S}_{q,p}, 0 < q < \infty, 0 < p \leq \infty$, eingeführt. Dabei war $\mathfrak{S}_{p,p} = \mathfrak{S}_p$. Es zeigte sich, daß zur Untersuchung kompakter Operatoren in Sobolev-Besov-Räumen die Klassen $\mathfrak{S}_{q,\infty}$ von besonderem Interesse sind. $\mathfrak{S}_{q,\infty}$ ist hierbei die Gesamtheit derjenigen Operatoren, für welche

$$\sup_{n=1,2,\dots} s_n n^{1/q} < \infty$$

gilt.

Die Arbeit beschäftigt sich mit Möglichkeiten der Ausdehnung der Klassen $\mathfrak{S}_{q,\infty}$ auf kompakte Abbildungen zwischen Banachräumen. Dabei werden neben den Approximationszahlen s_n die n -ten Durchmesser d_n im Sinne von Kolmogorov, die n -ten Durchmesser d^n im Sinne von Gelfand und die ε -Entropie präkompakter Mengen zur Untersuchung kompakter Operatoren herangezogen. Ist T ein kompakter Operator aus $L(A, B)$, wobei A und B zwei Banachräume sind, so gehört T

(a) zum Approximationsideal $\mathfrak{S}_a, a > 0$, falls

$$\sup_{n=1,2,\dots} n^a s_n < \infty;$$

(b) zum Durchmesserideal K_α , $\alpha > 0$, falls

$$\sup_{n=1,2,\dots} n^\alpha d_{n-1} < \infty;$$

(c) zum Durchmesserideal G_α , $\alpha > 0$, falls

$$\sup_{n=1,2,\dots} n^\alpha a_{n-1} < \infty;$$

(d) und zum Entropieideal E_α , $\alpha > 0$, falls

$$\sup_{\varepsilon \in (0, \infty)} \varepsilon [\log N(\varepsilon)]^\alpha < \infty$$

gilt. Dabei werden die Durchmesser d_n und d^n der präkompakten Menge TE_A gebildet, wobei E_A die Einheitskugel im Raum A ist. Entsprechend ist $N(\varepsilon)$ die Minimalzahl der Kugeln vom Radius ε im Raum B , die TE_A überdecken. Die Einführung von Kapazitätsidealen unter Verwendung des Begriffes der ε -Kapazität erübrigt sich, da die so gebildeten Ideale mit den Idealen E_α zusammenfallen würden. Verallgemeinert man den in [21] eingeführten Begriff eines Banachideals, indem man statt Normen auch Quasinormen zuläßt, so zeigt sich, daß die eingeführten Ideale quasinormiert und vollständig sind.

Im Mittelpunkt der Arbeit steht die Untersuchung von Interpolationseigenschaften der quasinormierten Ideale S_α , K_α , G_α und E_α . Dabei wird von der in der Interpolationstheorie üblichen Terminologie Gebrauch gemacht [10, 16]. Im Abschnitt 3 wird u. a. folgendes Resultat gewonnen. (A_0, A_1) sei ein Interpolationspaar von Banachräumen [6, 16] und A sei ein Banachraum der Klasse $K(\Theta, A_0, A_1)$ [10, 16]. Ferner sei $T \in E_{\Theta_0}(A_0, B)$ und $T \in E_{\Theta_1}(A_1, B)$. Dann ist $T \in E_\alpha(A, B)$ mit $\alpha = (1-\Theta)\alpha_0 + \Theta\alpha_1$. Ein entsprechender Satz wird für Abbildungen T , die sowohl zu $E_{\Theta_0}(A, B_0)$, als auch zu $E_{\Theta_1}(A, B_1)$ gehören und für Banachräume B aus $J(\Theta, B_0, B_1)$ hergeleitet. Abschnitt 4 enthält Resultate dieser Art für die Durchmesserideale K_α und G_α . Im Abschnitt 5 wird u. a. gezeigt, daß aus $T \in S_{\alpha_0}(A_0, H)$, $T \in S_{\alpha_1}(A_1, H)$, $A \in K(\Theta, A_0, A_1)$ die Zugehörigkeit von T zu $S_\alpha(A, H)$, $\alpha = (1-\Theta)\alpha_0 + \Theta\alpha_1$, folgt. Dabei ist H ein Hilbertraum. Abschnitt 7 enthält Bemerkungen über mögliche Verallgemeinerungen der Ideale E_α , K_α , G_α und S_α , die einer Ausdehnung der erwähnten Klassen $\mathfrak{S}_{\alpha,p}$ [24] auf Banachräume entsprechen. Auf diese Weise gewinnt man auch die von Pietsch [20] und Novoselskij [15] eingeführten Ideale, die mögliche Ausdehnungen der $\mathfrak{S}_p$ -Klassen auf Banachräume darstellen. Es zeigt sich jedoch, daß die hier betrachteten Ideale für Anwendungen geeigneter sind. Die Abschnitte 8 und 9 enthalten Aussagen über die Zugehörigkeit von Einbettungsoperatoren in Hölder-, Sobolev-Besov- und Nikolskij-Räumen zu den Idealen E_α , K_α und G_α . Dabei werden Resultate von Birman, Solomjak und Tichomirov ver-

wendet [3, 4, 23]. Diese Beispiele dienen lediglich zur Illustration der allgemeinen Theorie. Eine stärkere Verwendung von Interpolationseigenschaften der Sobolev-Besov-Räume [5, 6, 17] würde zu weiteren Resultaten in dieser Richtung führen.

1. Definitionen. A und B seien zwei (reelle oder komplexe) Banachräume. Mit $L(A, B)$ wird die Gesamtheit der linearen und stetigen Abbildungen und mit $K(A, B)$ die Gesamtheit der linearen und kompakten Abbildungen von A in B bezeichnet. E_A sei die Einheitskugel im Raum A , TE_A ihr Bild im Raum B , $T \in K(A, B)$. Die Art der Kompaktheit von TE_A (und damit von T) kann durch verschiedene Zahlen gekennzeichnet werden.

(a) Für eine positive Zahl ε sei $N(\varepsilon)$ die Minimalzahl der abgeschlossenen Kugeln im Raum B vom Radius ε , welche TE_A überdecken. $\log N(\varepsilon)$ wird als ε -Entropie bezeichnet, wobei man üblicherweise den Logarithmus zur Basis 2 nimmt [9]. Zur Deutlichkeit wird in Zweifelsfällen $N(\varepsilon, T)$ oder $N(\varepsilon, T, A, B)$ statt $N(\varepsilon)$ geschrieben. Es sei

$$E_\alpha(A, B) = \{T | T \in K(A, B), \|T\|_{E_\alpha} = \sup_{\varepsilon \in (0, \infty)} \varepsilon [\log N(\varepsilon)]^\alpha < \infty\},$$

(1)

$$0 < \alpha < \infty,$$

$$E_0(A, B) = L(A, B).$$

(b) Für eine positive Zahl ε sei $M(\varepsilon)$ die Maximalzahl der Elemente b_j aus TE_A , für welche $\|b_j - b_k\|_B > \varepsilon$, $j \neq k$, ist. $\log M(\varepsilon)$ wird als ε -Kapazität bezeichnet. Es ist [9]

(2)

$$M(2\varepsilon) \leq N(\varepsilon) \leq M(\varepsilon).$$

Ersetzt man in der Formel (1) $\log N(\varepsilon)$ durch $\log M(\varepsilon)$, so zeigt die Abschätzung (2), daß man wiederum die Klassen E_α erhält.

(c) Für $n = 0, 1, 2, \dots$ ist

(3)

$$d_n = \inf \sup_{\|a\|_A \leq 1} \inf_{b \in L_n} \|Ta - b\|_B$$

der n -te Durchmesser im Sinne von Kolmogorov der Menge TE_A [23]. Dabei ist das äußere Infimum über sämtliche Unterräume L_n von B mit $\dim L_n \leq n$ zu nehmen. Statt d_n wird auch $d_n(T)$ oder $d_n(T, A, B)$ geschrieben. $d_0 = \|T\|$. Es sei

$$K_\alpha(A, B) = \{T | T \in K(A, B), \|T\|_{K_\alpha} = \sup_{n=1,2,\dots} n^\alpha d_{n-1} < \infty\},$$

(4)

$$0 < \alpha < \infty,$$

$$K_0(A, B) = L(A, B).$$

(d) Für $n = 0, 1, 2, \dots$ ist

$$(5) \quad \bar{d}^n = \inf \sup_{\substack{\|a\|_A \leq 1 \\ T a \in B}} \|T a\|_B$$

der n -te Durchmesser im Sinne von Gelfand der Menge TE_A [23]. Dabei ist das Infimum über sämtliche Unterräume l_n von B mit $\text{codim } l_n \leq n$ zu nehmen. $\bar{d}^0 = \|T\|$. Statt $\bar{d}^n$ wird auch $\bar{d}^n(T)$ oder $\bar{d}^n(T, A, B)$ geschrieben. Es sei

$$(6) \quad G_\alpha(A, B) = \{T \mid T \in K(A, B), \|T\|_{G_\alpha} = \sup_{n=1,2,\dots} n^\alpha \bar{d}^{n-1} < \infty\},$$

$$0 < \alpha < \infty,$$

$$G_0(A, B) = L(A, B).$$

(e) Für $n = 0, 1, 2, \dots$ ist

$$(7) \quad s_{n+1} = \inf \|T - V\|$$

die $(n+1)$ -te Approximationszahl. Das Infimum ist dabei über sämtliche ausgearteten linearen Abbildungen von A in B zu bilden, deren Wertevorrat höchstens n -dimensional ist. $s_1 = \|T\|$. Es sei

$$(8) \quad S_\alpha(A, B) = \{T \mid T \in K(A, B), \|T\|_{S_\alpha} = \sup_{n=1,2,\dots} n^\alpha s_n < \infty\},$$

$$0 < \alpha < \infty,$$

$$S_0(A, B) = L(A, B).$$

Um die späteren Betrachtungen zu erleichtern, sei an dieser Stelle an einige Grundbegriffe aus der Interpolationstheorie erinnert [6, 10, 16]. A_0 und A_1 seien zwei stetig in einen linearen Hausdorffraum eingebettete Banachräume. Die Menge

$$A_0 + A_1 = \{a \mid a = a_0 + a_1, a_0 \in A_0, a_1 \in A_1\}$$

wird durch die Norm

$$(9) \quad K(t, a, A_0, A_1) = K(t, a) = \inf(\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1})$$

zu einem Banachraum. Dabei ist das Infimum über alle Darstellungen von a als Summe von a_0 und a_1 zu nehmen, $0 < t < \infty$. Die Menge $A_0 \cap A_1$ wird durch die Norm

$$(10) \quad J(t, a, A_0, A_1) = J(t, a) = \max(\|a_0\|_{A_0}, t\|a_1\|_{A_1})$$

zu einem Banachraum, $0 < t < \infty$. Es ist klar, daß die für verschiedene Werte von t angegebenen Normen äquivalent sind. Es sei für $0 < \theta < 1$

$$(11) \quad (A_0, A_1)_{\theta, \infty} = \{a \mid a \in A_0 + A_1, \sup_{t \in (0, \infty)} t^{-\theta} K(t, a) < \infty\}$$

und

$$(12) \quad (A_0, A_1)_{\theta, 1} = \{a \mid a \in A_0 + A_1, \int_0^\infty t^{-\theta} K(t, a) \frac{dt}{t} < \infty\}.$$

Verwendet man die zur Definition benutzten Ausdrücke als Normen, so sind $(A_0, A_1)_{\theta, \infty}$ und $(A_0, A_1)_{\theta, 1}$ Banachräume. Es ist

$$A_0 \cap A_1 \subseteq (A_0, A_1)_{\theta, 1} \subseteq (A_0, A_1)_{\theta, \infty} \subseteq A_0 + A_1.$$

Die für die weiteren Betrachtungen wichtigen Klassen $K(\theta) = K(\theta, A_0, A_1)$ und $J(\theta) = J(\theta, A_0, A_1)$, $0 < \theta < 1$, werden wie folgt eingeführt. Der Banachraum A gehört dann und nur dann zur Klasse $K(\theta)$, wenn $A \subseteq (A_0, A_1)_{\theta, \infty}$ gilt. Der Banachraum A gehört dann und nur dann zur Klasse $J(\theta)$, wenn $(A_0, A_1)_{\theta, 1} \subseteq A$ gilt. Lions und Peetre haben folgendes Lemma bewiesen [10, 16]:

LEMMA 1. (a) A gehört dann und nur dann zur Klasse $K(\theta, A_0, A_1)$, wenn es eine von t unabhängige positive Konstante c_1 gibt, so daß für alle a aus A die Ungleichung

$$(13) \quad K(t, a) \leq c_1 t^\theta \|a\|_A$$

gültig ist.

(b) A gehört genau dann zur Klasse $J(\theta, A_0, A_1)$, wenn es eine von t unabhängige positive Konstante c_2 gibt, so daß für alle a aus $A_0 \cap A_1$ die Ungleichung

$$(14) \quad \|a\|_A \leq c_2 (t^{-\theta} \|a\|_{A_0} + t^{1-\theta} \|a\|_{A_1})$$

gültig ist.

(c) A gehört genau dann zur Klasse $J(\theta, A_0, A_1)$, wenn es eine positive Konstante c_3 gibt, so daß für alle a aus $A_0 \cap A_1$ die Ungleichung

$$(15) \quad \|a\|_A \leq c_3 \|a\|_{A_0}^{1-\theta} \|a\|_{A_1}^\theta$$

gültig ist.

Die Richtigkeit von (a) folgt sofort aus der Definition von $K(\theta)$. Ferner sieht man leicht, daß die Aussagen (b) und (c) äquivalent sind. Die Formel (14) kann man auch in der Form

$$\|a\|_A \leq c_4 t^{-\theta} J(t, a)$$

schreiben.

Weitere Resultate der Interpolationstheorie werden bei der Anwendung der Interpolationseigenschaften der Klassen E_α , K_α und G_α auf Hölder- und Sobolev-Besov-Räume benötigt.

2. Die Q -Ideale E_α , K_α , G_α und S_α . Zur Vorbereitung der weiteren Betrachtungen sollen zwei einfache Lemmata hergeleitet werden.

LEMMA 2. Ist $T \in K(A, B)$, so konvergieren $d_n(T)$ und $d^n(T)$ gegen Null, wenn n gegen Unendlich geht.

Beweis. Da es für die Menge TE_A für jedes positive ε ein endliches ε -Netz gibt, folgt sofort die Richtigkeit der Behauptung für die Zahlen $d_n(T)$. Wir nehmen jetzt an, daß es eine präkompakte Menge $O, O \subseteq B$, und eine Zahl $\delta, \delta > 0$, gibt, so daß für alle linearen Räume l mit $\text{codim } l < \infty$

$$\sup_{b \in O \cap l} \|b\|_B > \delta$$

gültig ist. Dann kann man iterativ eine Folge von Elementen $b_i \in O$, $\|b_i\|_B = \delta$, und eine Folge von linearen stetigen Funktionalen $b'_i \in B'$, $\|b'_i\| = 1$, bestimmen, so daß

$$b'_i(b_i) = \delta \text{ und } b'_i(b_k) = 0 \quad \text{für } i < k$$

gilt. Daraus erhält man aber $\|b_i - b_k\| \geq \delta$ für $i \neq k$, was nicht sein kann. Daraus folgt auch für die Zahlen $d^n(T)$ die Aussage des Lemmas.

LEMMA 3. Für $T \in K(A, B)$ ist

$$d^n(T) = \inf_{\substack{\|a\|_A \leq 1 \\ a \in l_n}} \sup \|Ta\|_B,$$

wobei das Infimum über sämtliche Unterräume l_n aus A mit $\text{codim } l_n \leq n$ zu nehmen ist.

Beweis. $R(T)$ sei der Wertevorrat des Operators T . Man sieht leicht, daß man sich in der Formel (5) auf solche $l_n, l_n \subseteq B$, beschränken kann, die in $R(T)$ liegen und für welche $\dim R(T)/l_n \leq n$ ist. Ist $N(T)$ der Nullraum des Operators T , so sei $\tilde{T}$ die übliche Übertragung des Operators T in den Restklassenraum $\tilde{A} = A/N(T)$, dessen Elemente mit $\tilde{a}$ bezeichnet werden. Es sei $l_n \subseteq R(T)$ und $\dim R(T)/l_n \leq n$. Dann ist für $L_n = \{a | a \in A, \tilde{a} \in \tilde{T}^{-1}l_n\}$ $\text{codim } L_n \leq n$ und $TL_n = l_n$. Daraus folgt das Lemma.

Für die weiteren Betrachtungen ist es wichtig, den Begriff des Banachideals [21] etwas zu verallgemeinern. Für jedes Paar von (reellen oder komplexen) Banachräumen A, B sei $I(A, B)$ eine lineare Teilmenge von $L(A, B)$. Die Gesamtheit der $I(A, B)$ wird mit I bezeichnet. I heißt Q -Ideal (Quasinormideal), wenn folgende beiden Bedingungen erfüllt sind:

(a) Für jedes Paar A, B von Banachräumen sei auf $I(A, B)$ eine Quasinorm gegeben, d. h. eine Zuordnung $T \rightarrow \|T\|_I$ mit den Eigenschaften

1. $\|T\|_I \geq 0$ und $\|T\|_I = 0$ genau dann, wenn $T = 0$ ist,
2. $\|\lambda T\|_I = |\lambda| \|T\|_I$ und

3. $\|T_1 + T_2\|_I \leq c_5 (\|T_1\|_I + \|T_2\|_I)$ mit einer von A und B abhängigen Konstanten c_5 .

$I(A, B)$ sei vollständig.

(b) Für $S \in L(B, C)$ und $T \in I(A, B)$ sei $ST \in I(A, C)$ und

$$\|ST\|_I \leq \|S\| \|T\|_I.$$

Für $S \in I(B, C)$ und $T \in L(A, B)$ sei $ST \in I(A, C)$ und

$$\|ST\|_I \leq \|S\|_I \|T\|_I.$$

E_a sei die Gesamtheit der $E_a(A, B)$, $a \geq 0$. Entsprechend werden K_a, G_a und S_a definiert.

SATZ 1. E_a, K_a, G_a und S_a sind Q -Ideale, $a \geq 0$.

Beweis. (a) Es ist $N(\|T\| - \delta) \geq 2$, $\delta > 0$. Daraus folgt

$$(16) \quad \|T\| \leq \|T\|_{E_a}.$$

Insbesondere gilt also die Eigenschaft 1 für Quasinormen. Die Homogenität der Quasinorm $\|T\|_{E_a}$ folgt aus

$$N(|\lambda| \varepsilon, \lambda T) = N(\varepsilon, T).$$

T_1 und T_2 seien aus $E_a(A, B)$. $b_j, j = 1, \dots, N(\varepsilon, T_1)$, (bzw. $b^i, i = 1, \dots, N(\varepsilon, T_2)$) sei ein ε -Netz für $T_1 E_A$ (bzw. $T_2 E_A$). Dann gibt es für jedes a aus E_A Elemente b_j und b^i mit $\|(T_1 + T_2)a - b_j - b^i\|_B \leq 2\varepsilon$. Also ist

$$(17) \quad N(2\varepsilon, T_1 + T_2) \leq N(\varepsilon, T_1) N(\varepsilon, T_2).$$

Daraus folgt die Dreiecksungleichung für Quasinormen. Es sei $T_j, j = 1, 2, \dots$, eine Cauchyfolge aus $E_a(A, B)$. Aus der Abschätzung (16) folgt, daß die Folge T_j in der Operatornorm gegen ein Grenzelement $T \in K(A, B)$ konvergiert. Bei fixiertem ε ist $\varepsilon [\log N(\varepsilon, T - T_j)]^a$ eine Nullfolge. Aus der Formel (17) erhält man

$$c_6 \varepsilon [\log N(2\varepsilon, T - T_j)]^a \leq \varepsilon [\log N(\varepsilon, T - T_k)]^a + \varepsilon [\log N(\varepsilon, T_k - T_j)]^a$$

mit einer geeigneten positiven Konstanten c_6 . Den zweiten Summanden auf der rechten Seite kann man für $k \geq j \geq j_0$ unabhängig von ε kleiner als eine vorgegebene positive Zahl machen. Anschließend kann man durch geeignete Wahl von k (in Abhängigkeit von ε) erreichen, daß auch der erste Summand auf der rechten Seite klein wird. Daraus folgt die Vollständigkeit. Die Idealeigenschaften erhält man aus:

$$N(\|S\| \varepsilon, ST, A, C) \leq N(\varepsilon, T, A, B), \quad S \in L(B, C), T \in E_a(A, B),$$

$$N(\|T\| \varepsilon, ST, A, C) \leq N(\varepsilon, S, B, C), \quad S \in E_a(B, C), T \in L(A, B).$$

(b) Es ist $\|T\| \leq \|T\|_{K_\alpha}$ und

$$(18) \quad d_n(\lambda T) = |\lambda| d_n(T).$$

Ferner gilt

$$(19) \quad d_{n+m}(T_1+T_2) = \inf_{L_n, L'_m} \sup_{\|a\|_A \leq 1} \inf_{\substack{b_1 \in L_n \\ b_2 \in L'_m}} \|T_1 a - b_1 + T_2 a - b_2\|_B \\ \leq d_n(T_1) + d_m(T_2),$$

wobei T_1 und T_2 aus $K_\alpha(A, B)$ sind. Daraus folgt aber, daß $K_\alpha(A, B)$ ein linearer Raum mit der Quasinorm $\|T\|_{K_\alpha}$ ist. Ist T_j eine Cauchyfolge im Raum $K_\alpha(A, B)$, so konvergieren die Operatoren T_j im Sinne der Operatornorm gegen einen Operator T aus $K(A, B)$. $d_n(T - T_j)$ ist bei fixiertem n eine Nullfolge. Nach dem gleichen Schluß wie oben erhält man die Vollständigkeit von K_α . Die Idealeigenschaften folgen aus den Abschätzungen

$$(20) \quad d_n(ST, A, C) \leq \|S\| d_n(T, A, B), \quad S \in L(B, C), T \in K_\alpha(A, B),$$

und

$$(21) \quad d_n(ST, A, C) \leq \|T\| d_n(S, B, C), \quad S \in K_\alpha(B, C), T \in L(A, B).$$

(c) Für die Durchmesser $\bar{d}^n$ gelten die Formeln (18), (19), (20) und (21), wenn man dort d_n durch $\bar{d}^n$ ersetzt. Zum Beweis verwendet man zweckmäßigerweise die im Lemma 3 angegebene Form für $\bar{d}^n(T)$. Die Vollständigkeit der Ideale G_α gewinnt man nach dem gleichen Verfahren wie früher.

(d) Für die Approximationszahlen s_n gewinnt man leicht die den Formeln (20) und (21) entsprechenden Abschätzungen. (19) hat man durch

$$s_{n+m+1}(T_1+T_2) \leq s_{n+1}(T_1) + s_{m+1}(T_2)$$

zu ersetzen. Die Vollständigkeit beweist man wie oben.

SATZ 2. Die Q -Ideale $E_\alpha, K_\alpha, G_\alpha$ und S_α umfassen die Gesamtheit der ausgearteten Operatoren. Für $0 \leq \beta \leq \alpha < \infty$ gilt $E_\alpha \subseteq E_\beta$, $K_\alpha \subseteq K_\beta$, $G_\alpha \subseteq G_\beta$ und $S_\alpha \subseteq S_\beta$.

Beweis. Zu jedem ausgearteten Operator findet man stets eine positive Zahl c_γ und eine natürliche Zahl N , so daß

$$N(\varepsilon) \leq c_\gamma \varepsilon^{-N} \quad \text{und} \quad d_N = \bar{d}^N = s_N = 0$$

gilt. Daraus folgt, daß jeder ausgeartete Operator zu jedem der genannten Q -Ideale gehört. Die Monotonie der Ideale gewinnt man unmittelbar aus den Definitionen.

3. Interpolationseigenschaften der Entropieideale E_α . Die Q -Ideale E_α werden *Entropieideale* genannt.

SATZ 3. (A_0, A_1) sei ein Interpolationspaar von Banachräumen und der Banachraum A gehöre zur Klasse $K(\Theta, A_0, A_1)$, $0 < \Theta < 1$. Ferner sei $T \in E_{\alpha_0}(A_0, B)$ und $T \in E_{\alpha_1}(A_1, B)$, $0 \leq \alpha_0 < \infty$, $0 \leq \alpha_1 < \infty$. Dann gehört T zu $E_\alpha(A, B)$ mit $\alpha = (1-\Theta)\alpha_0 + \Theta\alpha_1$.

Beweis. 1. Für $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$ folgt die Aussage des Satzes unmittelbar aus der Interpolationstheorie, sofern man $A \subseteq (A_0, A_1)_{\Theta, \infty}$ berücksichtigt [10, 16].

2. Es sei $\alpha_0 = 0$ und $\alpha_1 > 0$. Nach Lemma 1 gibt es für jedes Element a mit $\|a\|_A \leq 1$ und für jede Zahl t , $0 < t < \infty$, Elemente $a_0 \in A_0$ und $a_1 \in A_1$ mit $\|a_0\|_{A_0} \leq c_8 t^\Theta$, $\|a_1\|_{A_1} \leq c_8 t^{\Theta-1}$ und $a_0 + a_1 = a$. Dabei hängt c_8 nicht von t ab. Es wird $t = \varepsilon^{1/\Theta}$ gesetzt. Dann gibt es im Raum B eine Menge b_i , $i = 1, \dots, N(\varepsilon^{1/\Theta}, T, A_1, B)$, so daß für einen geeigneten Index j

$$\|Ta_1 - b_j\|_B \leq c_8 \varepsilon^{-(1-\Theta)/\Theta} \varepsilon^{1/\Theta} = c_8 \varepsilon, \quad \|Ta_0\|_B \leq c_8 \varepsilon,$$

gilt. Daraus folgt

$$\|Ta - b_j\|_B \leq 2c_8 \varepsilon.$$

Somit ist

$$\log N(2c_8 \varepsilon T, A, B) \leq \log N(\varepsilon^{1/\Theta}, T, A_1, B) \leq c_9 \varepsilon^{-1/\Theta \alpha_1}.$$

Das ist aber die Aussage des Satzes.

3. Es sei $\alpha_0 > 0$ und $\alpha_1 > 0$. Dann gibt es wieder Elemente $a_0 \in A_0$ und $a_1 \in A_1$ mit $a = a_0 + a_1$, $\|a_0\|_{A_0} \leq c_8 t^\Theta$ und $\|a_1\|_{A_1} \leq c_8 t^{\Theta-1}$. Ist η eine vorgegebene positive Zahl, so wird $t = \eta^{(1-\Theta)\alpha_0}$ gesetzt. Im Raum B gibt es Elemente b_i , $i = 1, \dots, N(\eta^{\alpha_0}, T, A_0, B)$ und Elemente b'_j , $j = 1, \dots, N(\eta^{\alpha_1}, T, A_1, B)$, so daß für geeignete Indizes r und l

$$\|Ta_0 - b_r\|_B \leq c_8 \eta^{(1-\Theta)\alpha_0 + \alpha_0} = c_8 \eta^{(1-\Theta)\alpha_0 + \Theta\alpha_1}$$

und

$$\|Ta_1 - b'_l\|_B \leq c_8 \eta^{-(1-\Theta)(\alpha_1 - \alpha_0) + \alpha_1} = c_8 \eta^{(1-\Theta)\alpha_0 + \Theta\alpha_1}$$

ist. Da $Ta = Ta_0 + Ta_1$ ist, erhält man schließlich aus der Dreiecksungleichung

$$N(2c_8 \eta^{(1-\Theta)\alpha_0 + \Theta\alpha_1}, T, A, B) \leq N(\eta^{\alpha_0}, T, A_0, B) N(\eta^{\alpha_1}, T, A_1, B).$$

Daraus ergibt sich

$$\log N(2c_8 \eta^{(1-\Theta)\alpha_0 + \Theta\alpha_1}, T, A, B) \leq c_{10} \eta^{-1}.$$

Das ist aber äquivalent zur Aussage des Satzes.

SATZ 4. (B_0, B_1) sei ein Interpolationspaar von Banachräumen und der Banachraum B gehöre zur Klasse $J(\Theta, B_0, B_1)$. Ferner sei $T \in E_{\beta_0}(A, B_0)$

und $T \in E_{\beta_1}(A, B_1)$, $0 \leq \beta_0 < \infty$, $0 \leq \beta_1 < \infty$. Dann gehört T zu $E_{\beta}(A, B)$ mit $\beta = (1-\theta)\beta_0 + \theta\beta_1$.

Beweis. 1. Für $\beta_0 = \beta_1 = 0$ folgt die Aussage des Satzes aus der Interpolationstheorie [10, 16], sofern man $(B_0, B_1)_{\theta,1} \subseteq B$ berücksichtigt.

2. Es sei $\beta_0 = 0$ und $\beta_1 > 0$. In jeder Menge $\{a_i\}$, $i=1, \dots, N(\varepsilon^{1/\theta}, T, A, B_1) + 1$, $\|a_i\|_A \leq 1$, gibt es mindestens zwei Elemente a^0 und a^1 , so daß

$$\|Ta^0 - Ta^1\|_{B_1} \leq 2\varepsilon^{1/\theta}$$

ist. Es ist $Ta_i \in B_0 \cap B_1$. Verwendet man Lemma 1 (c) und schätzt man $\|Ta^0 - Ta^1\|_{B_0}^{1-\theta}$ durch eine Konstante ab, so erhält man

$$\|Ta^0 - Ta^1\|_B \leq c_{11}\varepsilon.$$

Somit ist

$$N(c_{11}\varepsilon, T, A, B) \leq N(\varepsilon^{1/\theta}, T, A, B_1).$$

Die Aussage des Satzes folgt dann aus

$$\log N(c_{11}\varepsilon, T, A, B) \leq \log N(\varepsilon^{1/\theta}, T, A, B_1) \leq c_{12}\varepsilon^{-1/\theta\beta_1}.$$

3. Es sei $\beta_0 > 0$ und $\beta_1 > 0$. In jeder Menge $\{a_i\}$, $i=1, \dots, N(\varepsilon^{\beta_0}, T, A, B_0)N(\varepsilon^{\beta_1}, T, A, B_1) + 1$, $\|a_i\|_A \leq 1$, gibt es Elemente $\tilde{a}_j$, $\{\tilde{a}_j\} \subseteq \{a_i\}$, $j=1, \dots, N(\varepsilon^{\beta_1}, T, A, B_1) + 1$, so daß die Bilder $T\tilde{a}_j$ in einer Kugel vom Radius ε^{β_0} im Raum B_0 liegen. Aus diesen Elementen $\tilde{a}_j$ kann man zwei Elemente a^0 und a^1 auswählen, so daß Ta^0 und Ta^1 in einer Kugel vom Radius ε^{β_1} im Raum B_1 liegen. Somit ist

$$\|Ta^0 - Ta^1\|_{B_0} \leq 2\varepsilon^{\beta_0}, \quad \|Ta^0 - Ta^1\|_{B_1} \leq 2\varepsilon^{\beta_1}.$$

Da B zur Klasse $J(\theta)$ gehört und $T(a^0 - a^1)$ im Raum $B_0 \cap B_1$ liegt, erhält man aus Lemma 1 (c)

$$\|Ta^0 - Ta^1\|_B \leq c_{13}\varepsilon^{(1-\theta)\beta_0 + \theta\beta_1}.$$

Daraus folgt

$$N(c_{13}\varepsilon^{(1-\theta)\beta_0 + \theta\beta_1}, T, A, B) \leq N(\varepsilon^{\beta_0}, T, A, B_0)N(\varepsilon^{\beta_1}, T, A, B_1).$$

Somit ist

$$\log N(c_{13}\varepsilon^{(1-\theta)\beta_0 + \theta\beta_1}, T, A, B) \leq c_{14}\varepsilon^{-1}.$$

Das ist äquivalent zur Aussage des Satzes.

SATZ 5. (A_0, A_1) und (B_0, B_1) seien zwei Paare von Interpolationsräumen. Ferner sei $A \in K(\theta, A_0, A_1)$ und $B \in J(\theta, B_0, B_1)$. Der Operator T gehöre zu $E_{\alpha_j}(A_i, B_j)$, $0 \leq i, j \leq 1$, $0 \leq \alpha_j < \infty$. Dann ist T ein Element von $E_{\beta}(A, B)$ mit

$$\gamma = (1-\theta_A)(1-\theta_B)\alpha_0 + (1-\theta_B)\theta_A\alpha_{10} + (1-\theta_A)\theta_B\alpha_{01} + \theta_A\theta_B\alpha_{11}.$$

Beweis. Nach Satz 3 gehört T zu $E_{\beta_0}(A, B_0)$ mit $\beta_0 = (1-\theta_A)\alpha_0 + \theta_A\alpha_{10}$ und zu $E_{\beta_1}(A, B_1)$ mit $\beta_1 = (1-\theta_A)\alpha_{01} + \theta_A\alpha_{11}$. Die Behauptung erhält man jetzt durch Anwendung von Satz 4.

Bemerkung. A_1 sei stetig in A_0 eingebettet und der Einbettungsoperator I sei ein Element von $E_{\alpha}(A_1, A_0)$. Ferner sei $A \in K(\theta, A_0, A_1)$. Da I zu $E_{\beta}(A_0, A_0)$ gehört, folgt aus Satz 3, daß $I \in E_{\theta\alpha}(A, A_0)$ ist. Andererseits erhält man aus $A \in J(\theta, A_0, A_1)$, $I \in E_{\theta}(A_1, A_1)$ und Satz 4, daß I zu $E_{(1-\theta)\alpha}(A_1, A)$ gehört. Dieses Resultat stimmt im wesentlichen mit einem Satz von Peetre überein [18].

4. Interpolationseigenschaften der Durchmesserideale K_{α} und G_{α} . Die Q -Ideale K_{α} und G_{α} werden Durchmesserideale genannt.

SATZ 6. (A_0, A_1) sei ein Interpolationspaar von Banachräumen und der Banachraum A gehöre zur Klasse $K(\theta, A_0, A_1)$. Ferner sei $T \in K_{\alpha_0}(A_0, B)$ und $T \in K_{\alpha_1}(A_1, B)$, $0 \leq \alpha_0 < \infty$ und $0 \leq \alpha_1 < \infty$. Dann gehört T zu $K_{\alpha}(A, B)$ mit $\alpha = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$.

Beweis. Wie bei dem Beweis des Satzes 3 gibt es für jedes a mit $\|a\|_A \leq 1$ und jede Zahl t , $0 < t < \infty$, Elemente $a_0 \in A_0$ und $a_1 \in A_1$ mit $\|a_0\|_{A_0} \leq c_8 t^{\theta}$, $\|a_1\|_{A_1} \leq c_8 t^{\theta-1}$ und $a = a_0 + a_1$. Aus $Ta = Ta_0 + Ta_1$ und der Dreiecksungleichung folgt dann

$$\begin{aligned} d_{n+m}(T, A, B) &= \inf_{L_n, L'_m} \sup_{\|a\|_A \leq 1} \inf_{\substack{b_0 \in L_n \\ b_1 \in L'_m}} \|Ta - b_0 - b_1\|_B \\ &\leq \inf_{L_n, L'_m} \left[\sup_{\|a_0\|_{A_0} \leq c_8 t^{\theta}} \inf_{b_0 \in L_n} \|Ta_0 - b_0\|_B + \sup_{\|a_1\|_{A_1} \leq c_8 t^{\theta-1}} \inf_{b_1 \in L'_m} \|Ta_1 - b_1\|_B \right] \\ &\leq c_8 t^{\theta} d_n(T, A_0, B) + c_8 t^{\theta-1} d_m(T, A_1, B). \end{aligned}$$

Ist $d_n(T, A_0, B) = 0$, so erhält man $d_{n+m}(T, A, B) = 0$. Ist $d_n(T, A_0, B) > 0$, so führt $t = d_m(T, A_1, B)/d_n(T, A_0, B)$ zu der Abschätzung

$$d_{n+m}(T, A, B) \leq 2c_8 d_n^{1-\theta}(T, A_0, B) d_m^{\theta}(T, A_1, B).$$

Insbesondere ist

$$d_{2n}(T, A, B) \leq c_{15} \frac{1}{n^{(1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1}}.$$

Daraus folgt der Satz.

SATZ 7. (B_0, B_1) sei ein Interpolationspaar von Banachräumen und der Banachraum B gehöre zur Klasse $J(\theta, B_0, B_1)$. Ferner sei $T \in G_{\beta_0}(A, B_0)$ und $T \in G_{\beta_1}(A, B_1)$, $0 \leq \beta_0 < \infty$, $0 \leq \beta_1 < \infty$. Dann gehört T zu $G_{\beta}(A, B)$ mit $\beta = (1-\theta)\beta_0 + \theta\beta_1$.

Beweis. Unter Verwendung der Lemmata 1(c) und 3 erhält man

$$\begin{aligned} d_{n+m}(T, A, B) &= \inf_{I_n, I'_m} \sup_{\substack{\|a\|_A \leq 1 \\ a \in I_n \cap I'_m}} \|Ta\|_B \\ &\leq c_{16} (\inf_{I_n} \sup_{\substack{\|a\|_A \leq 1 \\ a \in I_n}} \|Ta\|_{B_0})^{1-\theta} (\inf_{I'_m} \sup_{\substack{\|a\|_A \leq 1 \\ a \in I'_m}} \|Ta\|_{B_1})^\theta \\ &\leq c_{16} [d^n(T, A, B_0)]^{1-\theta} [d^m(T, A, B_1)]^\theta. \end{aligned}$$

Insbesondere ist

$$d^{2n}(T, A, B) \leq c_{17} n^{-(1-\theta)\beta_0 - \theta\beta_1}.$$

Daraus folgt der Satz.

5. Interpolationseigenschaften der S_α -Ideale. Die Herleitung von Interpolationseigenschaften für S_α -Ideale gründet sich auf folgendes Lemma [15, 20]:

LEMMA 4. Ist $T \in K(A, B)$, so gilt für $n = 0, 1, 2, \dots$,

$$(22) \quad d_n(T) \leq s_{n+1}(T) \leq (n+1) d_n(T).$$

Der Beweis baut auf einem Lemma von Auerbach [20] auf, aus dem folgt, daß es in einem Banachraum B zu jedem n -dimensionalen Unterraum von B einen Projektionsoperator P mit $\|P\| \leq n$ gibt. Durch Zusatzforderungen an B kann man die Formel (22) verschärfen.

LEMMA 5. B sei ein Banachraum. Es mögen solche Zahlen c_{18} und ϱ mit $c_{18} \geq 0$ und $0 \leq \varrho < 1$ existieren, daß es zu jedem n -dimensionalen Unterraum von B einen Projektionsoperator P mit $\|P\| \leq c_{18} n^\varrho$ gibt. Dann gilt für einen Operator $T \in K(A, B)$

$$(23) \quad d_n(T) \leq s_{n+1}(T) \leq c_{19} n^\varrho d_n(T), \quad n = 0, 1, \dots$$

Beweis. Die linke Seite der Ungleichung (23) ist leicht nachprüfbar. P sei der zu dem n -dimensionalen Unterraum L gehörende Operator. Dann folgt die rechte Seite der Formel (23) durch Infimumbildung in der Abschätzung

$$\begin{aligned} s_{n+1} &\leq \|T - PT\| \leq \sup_{\substack{\|a\|_A \leq 1 \\ b \in L}} (\|Ta - b\|_B + \|P(Ta - b)\|_B) \\ &\leq (1 + \|P\|) \sup_{\substack{\|a\|_A \leq 1 \\ b \in L}} \|Ta - b\|_B. \end{aligned}$$

SATZ 8. (A_0, A_1) sei ein Interaktionspaar von Banachräumen und der Banachraum A gehöre zur Klasse $K(\Theta, A_0, A_1)$. Ferner sei $T \in S_{\alpha_0}(A_0, B)$ und $T \in S_{\alpha_1}(A_1, B)$, $0 \leq \alpha_0 < \infty$, $0 \leq \alpha_1 < \infty$.

(a) T gehört zu $S_\alpha(A, B)$ mit $\alpha = \max[(1-\Theta)\alpha_0 + \Theta\alpha_1 - 1, 0]$.

(b) Ist B ein Banachraum auf den die Voraussetzungen aus Lemma 5 zutreffen, so gehört T zu $S_\alpha(A, B)$ mit

$$\alpha = \max[(1-\Theta)\alpha_0 + \Theta\alpha_1 - \varrho, 0].$$

Beweis. Satz 8 folgt sofort aus Satz 6, Formel (22) und Lemma 5.

FOLGERUNG. Sind die Voraussetzungen des Satzes 8 erfüllt und ist $B = H$ ein Hilbertraum, so gehört T zu $S_\alpha(A, B)$ mit $\alpha = (1-\Theta)\alpha_0 + \Theta\alpha_1$.

6. Einige Bemerkungen zum Hilbertraumfall. In der Einleitung wurde bereits darauf aufmerksam gemacht, daß die hier betrachteten Ideale K_α , G_α und S_α verschiedene Möglichkeiten der Ausdehnung der Klassen $\mathfrak{S}_{q,\infty}$ auf Banachräume darstellen. Die Klassen $\mathfrak{S}_{q,p}$ wurden in [24] eingeführt. Sind H und H' zwei Hilberträume, so ist für $0 < q < \infty$

$$\mathfrak{S}_{q,p}(H, H') = \{T \mid T \in K(H, H'), (\sum_{n=1}^{\infty} s_n^p n^{p/q-1})^{1/p} < \infty\}, \quad 0 < p < \infty, \\ (24)$$

$$\mathfrak{S}_{q,\infty}(H, H') = \{T \mid T \in K(H, H'), \sup_{n=1,2,\dots} n^{1/q} s_n < \infty\}.$$

SATZ 9. H und H' seien zwei Hilberträume.

(a) Für $T \in K(H, H')$ ist $s_{n+1}(T) = d_n(T) = d^n(T)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

(b) Es ist $K_\alpha(H, H') = G_\alpha(H, H') = S_\alpha(H, H') = \mathfrak{S}'_{1,\alpha,\infty}(H, H')$.

Beweis. L'_n sei ein n -dimensionaler Unterraum von H' , $l'_n = H' \ominus L'_n$. $P_{L'_n}$ sei der zu L'_n gehörige Projektionsoperator, entsprechend wird $P_{l'_n}$ definiert. $s_{n+1}(T) = d_n(T)$ folgt aus der linken Seite der Ungleichung (22) und der Abschätzung

$$s_{n+1} \leq \inf_{P_{L'_n}} \|T - P_{L'_n} T\| = \inf_{L'_n} \sup_{\|a\|_H \leq 1} \inf_{b \in L'_n} \|Ta - b\|_{H'} = d_n.$$

Zugleich erkennt man, daß $s_{n+1} = \inf_{P_{l'_n}} \|P_{l'_n} T\|$ ist. Daraus folgt

$$s_{n+1} \geq \inf_{l'_n} \sup_{\|a\|_H \leq 1} \|Ta\|_{H'} = d^n.$$

Ist L_n ein n -dimensionaler Unterraum von H und setzt man $l_n = H \ominus L_n$, so erhält man unter Verwendung von Lemma 3

$$s_{n+1} \leq \inf_{L_n} \|T - TP_{L_n}\| = \inf_{L_n} \sup_{\|a\|_H \leq 1} \|Ta\|_{H'} = d^n.$$

Daraus folgt der Satz.

7. Möglichkeiten der Verallgemeinerung der Ideale E_a , K_a , G_a und S_a .

Es ist naheliegend, die Klassen $\mathfrak{S}_{a,p}(H, H')$, Formel (24), auf Banachräume auszudehnen. Für $0 < p < \infty$ und $0 < a < \infty$ sei

$$K_{a,p}(A, B) = \left\{ T \mid T \in K(A, B), \sum_{n=1}^{\infty} d_{n-1}^p n^{ap-1} < \infty \right\}$$

und

$$\|T\|_{K_{a,p}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} d_{n-1}^p n^{ap-1} \right)^{1/p}.$$

Ersetzt man d_{n-1} durch d^{n-1} bzw. durch s_n , so erhält man entsprechend $G_{a,p}$ bzw. $S_{a,p}$. Das Ideal $K_{1/p,p}$ wurde von Novoselskij [15] und das Ideal $S_{1/p,p}$ von Pietsch [20] untersucht. Wie in den nachfolgenden Abschnitten gezeigt wird, sind jedoch die hier betrachteten Ideale K_a , G_a , S_a und E_a für die Anwendung der Theorie auf konkrete Operatoren und konkrete Banachräume geeigneter. Wie aus [24, 25] folgt, sind für Integraloperatoren in Hilberträumen auch die Klassen $S_{a,2}$ ($= G_{a,2} = K_{a,2}$) von Interesse. Lemma 2 aus [24] zeigt die Richtigkeit des folgenden Lemmas. Dabei wird $K_a = K_{a,\infty}$, $G_a = G_{a,\infty}$ und $S_a = S_{a,\infty}$ gesetzt.

LEMMA 6. (a) Für $0 < a' < a < \infty$, $0 < p \leq \infty$ und $0 < p' \leq \infty$ ist $K_{a,p} \subseteq K_{a',p'}$.

(b) Für $a > 0$ und $0 < p \leq p' \leq \infty$ ist $K_{a,p} \subseteq K_{a,p'}$.

(c) Entsprechende Aussagen gelten für $G_{a,p}$ und $S_{a,p}$.

Um die Ideale E_a zu verallgemeinern, werden die „Umkehrfunktionen“ von $N(\varepsilon)$ und $M(\varepsilon)$ eingeführt [13]. Für $T \in K(A, B)$ sei

$$e_n = \inf \{ \varepsilon \mid N(\varepsilon, T) \leq n \}$$

und

$$c_n = \inf \{ \varepsilon \mid M(\varepsilon, T) \leq n \}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Aus der Formel (2) folgt, daß $\frac{1}{2} c_n \leq e_n \leq c_n$ ist. Es ist

$$e_n = \inf_{\{b_i\} \subset B} \sup_{\|a\|_A \leq 1} \inf_{i=1, \dots, n} \|Ta - b_i\|_B$$

und

$$c_n = \sup_{\{a_i\} \subset E_A} \inf_{1 \leq i < j \leq n+1} \|Ta_i - Ta_j\|_B.$$

Dabei ist E_A die Einheitskugel im Raum A .

Ein Operator gehört genau dann zu $E_a(A, B)$, wenn

$$\sup_{n=1, 2, \dots} e_n (\log n)^a < \infty$$

ist. Damit hat man die Möglichkeit, die Ideale E_a nach dem gleichen Verfahren wie es für die Ideale K_a angedeutet wurde, zu verallgemeinern.

Für $0 < a < \infty$ sei

$$E_{a,p}(A, B) = \left\{ T \mid T \in K(A, B), \sum_{n=1}^{\infty} e_n^p (\log n)^{ap-1} n^{-1} < \infty \right\}, \quad 0 < p < \infty,$$

$$E_{a,\infty}(A, B) = E_a(A, B).$$

LEMMA 7. (a) Ist $a > 0$ und $0 < p < \infty$, so folgt aus $T \in E_{a,p}(A, B)$

$$(25) \quad e_n(T) = o((\log n)^{-a}).$$

(b) Für $0 < a' < a < \infty$, $0 < p \leq p' \leq \infty$ und $0 < p'' \leq \infty$ ist

$$E_{a,p} \subseteq E_{a,p'} \subseteq E_{a,\infty} \subseteq E_{a',p''}.$$

Beweis. Der Grundgedanke ist der gleiche wie beim Beweis von Lemma 2 aus [24]. Es sei $T \in K(A, B)$ und es existiere eine positive Zahl ε und eine unbeschränkte Folge natürlicher Zahlen $0 < n_1 < n_2 < \dots$, so daß für eine geeignete positive Zahl a

$$e_{n_i}(T) \geq \varepsilon (\log n_i)^{-a}$$

ist. Dann erhält man für $0 < p < \infty$ die Abschätzung

$$\sum_{n=1}^{n_i} e_n^p (\log n)^{ap-1} n^{-1} \geq \varepsilon^p (\log n_i)^{-ap} \sum_{n=\sqrt{n_i}}^{n_i} (\log n)^{ap-1} n^{-1} \geq c_{20} \varepsilon^p$$

mit einer geeigneten positiven Konstante c_{20} . Somit kann T nicht zu $E_{a,p}$ gehören. Daraus folgt aber die Behauptung (a). Gleichzeitig sieht man, daß $E_{a,p} \subseteq E_{a,\infty}$ gilt. $E_{a,p} \subseteq E_{a,p'}$ gewinnt man nun aus der Ungleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} e_n^{p'} (\log n)^{ap'-1} n^{-1} \leq \left[\sup_{n=1, 2, \dots} e_n (\log n)^a \right]^{p'-p} \sum_{n=1}^{\infty} e_n^p (\log n)^{ap-1} n^{-1}.$$

Für $a > a'$, $0 < p'' < \infty$ und $T \in E_{a,\infty}(A, B)$ erhält man

$$\sum_{n=1}^{\infty} e_n^{p''} (\log n)^{ap''-1} n^{-1} \leq c_{21} \sum_{n=1}^{\infty} (\log n)^{-p''(a-\sigma)-1} n^{-1} < \infty.$$

Damit ist Lemma 7 bewiesen.

Weitere Untersuchungen der Ideale $E_{a,p}$, $K_{a,p}$, $G_{a,p}$ und $S_{a,p}$ sollen an dieser Stelle nicht vorgenommen werden. Wie im Abschnitt 5 angedeutet wurde, bestehen zwischen den verschiedenen Idealen Abhängigkeiten. Gegenseitige Abschätzungen für die verschiedenen Durchmesser und für die ε -Entropie findet man z. B. in [12, 13, 15, 20].

8. Über die Zugehörigkeit von Einbettungsoperatoren zu den Entropieidealen E_a . Ω sei ein beschränktes Gebiet im R_n mit hinreichend

glatttem Rand. Für eine Zahl $\varrho, \varrho \geq 0$, wird $\varrho = [\varrho] + \{\varrho\}$ gesetzt, wobei $[\varrho]$ eine nicht negative ganze Zahl und $0 \leq \{\varrho\} < 1$ ist. Wie üblich wird mit $C^{\varrho}(\bar{\Omega})$ die Gesamtheit der in $\bar{\Omega}$ $[\varrho]$ -fach stetig differenzierbaren Funktionen bezeichnet, deren Ableitungen der Ordnung $[\varrho]$ hölderstetig zum Exponenten $\{\varrho\}$ sind. $\bar{\Omega}$ ist dabei der Abschluß des Gebietes Ω . $C^{\varrho}(\bar{\Omega})$ wird in der üblichen Weise normiert. $W_p^{\varrho}(\Omega)$, $\varrho \geq 0$, sind die Sobolev-Slobodeckij-Räume [1, 11, 22], $H_p^{\varrho}(\Omega)$ die Nikolskij-Räume (Bessel-potentialräume) [5, 11] und $B_{p,q}^{\varrho}(\Omega)$ die Besov-Räume [1], $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$. Für Gebiete mit glatttem Rand kann man diese Räume durch Einschränkung von $W_p^{\varrho}(R_n)$, $H_p^{\varrho}(R_n)$ und $B_{p,q}^{\varrho}(R_n)$ auf Ω gewinnen und entsprechend normieren. Es werden einige Resultate aus der Interpolationstheorie dieser Räume benötigt. Zur Vereinfachung wird C^{ϱ} statt $C^{\varrho}(\Omega)$, W_p^{ϱ} statt $W_p^{\varrho}(\Omega)$ usw. geschrieben. Mit $[\cdot]_{\varrho}$ wird das komplexe Verfahren von Calderón [6] und mit $(\cdot)_{\varrho,q}$ das reelle Verfahren von Lions-Peetre [10, 16] bezeichnet, $0 < \vartheta < 1$, $1 \leq q \leq \infty$. Ist (A_0, A_1) ein Interpolationspaar, so gehören $[A_0, A_1]_{\varrho}$ und $(A_0, A_1)_{\varrho,q}$, $1 \leq q \leq \infty$, zu $K(\vartheta, A_0, A_1) \cap J(\vartheta, A_0, A_1)$ ([10], insbesondere S. 29). Die genannten Räume haben die Interpolationseigenschaften

$$H_p^{\varrho} = [L_p, W_p^m]_{\varrho/m}, \quad 0 < \varrho < m, 1 < p < \infty,$$

m natürliche Zahl [5, 11], und

$$B_{p,q}^{\varrho} = (L_p, W_p^m)_{\varrho/m,q}, \quad 0 < \varrho < m, 1 < p < \infty, 1 \leq q \leq \infty,$$

m natürliche Zahl [16].

Es ist $B_{p,q}^{\varrho} = W_p^{\varrho}$, sofern ϱ nicht ganzzahlig ist [1, 16], und $H_p^{\varrho} = W_p^{\varrho}$, sofern ϱ ganzzahlig ist [11].

Aus der Vorbemerkung und der Definition der Klassen $K(\vartheta)$ und $J(\vartheta)$ folgt

$$(26) \quad B_{p,1}^{\varrho} \subseteq H_p^{\varrho}, \quad W_p^{\varrho}, \quad B_{p,q}^{\varrho} \subseteq B_{p,\infty}^{\varrho}.$$

Setzt man

$$\mathbb{C}^{\varrho} = (C, C^m)_{\varrho/m,\infty}, \quad 0 < \varrho < m,$$

m natürliche Zahl, so ist $\mathbb{C}^{\varrho} = C^{\varrho}$, sofern ϱ nicht ganzzahlig ist [16].

In jedem Falle gehören C^{ϱ} und $\mathbb{C}^{\varrho}$ zur Klasse

$$(27) \quad K(\varrho/\kappa, C, C^{\kappa}) \cap J(\varrho/\kappa, C, C^{\kappa}), \quad 0 < \varrho < \kappa.$$

LEMMA 8 [4]. Bezeichnet man mit I einen Einbettungsoperator, so ist

$$I \in E_{\varrho/n}(C^{\varrho}(\bar{\Omega}), C(\bar{\Omega})).$$

Beweis. Für quaderförmige Gebiete findet man dieses Lemma bei Birman und Solomjak [4]. Für Gebiete Ω mit glatttem Rand folgt es aus

dem Fortsetzungsverfahren [2] der Räume $C^{\varrho}(\bar{\Omega})$ über den Rand des Gebietes und der Idealeigenschaft von $E_{\varrho/n}$.

SATZ 10. Es ist $I \in E_{(\varrho-\gamma)/n}(C^{\varrho}(\bar{\Omega}), C^{\gamma}(\bar{\Omega}))$, $\varrho \geq \gamma \geq 0$.

Beweis. Es ist $I \in E_{\varrho/n}(C^{\varrho}, C)$ und $I \in E_0(C^{\varrho}, C^{\varrho})$. Ferner gehört nach Formel (27) C^{γ} zu $J(\gamma/\varrho, C, C^{\varrho})$, $0 < \gamma < \varrho$. Aus Satz 4 folgt dann, daß I in $E_{\beta}(C^{\varrho}, C^{\gamma})$ liegt, wobei

$$\beta = \left(1 - \frac{\gamma}{\varrho}\right) \frac{\varrho}{n} = \frac{\varrho - \gamma}{n}.$$

LEMMA 9. $I \in E_{\varrho/n}(W_p^{\varrho}(\Omega), L_p(\Omega))$.

Dieses Resultat stammt ebenfalls von Birman und Solomjak [4].

SATZ 11. Bezeichnet man mit R_p^{ϱ} , $1 < p < \infty$, $\varrho > 0$, einen der Räume $H_p^{\varrho}(\Omega)$, $W_p^{\varrho}(\Omega)$ oder $B_{p,q}^{\varrho}(\Omega)$, $1 \leq q \leq \infty$, und setzt man $R_p^0 = L_p$, so ist $I \in E_{(\tau-\varrho)/n}(R_p^{\tau}, R_p^{\varrho})$ für $\infty > \tau > \varrho \geq 0$. (Dabei dürfen R_p^{ϱ} und R_p^{τ} durchaus verschiedenen der aufgeführten Raumklassen angehören.)

Insbesondere ist

$$(28) \quad I \in E_{(\tau-\varrho)/n}(B_{p,\infty}^{\tau}(\Omega), B_{p,1}^{\varrho}(\Omega)).$$

Beweis. Aus $I \in E_{\mu/n}(W_p^{\mu}, L_p)$, $I \in E_0(L_p, L_p)$, $R_p^{\tau} \in K(\frac{\tau}{\mu}, L_p, W_p^{\mu})$ und

Satz 3 folgt $I \in E_{\tau/n}(R_p^{\tau}, L_p)$. Unter Berücksichtigung von $I \in E_0(R_p^{\tau}, R_p^{\varrho})$, $R_p^{\varrho} \in J(\varrho/\tau, L_p, R_p^{\tau})$ und Satz 4 erhält man daraus die Zugehörigkeit von I zu $E_{(\tau-\varrho)/n}$. Formel (28) ist die schärfste im Satz 11 enthaltene Aussage.

9. Über die Zugehörigkeit von Einbettungsoperatoren zu den Durchmesseridealen K_{α} und G_{α} . Wie im vorangegangenen Abschnitt 8 sei Ω ein beschränktes Gebiet im R_n mit hinreichend glatttem Rand.

LEMMA 10. Es ist $I \in K_{\gamma}(W_p^{\varrho}, L_q)$, $1 < p \leq q < \infty$, $0 \leq \gamma = \frac{\varrho}{n} - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

Für quaderförmige Gebiete findet man einen Beweis dieses Lemmas bei Birman und Solomjak [4]. Für beliebige Gebiete folgt es wieder aus dem Fortsetzungsverfahren [2].

SATZ 12. Haben die Räume R_p^{τ} die gleiche Bedeutung wie im Satz 11,

so ist $I \in K_{\beta}(R_p^{\tau}, L_q)$ mit $1 < p \leq q < \infty$, $0 < \beta = \frac{\tau}{n} - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

Beweis. Aus der Theorie der Einbettungssätze für Grenzexponenten [8, 14, 19] folgt $I \in K_{\sigma}(W_p^{\varrho}, L_q)$ mit $\sigma = n/p - n/q$. Zusammen mit $I \in K_{\gamma}(W_p^{\varrho}, L_q)$ für $\gamma = \varrho/n - 1/p + 1/q > 0$, $R_p^{\tau} \in K(\vartheta, W_p^{\varrho}, W_p^{\tau})$ für $\tau = (1-\vartheta)\varrho + \vartheta\sigma$ und Satz 6 erhält man $I \in K_{\beta}(R_p^{\tau}, L_q)$ für $\beta = (1-\vartheta)\gamma = \tau/n - 1/p + 1/q$. Hierbei wählt man $\varrho > \tau$.

Die schärfste im Satz 12 enthaltene Aussage ist

$$I \in K_p(B_{p,\infty}^s, L_q), \quad 1 < p \leq q < \infty, 0 < \beta = \frac{\tau}{n} - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

LEMMA 11. Es ist $I \in G_\gamma(W_p^\mu, C)$ mit $\gamma = \varrho/n - 1/p > 0$ und $1 < p < \infty$.

Dieses Resultat stammt von Solomjak und Tichomirov [23].

SAZ 13. Es ist $I \in G_\beta(W_p^\mu, C^r)$ mit $\beta = (\mu - \tau)/n - 1/p > 0$, $\tau \geq 0$ und $1 < p < \infty$.

Beweis. Aus der Interpolationstheorie [10, 16] folgt, daß für die oben eingeführten Räume $\mathbb{C}^e$

$$(\mathbb{C}^{e_1}, \mathbb{C}^{e_2})_{\theta, \infty} = \mathbb{C}^{e_1(1-\theta) + e_2\theta}$$

gilt. Ist ϱ nicht ganzzahlig, so erhält man aus der Theorie der Einbettungssätze für Grenzexponenten [8, 14, 19]

$$W_p^{\varrho + \frac{n}{p}} \subseteq \mathbb{C}^e = C^e.$$

Daraus folgt aber, daß

$$W_p^\mu \subseteq \mathbb{C}^e \quad \text{mit} \quad \mu = \frac{n}{p} + \varrho$$

ausnahmslos richtig ist. Somit ist

$$I \in G_\gamma(W_p^\mu, C) \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{\mu}{n} - \frac{1}{p}$$

und

$$I \in G_0(W_p^\mu, \mathbb{C}^e) \quad \text{mit} \quad \mu = \varrho + \frac{n}{p}.$$

Da $\varrho > \tau$ ist und nach Formel (27) in Verbindung mit dem Stabilitätssatz der Interpolationstheorie C^r zu $J(\tau/\varrho, C, \mathbb{C}^e)$ gehört, erhält man aus Satz 7

$$I \in G_\beta(W_p^\mu, C^r) \quad \text{mit} \quad \beta = \left(1 - \frac{\tau}{\varrho}\right) \gamma = \frac{\mu - \tau}{n} - \frac{1}{p}.$$

Die in den beiden letzten Abschnitten angegebenen Beispiele kann man wesentlich verallgemeinern, wenn man weiterreichende Interpolationssätze für die verwendeten Raumtypen benutzt [5, 6, 17].

Literaturverzeichnis

- [1] O. V. Besov, *Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения*, Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова 60 (1961), S. 42-81.
- [2] — и В. П. Ильин, *Естественное расширение класса областей в теоремах вложения*, Мат. сборник 75 (117), 4 (1968), S. 483-495.

- [3] М. Ш. Бирман и М. З. Соломян, *О приближении функций классов W_p^r кусочно-полиномиальными функциями*, ДАН СССР 171, 5 (1966), S. 1015-1018.
- [4] — *Кусочно-полиномиальные приближения функций классов W_p^r* , Мат. сборник 73 (115), 3 (1967), S. 331-335.
- [5] A. P. Calderón, *Intermediate spaces and interpolation*, Studia Mathematica, Seria specialna I (1963), S. 31-34.
- [6] — *Intermediate spaces and interpolation, the complex method*, ibidem 24 (1964), S. 113-190.
- [7] И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамоопределённых операторов*, Москва 1965.
- [8] В. П. Ильин, *Свойства некоторых классов дифференцируемых функций многих переменных, заданных в n -мерной области*, Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова 66 (1962), S. 227-362.
- [9] A. N. Kolmogoroff and W. M. Tichomirov, *ε -Entropie und ε -Kapazität von Mengen in Funktionalräumen*, Arbeiten zur Informationstheorie III, Berlin 1960 [Übersetzung aus dem Russischen].
- [10] J.-L. Lions et J. Peetre, *Sur une classe d'espaces d'interpolation*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 19 (1964), S. 5-68.
- [11] Э. Мадженес, *Интерполяционные пространства и уравнения в частных производных*, Усп. матем. наук 21 (1966), S. 169-218.
- [12] Б. С. Митягин, *Аппроксимативная размерность и базисы в ядерных пространствах*, ibidem 17 (1961), S. 63-132.
- [13] B. S. Mitiagin and A. Pełczyński, *Nuclear operators and approximative dimension*, Berichte d. internat. Mathematikerkongresses, Moscow 1968, S. 366-372.
- [14] L. Nirenberg, *On elliptic partial differential equations*, Ann. scuola norm. sup. Pisa 13 (1959), S. 115-162.
- [15] И. А. Новосельский, *О некоторых асимптотических характеристиках линейных операторов*, Изв. Акад. наук Молдавской ССР 6 (1964), S. 85-90.
- [16] J. Peetre, *Inledning till interpolation*, Kap. II und Kap. III. Vorlesungsausarbeitung, Lund 1966.
- [17] — *Besov-räumen*, Vorlesungsausarbeitung, Lund 1966.
- [18] — *ε -entropie, ε -capacité et espaces d'interpolation*, Ricerche Matem. 17 (1968), S. 216-220.
- [19] — *Espaces d'interpolation et théorème de Soboleff*, Ann. Inst. Fourier 16, 1 (1966), S. 279-317.
- [20] A. Pietsch, *Einige neue Klassen von kompakten linearen Abbildungen*, Rev. math. pures et appl. 8,3 (1963), S. 427-447.
- [21] — und H. Triebel, *Interpolationstheorie für Banachideale von beschränkten linearen Operatoren*, Studia Math. 31 (1968), S. 95-109.
- [22] S. L. Sobolev, *Einige Anwendungen der Funktionalanalysis auf Gleichungen der mathematischen Physik*, Berlin 1964.
- [23] М. З. Соломян и В. М. Тихомиров, *О геометрических характеристиках вложения классов W_p^r в C* , Изв. высших учебных заведений 10 (65) (1968), S. 76-82.
- [24] H. Triebel, *Über die Verteilung der Approximationszahlen kompakter Operatoren in Sobolev-Besov-Räumen*, Inventiones math. 4 (1967), S. 275-293.
- [25] — *Über die Verteilung der Approximationszahlen von Integraloperatoren in Sobolev-Besov-Räumen*, Journ. of Mathematics and Mechanics