References

[1] S. B. Chae, *Holomorphic germs on Banach spaces*, University of Rochester, thesis (1969).

[2] S. Dineen, *Holomorphy types on a Banach space*, University of Maryland, thesis (1969), Studia Math. 39(1971), to appear.

[3] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Memoirs of the American Mathematical Society 16 (1955), p. 1-140.

[4] C. P. Gupta, *Malgrange theorem for nuclearly entire functions of bounded type on a Banach space*, University of Rochester, thesis (1966). Reproduced in Notas de Matemática 37 (1968), p. 1-50, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro.

[5] L. Nachbin, *Topology on spaces of holomorphic mappings*, Ergebnisse der Mathematik und ihre Grenzgebiete 47 (1969), p. 1-66.

[6] — *Convolution operators in spaces of nuclearly entire functions on a Banach space*, Functional Analysis and Related Fields, edited by F. E. Browder, p. 167-171, Berlin 1970.

UNIVERSITY OF ROCHESTER
ROCHESTER, NEW YORK, USA

STUDIA MATHEMATICA, T. XXXVIII. (1970)
Colloquium on
Nuclear Spaces and Ideals in Operator Algebras

Approximation par des variétés algébriques dans les espaces hilbertiens

(Variation sur un thème de Vituškin)

par

M. ZERNER (Nice)

INTRODUCTION

Cet article applique les idées de Vituškin [24], [25] au cas des compacts dans les espaces de Hilbert. On trouve en particulier dans [25] la définition de la variation, dans [24] et [25] un résultat semblable au théorème 2, mais pour la norme du sup; enfin, dans [24] des applications à différents compacts dans des espaces $\mathscr{C}[K]$.

Par une méthode différente, Warren [26], [27] a obtenu des résultats de même nature en norme L^p (exposés aussi dans Lorentz [14]) et Lorentz [14] un résultat moins général mais plus précis que la proposition 5(1).

Voici la nature du problème étudié. Soit K un sous-ensemble d'un espace normé E, soit W une variété unicursale de dimension k et de degré p, i.e. l'image de $\boldsymbol{R}^k$ par une application P/Q où P et Q sont des polynômes de degré p à coefficients dans E et $\boldsymbol{R}$ respectivement, soit enfin $\varepsilon > 0$.

Supposons que W approche K à ε près, i.e. $\forall x \in K\ d(x, W) \leqslant \varepsilon$. Cette situation n'est possible, K et ε étant donnés, que si k et p sont assez grands (par exemple si $p=1$ la $(k+1)$-ème épaisseur de K, cf infra, devra être inférieure à ε). Il s'agit de démontrer des inégalités qui traduisent ce fait.

Exemple. $E = \boldsymbol{R}^2$, norme euclidienne ou norme du sup, $K = [0,1]\times\times[0,1]$, $k=1$. Il suffit alors que $p \geqslant 1/\varepsilon$: on pose $P_1(t) = t$, P_2 est le polynôme de degré p qui vaut $(-1)^j$ au point εj $(0 \leqslant j \leqslant p)$. J'ignore si ce résultat est optimal, mais on démontre qu'il existe $C > 0$ tel que $p \geqslant C/\varepsilon$. C'est un cas particulier des résultats de Vituškin, Lorentz et

(1) Insistons sur le fait que ni l'article de Lorentz, ni ceux de Warren, ni le présent ne retrouvent complètement les résultats de Vituškin comme cas particulier contrairement à ce qu'un examen superficiel peut laisser croire.

des miens et à ma connaissance, il n'y a pas de simplification essentielle, même dans ce cas qui a l'air très simple.

Voici la stratégie de la démonstration, du moins pour les espaces de dimension finie (euclidiens ici, $\boldsymbol{R}^m$ muni de la norme du sup chez Vituškin). A un fermé F et une boule ouverte dans E, on fait correspondre un nombre réel positif $V(F, B)$ appelé *variation* de F dans B, avec les trois propriétés suivantes:

(a) Si $\{B_j\}$ est une famille de boules deux à deux disjointes et contenues dans une boule B, on a

$$V(F, B) \geqslant \sum_j V(F, B_j).$$

(b) Si W est une unicursale de dimension k et de degré p et B une boule de rayon au plus 1:

$$V(W, B) \leqslant C_0(2p)^k$$

(C_0 est une „constante absolue").

(c) Si F est une variété (différentiable ou algébrique) de dimension $\leqslant l$ à laquelle appartienne le centre d'une boule B de rayon $\varrho \leqslant 1$, on a

$$V(F, B) \geqslant \frac{(C\varrho)^l}{l!}\sqrt{\frac{(m-l)!}{m!}}$$

(m est la dimension de l'espace et C encore une „constante absolue" cette inégalité est vraie dans le cas euclidien, une inégalité analogue a lieu quand on travaille avec la norme du sup; comme le lecteur pourra s'en assurer, la démonstration de cette inégalité est la principale difficulté de l'affaire).

Supposons maintenant que dans K il existe N points $y_1, \ldots, y_N$ deux à deux distants d'au moins 4ε (en d'autres termes la 4ε-capacité de K est $\geqslant \log N$, cf. infra). Alors pour tout j compris entre 1 et N il existe $x_j \in W$ avec $\|x_j - y_j\| \leqslant \varepsilon$. Soit B_j la boule de rayon ε et de centre x_j. Ces boules sont deux à deux disjointes. Si une boule B les contient toutes, la combinaison des propriétés (a) et (c) nous donnera

$$V(W, B) \geqslant N\frac{(C\varepsilon)^k}{k!}\sqrt{\frac{(m-k)!}{m!}}$$

ce qui combiné avec (b) conduit à

$$p^k k!\sqrt{\frac{m!}{(m-k)!}} \geqslant \frac{N}{C_0}(C_1\varepsilon)^k.$$

Nous donnerons des démonstrations qu'on pourrait trouver dans les livres de Vituškin s'il était plus commode de les consulter (l'un n'est pas traduit et l'autre l'est de façon exécrable).

I. DÉFINITION DE LA VARIATION

NOTATIONS ET CONVENTIONS 1. $\mathscr{E}_m$ espace euclidien (affine réel) de dimension m; $\mathscr{A}_{k,m}$ l'ensemble de ses sous-espaces affines de dimension k, $\mathscr{A}_{m-1,m}$ sera souvent noté $\mathscr{H}_m$ pour abréger.

$\mu_{k,m}$ sera la measure sur $\mathscr{A}_{k,m}$ invariante par les déplacements (transformations orthogonales et translations). On sait qu'une telle mesure existe et est unique à un coefficient près (Weil [28], Bourbaki [2]).

Il nous suffira de normaliser $\mu_{m-1,m}$ que nous noterons aussi μ_m en donnant la mesure 1 à l'ensemble des hyperplans qui rencontrent une boule unité.

L'ensemble des hyperplans qui passent par un point donné étant de mesure nulle, nous paramètrons presque tout $\mathscr{H}_m$ de la façon suivante: nous choisissons une origine 0 dans $\mathscr{E}_m$ et appelons X la sphère unité de centre 0, pour $r \in \boldsymbol{R}^+$, $\xi \in X$, $H(r, \xi)$ est l'hyperplan d'équation

$$(x|\xi) = r.$$

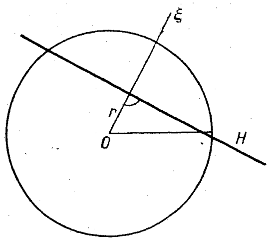

Fig. 1

Autre caractérisation: $r\xi$ est la projection orthogonale de 0 sur H. Si ν désigne la measure invariante de masse totale 1 sur X, il vient

$$d\mu_m(r, \xi) = dr d\nu(\xi)$$

(les puristes mettent $\otimes$).

Il nous arrivera de faire l'abus de langage et de notation qui consiste à confondre F et $F \cap B$ où F est un fermé et B une boule ouverte dans $\mathscr{E}_m$.

C'est malheureux à dire, mais avant d'entrer dans le vif du sujet, nous avons besoin du résultat suivant dont je ne sais pas simplifier la démonstration (due bien entendu à Vituškin l.c.).

LEMME 1. *Soient B une boule ouverte et F un sous-ensemble fermé de $\mathscr{E}_m$. La fonction φ qui à $a \in \mathscr{A}_{k,m}$ fait correspondre le nombre de composantes connexes compactes de $F \cap B \cap a$ est mesurable.*

Démonstration.

1-ère etape. F est une réunion finie de boules fermées.

Soient $S_1, \ldots, S_N$ les frontières de ces boules et S celle de B. Tout $a \in \mathscr{A}_{k,m}$ vérifie l'une au moins des propriétés suivantes:

(i) φ est constante sur un voisinage de a;

(ii) a est tangent à l'une au moins des sphères $S, S_1, \ldots, S_N$;

(iii) deux des sphères $a \cap S, a \cap S_1, \ldots, a \cap S_N$ sont tangentes entre elles dans a, ce qui implique que la variété affine tangente à l'intersection des deux sphères correspondantes dans $\mathscr{E}_m$ coupe a selon une variété de dimension $k-1$ au moins.

Les propriétés (ii) et (iii) définissent des sous-ensembles analytiques stricts de $\mathscr{A}_{k,m}$, donc de mesure nulle et φ est p.p. continue puisque localement constante.

2-ème etape. Construction d'ensembles approchant F.

Soit D un sous-ensemble dénombrable dense de F. Appelons $\mathscr{B}_\varepsilon$ l'ensemble des boules ouvertes dont les centres appartiennent à D et les rayons sont rationnels et $\leqslant \varepsilon$. Appelons Σ_ε l'ensemble des recouvrements finis de $B \cap F$ extraits de $\mathscr{B}_\varepsilon$. Pour tout $\varepsilon > 0$, c'est un ensemble dénombrable, il sera commode d'en numéroter les éléments et nous appellerons $F_{\varepsilon,j}$ l'adhérence de la réunion des boules qui constituent le j-ème élément de Σ_ε. Enfin, $\varphi_{\varepsilon,j}$ désignera la fonction $\mathscr{A}_{k,m} \to \boldsymbol{R}$ associée à $F_{\varepsilon,j}$ comme φ à F.

Nous savons que $\varphi_{\varepsilon,j}$ est mesurable et le reste de la démonstration consistera à établir la relation

$$\varphi(a) = \lim_{\varepsilon\to 0} \inf_j \varphi_{\varepsilon,j}(a).$$

3-ème etape. $\varphi(a) \leqslant \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \inf\limits_j \varphi_{\varepsilon,j}(a)$.

Soit C une c.c.c. (composante connexe compacte) de $F \cap B \cap a$. Soit $\delta > 0$ la distance de C à son complémentaire dans $CB \cup (F \cap a)$. On peut trouver δ' vérifiant

$$0 < \delta' < \delta/4$$

et pour tout $x \in F$ tel que $\delta/4 \leqslant d(x, C) \leqslant \delta/2$ on a aussi $d(x, a) > \delta'$.

Si alors on prend $\varepsilon \leqslant \delta'$, la composante connexe qui contient C dans $F_{\varepsilon,j} \cap a$ est compacte dans B et ne rencontre aucune autre c.c.c. de $F \cap B \cap a$.

Il en résulte que si $\varphi(a)$ est fini on a $\varphi(a) \leqslant \varphi_{\varepsilon,j}(a)$ pour ε assez petit et si $\varphi(a)$ est infini, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \inf\limits_j \varphi_{\varepsilon,j}(a)$ est infini aussi.

4-ème etape. Construction d'ensembles particuliers de Σ_ε.

La situationà éviter pour démontrer l'inégalité inverse de la précédente est résumée par la figure 2. Nous allons donc, $\varepsilon > 0$ étant donné, construire un élément de Σ_ε tel que si l'adhérence d'une de ses boules

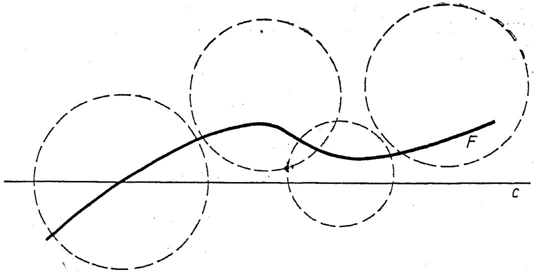

Fig. 2 ($\varphi(a) = 1$ et $\varphi_{\varepsilon,j}(a) = 2$)

rencontre a, alors elle rencontre aussi $F \cap B \cap a$. Pour celà nous commençons par recouvrir $F \cap B \cap a$ par des boules $B'_1, \ldots, B'_N$, qui rencontrent toutes $F \cap B \cap a$.

L'ensemble $F \cap \bar{B} \cap C(B'_1 \cup \ldots \cup B'_{N'})$ est compact et ne rencontre pas a. Il existe donc $\delta > 0$ tel que chacun de ses points est à une distance au moins δ de a. En recouvrant cet ensemble par des boules appartenant à $\mathscr{B}_\varepsilon$ et de rayon $\leqslant \delta$, on complète $\{B'_1, \ldots, B'_{N'}\}$ en un recouvrement appartenant à Σ_ε et ayant la propriété annoncée.

5-ème etape. $\forall \varepsilon$, $\varphi(a) \geqslant \inf\limits_j \varphi_{\varepsilon,j}(a)$. On prend $F_{\varepsilon,j}$ construit à l'étape précédente:

Alors toute c.c.c. de $F_{\varepsilon,j} \cap B \cap a$ possède un point de $F \cap B \cap a$ et contient donc une c.c.c. de $F \cap B \cap a$, d'où l'inégalité.

Remarque 1. En y regardant de plus près, on s'aperçoit qu'on a démontré que φ est borélienne.

Définition 1. Soient F un sous-ensemble fermé et B une boule ouverte de $\mathscr{E}_m$. Nous appellerons *variation de dimension* 0 de F dans B et noterons $V^0_m(F, B)$ (et $V^0_m(F)$ quand il n'y aura pas de confusion à craindre) le nombre de composantes connexes compactes de $F \cap B$. La *variation de dimension* l $(0 < l \leqslant m)$ sera définie par récurrence par

$$V^l_m(F; B) = \int_{\mathscr{H}_m} V^{l-1}_{m-1}(F \cap H)\, d\mu_m(H).$$

(Nous avons mis sous le signe $\int$, $V^{l-1}_{m-1}(F \cap H)$ pour $V^{l-1}_{m-1}(F \cap H; B \cap H)$.)

Avant d'aller plus loin, notons que la propriété (a) de l'introduction résulte directement de cette définition:

Lemme 2. *Soient F un ensemble fermé, B une boule ouverte, $\{B_j\}$ un ensemble de boules ouvertes deux à deux disjointes contenues dans B. On a pour tout l:*

$$V^l_m(F; B) \geqslant \sum_j V^l_m(F; B_j).$$

NOTATIONS 2. $I_m = \int_0^{\pi/2} \sin^m\theta\, d\theta.$

Rappelons les formules:

$$I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}, \tag{1}$$

$$I_{m-1}\cdot I_m = \frac{\pi}{2m}, \tag{2}$$

$$I_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}, \tag{3_1}$$

$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\,\frac{\pi}{2}, \tag{3_2}$$

$$I_m \sim \sqrt{\frac{\pi}{2m}} \quad (m\to\infty). \tag{4}$$

Exemple 1. Les variations de B dans elle-même sont nulles en dimension autre que m et $V_m^m(B) = a_m R^m$ avec

$$a_m = I_m a_{m-1} = \prod_{j=1}^{m} I_j, \tag{5}$$

d'où

$$(6_0)\quad a_{2n} = \frac{\pi^n}{2^{2n} n!}, \qquad (6_1)\quad a_{2n+1} = \frac{\pi^n n!}{(2n+1)!}.$$

Exemple 2. Supposons que F soit une sous-variété différentiable de dimension l. Alors $V_m^l(F; B)$ est le volume de $F\cap B$ pour la structure riemannienne induite à un coefficient près. Pour $l=1$, ce coefficient est la mesure de l'ensemble des hyperplans qui coupent un intervalle de longueur 1, soit:

$$\frac{1}{2I_{m-2}} \int_0^{\pi/2} \cos\xi \sin^{m-2}\xi\, d\xi = \frac{1}{2mI_m}.$$

Le cas d'une variété est au demeurant très classique (Favard [5], Vituškin [25] et Leontovič et Mel'nikov [13]).

Définition 2. Nous appellerons *dimension variationnelle* l de F (dans B) le plus grand nombre l tel que $V_m^l(F; B) \neq 0$.

Exemple 3. Supposons que $F \subset \mathscr{E}_2$ soit de dimension variationnelle 1 et que le centre 0 d'une boule ouverte B de rayon R appartienne à F. Alors de deux choses l'une:

ou bien la composante connexe de 0 dans $F\cap B$ est compacte et $V_2^0(F) \geqslant 1$,

ou bien il existe un point x_0 de la frontière de B adhérent à F et tel que toute droite a qui coupe $[0, x_0]$ coupe aussi $F\cap B$.

Pour presque toutes ces droites l'intersection a une c.c.c. sans quoi elle contiendrait un intervalle non trivial et on aurait $V_2^2(F)\neq 0$ (définition et exemple précédent). Conclusion:

$$V_2^1(F) \geqslant R/\pi.$$

Cet exemple contient en germe la démonstration de la propriété (c) de l'introduction dont il donne un cas particulier.

Remarque 2. La dimension variationnelle est au plus égale à la dimension de Hausdorff.

Définition 3. Nous appellerons *variation totale* la somme des variations des différentes dimensions:

$$V_m = \sum_{l=0}^{m} V_m^l.$$

II. LE CAS DES VARIÉTÉS UNICURSALES

Définition 4. Soit E un espace vectoriel (sur les réels). Nous appellerons *variété unicursale de dimension k et de degré p* (au plus) l'adhérence de l'image de $\boldsymbol{R}^k$ par une application de la forme P/Q où P est un polynôme à coefficients dans E et Q un polynôme scalaire l'un et l'autre de degré p au plus (²).

Pour majorer la variation des variétés unicursales, nous utiliserons un théorème de Milnor [16] précisant, sous la forme actuellement la plus commode, des résultats antérieurs d'Olejnik [19], [20], [21] (cf aussi Thom [22] et Vituškin [24]).

THÉORÈME 1. *Soit*

$$W = \{x;\, x\in \boldsymbol{R}^k,\ f_j(x) = 0,\ j = 1,\dots,n\}$$

où les f_j sont des polynômes de degré $\leqslant p$. La somme des nombres de Betti de W (et a fortiori le nombre de ses composantes connexes) est majorée par $p(2p-1)^{k-1}$.

COROLLAIRE. *La trace sur une sous-variété affine d'une variété unicursale de dimension k et de degré p a au plus $p(2p-1)^{k-1}$ composantes connexes compactes.*

Démonstration. Soient W la variété unicursale, A la sous-variété affine. W est contenue dans un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et nous ne perdons pas de généralité en supposant E lui-même de dimension finie. Un choix judicieux de coordonnées affines permet alors d'écrire

$$A = \{x;\, x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0\},$$

(²) On se méfiera du fait que pour $k>1$, le degré au sens usuel peut être strictement plus grand que p!

de sorte que $W \cap A$ est l'image par P/Q de

$$W_0 = \{t;\, P_1(t) = P_2(t) = \ldots = P_n(t) = 0\}$$

qui a, d'après le théorème, au plus $p(2p-1)^{k-1}$ composantes connexes. Son adhérence $\overline{W}_0$ dans l'espace projectif obtenu en munissant $\boldsymbol{R}^k$ d'un hyperplan à l'infini n'en a pas davantage. Or, chaque c.c.c. de $W \cap A$ est l'image d'une ou plusieurs composantes connexes de $\overline{W}_0$.

Remarque 3. On a été obligé de passer par les projectifs pour que P/Q devienne continue.

PROPOSITION 1. *Plongeons $\mathcal{E}_m$ dans $\mathcal{E}_{m'}$ $(m' \geqslant m)$. Soit W la trace sur $\mathcal{E}_m$ d'une variété unicursale de dimension k et de degré p dans $\mathcal{E}_{m'}$. On a dans toute boule ouverte de $\mathcal{E}_m$ de rayon au plus égal à* 1:

$$V(W) \leqslant e^{\pi/4} 2p(2p-1)^{k-1}.$$

Démonstration. Nous avons, d'après le corollaire du théorème 1,

$$V_m^0(W) \leqslant p(2p-1)^{k-1}.$$

Démontrons par récurrence que dans une boule de rayon R

$$V_m^l(W) \leqslant p(2p-1)^{k-1} R^l \prod_{j=1}^{l} I_j.$$

Nous avons

$$V_m^l(W) = \int_{\mathscr{H}_m} V_{m-1}^{l-1}(W \cap B_R \cap \alpha)\, d\mu_m(\alpha)$$

$$= \int_0^{\pi/2} d(R\sin\theta) \int_X d\nu(\tau) V_{m-1}^{l-1}\big(W, H(R\sin\xi, \tau)\big)$$

et d'après l'hypothèse de récurrence, compte tenu de ce que le rayon de $B_R \cap H(R\sin\xi, \tau)$ est $R\cos\xi$

$$V_m^l(W) \leqslant p(2p-1)^{k-1} R^l \prod_{j=1}^{l-1} I_j \int_0^{\pi/2} \cos^l\theta\, d\theta = p(2p-1)^{k-1} R^l \prod_{j=1}^{l} I_j.$$

D'où, pour $R \leqslant 1$,

$$V_m(W) \leqslant p(2p-1)^{k-1}\Big\{1 + \sum_{l=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{l} I_j\Big\}.$$

Compte tenu des relations (5) et (6) on a

$$\prod_{j=1}^{2n+1} I_j \leqslant \prod_{j=1}^{2n} I_j = \frac{\pi^n}{2^{2n} n!},$$

$$V_m(W) \leqslant p(2p-1)^{k-1} 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^n,$$

qui est l'inégalité annoncée.

Remarque 4. Le remplacement de $1 + \sum_{l=1}^{\infty} \prod_{n=1}^{l} I_n$ par $2e^{\pi/4}$ représente une perte sèche d'environ $10\,^0/_0$.

Remarque 5. J'ignore si la généralisation-complication introduite au début de l'énoncé peut servir à quoi que ce soit, mais on voit qu'elle est impliquée par la méthode de démonstration.

III. L'INÉGALITÉ PRINCIPALE

LEMME 3. *Soient $a > 0$, X un espace métrique, K un sous-ensemble connexe de $X \times [0, a]$.*

Posons

$$K_t = \{x;\, x \in X,\, (x, t) \in K\},$$

$$S_t = \{y;\, y \in X,\, \exists x \in K_t\;\; d(x, y) = t\}.$$

Supposons que K_0 et K_a ne soient pas vides. Alors

$$\bigcup_{t \in [0,a]} S_t \supset \{x;\, \exists y \in K_a\;\; d(x, y) \leqslant a\} = A.$$

Démonstration. Soit $y \in X$. L'application $(x, t) \xrightarrow{\varphi} d(x, y) - t$ étant continue de $X \times [0, a]$ dans $\boldsymbol{R}$, l'image de K est un intervalle.

On a $\forall x \in K_0$, $\varphi(x, 0) \geqslant 0$. D'autre part, si $y \in A$, il existe $x \in K_a$ tel que $\varphi(x, a) \leqslant 0$. Donc φ s'annule en au moins un point $(x, t) \in K$, c'est-à-dire $d(x, y) = t$ d'où $y \in S_t$.

LEMME 4. $I_{m-2} \leqslant \pi/\sqrt{2m}$.

Démonstration. Le lemme est vrai pour $m = 2$ et $m = 3$; nous le démontrerons par récurrence:

$$I_{m-2}\sqrt{m} = \frac{(m-3)\sqrt{m}}{m-2} I_{m-4} \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{(m-3)\sqrt{m}}{(m-2)^{3/2}}.$$

Soit

$$\sqrt{m}\, I_{m-2} \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{2}}(1 - X)\sqrt{1 + 2X} \qquad \text{avec } X = \frac{1}{m-2}.$$

Or la function $U(X) = (1 - X)\sqrt{1 + 2X}$ est décroissante pour $X \geqslant 0$ (prendre la dérivée logarithmique!) et $U(0) = 1$.

Définition 5. Soient A, B deux sous-ensembles d'un espace métrique. Nous appellerons *profondeur* de A dans B le nombre

$$\sup_{x \in A} d(x, CB).$$

THÉORÈME 2. *Soit F un sous-ensemble fermé de $\mathcal{E}_m$ ayant une profondeur $\varrho > 0$ et la dimension variationnelle l dans une boule B de rayon au plus* *égal à* 1. *On a*

$$V_m(F, B) \geqslant \frac{\varrho^l}{l!(\sqrt{2\pi})^l \sqrt{m(m-1)\dots(m-l+1)}}.$$

Démonstration. Comme le bon saucisson, elle s'apprécie mieux quand on la coupe en tranches bien minces.

(a) D'après le lemme 2 (avec une seule boule B_j!) nous pouvons supposer que le centre 0 de B appartient à F et que le rayon de B est ϱ. Par homogénéité, nous pouvons aussi supposer que $\varrho = 1$. Nous prendrons 0 comme origine.

(b) Si la composante connexe de 0 dans $F \cap B$ est compacte, on a $V_m \geqslant V_m^0 \geqslant 1$ et le théorème est vérifié.

Nous supposerons désormais que cette composante n'est pas compacte.

(c) Nous raisonnerons par récurrence. Si $m = 1$, l'un des intervalles $[-1, 0]$, $[0, 1]$ est contenu dans F, on a donc $V_1 \geqslant \frac{1}{2}$ et le théorème est vérifié pour $m = 1$.

Nous supposerons désormais $m > 1$ et que le théorème est vrai pour les dimensions de l'espace ambiant strictement inférieures à m.

(d) Nous appellerons $T_\varrho(\theta)$ l'ensemble des $\xi \in X$ tels que dans l'hyperplan $H(\sin\theta, \xi)$, la profondeur de $F \cap H(\sin\theta, \xi)$ dans $B \cap H(\sin\theta, \xi)$ soit au moins égale à ϱ.

Supposons que le point $x = s\sigma$ $(\sigma \in X)$ appartienne à $H(\sin\theta, \xi)$, c'est-à-dire que $s(\sigma|\xi) = \sin\theta$ ou, en désignant par ω la distance riemannienne de σ à ξ dans X (en d'autres termes l'angle géométrique des deux vecteurs), $s\cos\omega = \sin\theta$.

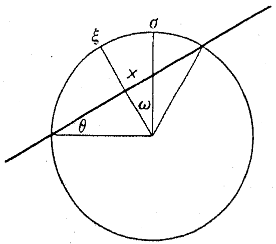

Fig. 3

Avec ces notations, la distance de x à la frontière de $H(\sin\theta, \xi) \cap B$ dans $H(\sin\theta, \xi)$ est $\cos\theta - s\sin\omega$ soit encore

$$\frac{\cos(\theta+\omega)}{\cos\omega}.$$

Supposons maintenant que x appartienne aussi à F. Alors ξ appartiendra à $T_\varrho(\theta)$ pourvu que

$$\varrho \leqslant \frac{\cos(\theta+\omega)}{\cos\omega}$$

(le second membre décroit de $\cos\theta$ à 0 quand ω croît de 0 à $\frac{1}{2}\pi - \theta$).

Conclusion. *$T_\varrho(\theta)$ contient la sphère de centre σ et de rayon $\omega(\varrho, \theta)$ donné par*:

$$\varrho = \frac{\cos[\theta + \omega(\varrho, \theta)]}{\cos\omega(\varrho, \theta)}.$$

(Il s'agit de la sphère au sens de la structure riemannienne de X.)

(e) Appelons $A(\varrho, \theta)$ la mesure de $T_\varrho(\theta)$.

L'objet des trois points suivants est de minorer $A(\varrho, \theta)$ (en utilisant le lemme 3).

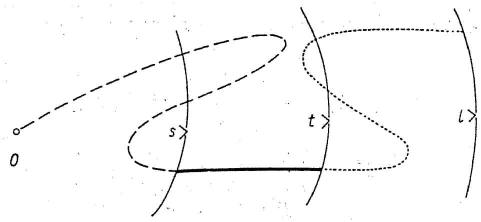

Fig. 4

—— $K(s, t)$, – – – reste de $C^{(t)}$, ········ partie de F qui n'est pas dans $C^{(t)}$

(f) B_t désignera la boule de rayon t, $C^{(t)}$ la composante connexe de 0 dans $F \cap \bar{B}_t$. Comme la composante connexe de 0 dans $F \cap B$ n'est pas compacte, il existe dans $C^{(t)}$ un point x_t de norme t (pourvu que $t < 1$).

Pour tout s avec $0 < s \leqslant t < 1$, appelons $K^{(s,t)}$ la composante connexe de x_t dans $F \cap \bar{B}_t \cap (\complement B_s)$.

Nous allons démontrer que pour tout $r \in [s, t]$, $K^{(s,t)}$ possède un point de norme r.

L'image de $K^{(s,t)}$ par l'application $x \mapsto \|x\|$ est un intervalle $[s', t]$ $(s' \in [s, t])$ et il s'agit de démontrer que $s' = s$.

Supposons le contraire. Il existe alors un ouvert $\Omega \subset \complement\bar{B}_s$ tel que $K^{(s,t)} = \Omega \cap F \cap \bar{B}_t \cap (\complement B_s)$; mais alors on a aussi $K^{(s,t)} = \Omega \cap C^{(t)}$, en contradiction avec le fait que $C^{(t)}$ est connexe.

(g) Posons $t(\varrho, \theta) = \sin\theta / \cos\omega(\varrho, \theta)$ et appelons $\tilde{K}(\theta, \varrho)$ l'image de $K^{(\sin\theta, t(\varrho,\theta))}$ par l'application

$$x \mapsto \left(\frac{x}{\|x\|}, \operatorname{Arc}\cos\frac{\sin\theta}{\|x\|}\right).$$

$\tilde{K}(\theta, \varrho)$ est connexe dans $X \times [0, \omega(\varrho, \theta)]$. Pour tout $r \in [0, \omega(\varrho, \theta)]$, il existe d'après ce qui précède, $(\xi, r) \in \tilde{K}(\theta, \varrho)$.

Démontrons maintenant que si $(\xi, \omega) \in \tilde{K}(\theta, \varrho)$, alors $T_\varrho(\theta)$ contient la sphère de X de centre ξ et de rayon ω. Par hypothèse

$$\frac{\sin\theta}{\cos\omega}\,\xi \in F.$$

Si donc nous posons

$$\varrho' = \frac{\cos(\theta+\omega)}{\cos\omega},$$

nous savons, d'après (d), que cette sphère est contenue dans $T_{\varrho'}(\theta)$. Mais comme $\omega \leqslant \omega(\varrho, \theta)$, on a $\varrho' \geqslant \varrho$ et $T_{\varrho'}(\theta) \subset T_\varrho(\theta)$ d'où la conclusion annoncée.

(h) Le lemme 3 nous permet maintenant d'affirmer que $T_\varrho(\theta)$ contient une boule (au sens de la métrique riemannienne de X) de rayon $\omega(\varrho, \theta)$. On en déduit:

$$A(\varrho, \theta) \geqslant \frac{1}{2I_{m-2}} \int_0^{\omega(\varrho,\theta)} \sin^{m-2}\eta\, d\eta.$$

(i) On ne peut pas avoir $l = 0$. Car, par l'hypothèse de récurrence, si a est un hyperplan tel que $F \cap B \cap a \neq \emptyset$, alors la variation de $F \cap a$ dans $B \cap a$ est non nulle, et, d'après ce qui précède, l'ensemble de ces hyperplans est de mesure non nulle.

(j) Par contre, l'ensemble des hyperplans a tels que $F \cap a$ soit de dimension variationnelle au moins l dans $B \cap a$ est de mesure nulle (sinon la dimension variationnelle de F serait strictement plus grande que l).

Il vient donc d'après l'hypothèse de récurrence

$$V_m(F) = V_m^0(F) + \int_{\mathscr{H}_m} V_{m-1}(F \cap a)\, d\mu_m(a) \geqslant c_{m-1,l-1} \int_{\mathscr{H}_m} [\overline{\omega}(a)]^{l-1} d\mu_m(a),$$

où $\overline{\omega}(a)$ désigne la profondeur de $F \cap a$ dans $B \cap a$ et

$$c_{m,l} = \frac{1}{l!\,(\sqrt{2}\,\pi)^l \sqrt{m(m-1)\dots(m-l+1)}}.$$

(k) Il faut maintenant traiter séparément le cas $l = 1$. Soit x un point de X adhérent à la composante connexe de 0 dans $F \cap B$. Soit a un hyperplan qui coupe l'intérieur du segment $[0, x]$. Cet hyperplan coupe aussi $F \cap B$, et comme $F \cap a$ est de dimension variationnelle nulle mais de variation non nulle dans $a \cap B$, il a une c.c.c. au moins:

$$V_{m-1}(F \cap a) \geqslant 1.$$

D'où (cf exemple 2)

$$V_m(F) \geqslant \frac{1}{2mI_m} = \frac{1}{2(m-1)I_{m-2}}$$

et, d'après le lemme 4,

$$V_m(F) \geqslant \frac{1}{\pi\sqrt{2}\sqrt{m}},$$

qui est l'inégalité annoncée dans ce cas.

(l) Nous supposons donc $l \geqslant 2$ et nous allons minorer l'intégrale

$$J(F) = \int_{\mathscr{H}_m} [\overline{\omega}(a)]^{l-1} d\mu_m(a) = -\int_0^{\pi/2} d(\sin\theta) \int_{\varrho=0}^{\cos\theta} \varrho^{l-1}\, dA(\varrho, \theta)$$

($\cos\theta$ étant le rayon de $a \cap B$, $\overline{\omega}(a)$ ne peut dépasser cette valeur). Intégrons par parties l'intégrale interne:

$$J(F) = \int_0^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta \int_0^{\cos\theta} A(\varrho, \theta)\, d(\varrho^{l-1})$$

$$\geqslant \frac{1}{2I_{m-2}} \int_0^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta \int_0^{\cos\theta} d(\varrho^{l-1}) \int_0^{\omega(\varrho,\theta)} \sin^{m-2}\eta\, d\eta$$

(c'est là que nous utilisons le point (h)).

Echangeons les deux intégrations internes en tenant compte de la définition de $\omega(\varrho, \theta)$ (fin du point (f)):

$$J(F) \geqslant \frac{1}{2I_{m-2}} \int_0^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta \int_0^{\pi/2-\theta} \sin^{m-2}\eta\, d\eta \int_0^{\cos(\theta+\eta)/\cos\eta} d(\varrho^{l-1})$$

$$= \frac{1}{2I_{m-2}} \int_0^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta \int_0^{\pi/2-\theta} d\eta\, \frac{\cos^{l-1}(\theta+\eta)\sin^{m-2}\eta}{\cos^{l-1}\eta}$$

$$= \frac{1}{2I_{m-2}} \int_0^{\pi/2} d\eta\, \frac{\sin^{m-2}\eta}{\cos^{l-1}\eta} \int_0^{\pi/2-\eta} d\theta \cos^{l-1}(\theta+\eta)\cos\theta$$

$$= \frac{1}{2I_{m-2}} \int_0^{\pi/2} d\eta\, \frac{\sin^{m-2}\eta}{\cos^{l-1}\eta} \int_\eta^{\pi/2} d\zeta \cos^{l-1}\zeta \cos(\zeta-\eta)$$

$$= \frac{1}{2I_{m-2}} \int_0^{\pi/2} d\eta\, \frac{\sin^{m-2}\eta}{\cos^{l-1}\eta} \int_\eta^{\pi/2} d\zeta (\cos^l\zeta\cos\eta + \cos^{l-1}\zeta\sin\zeta\sin\eta)$$

$$\geqslant \frac{1}{2I_{m-2}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\eta \sin^{m-1}\eta}{\cos^{l-1}\eta} \int_\eta^{\pi/2} d\zeta \cos^{l-1}\zeta\sin\zeta = \frac{1}{2lI_{m-2}m} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi l\sqrt{m}}.$$

On a utilisé le lemme 4 dans la dernière inégalité qui permet de finir aisément la démonstration.

Remarque 6. On peut améliorer légèrement l'inégalité en jouant sur la parité de m.

Définition 6 (Kolmogorov [8]). Soit X un espace métrique. On appelle $N_\varepsilon(X)$ le nombre maximum de points deux à deux distants de plus de ε qu'on peut trouver dans X. L'*ε-capacité* de X, notée $C_\varepsilon(X)$ en est le logarithme.

Définition 7. Soient A, B deux ensembles d'un espace métrique. Nous dirons que B *approche* A *à* ε *près* si

$$\forall x \in A, \quad d(x, B) \leqslant \varepsilon.$$

Corollaire. *Soient* $\varepsilon \in]0, 1[$, A *un sous-ensemble de* $\mathscr{E}_m$, F *un fermé de dimension variationnelle* $\leqslant l$ *qui approche* A *à* ε *près. On a*

$$\log V_m(F) \geqslant C_{4\varepsilon}(A) - l \log \frac{\pi\sqrt{2}}{\varepsilon} - \sum_{k=1}^{l} \log(k\sqrt{m-k+1})$$

dans toute boule B *de rayon* R *telle que la boule concentrique de rayon* $R-2\varepsilon$ *contienne* A.

Démonstration. Soient $x_1, \ldots, x_{N_{4\varepsilon}} \in A$ avec $\|x_j - x_k\| > 4\varepsilon$ $(j \neq k)$. Soit, pour chaque j, $y_j \in F$ tel que $\|x_j - y_j\| \leqslant \varepsilon$. On a, pour $j \neq k$, $\|y_j - y_k\| > 2\varepsilon$. Le théorème appliqué à la boule B_j de centre y_j et de rayon ε donne

$$\log V_m(F, B_j) \geqslant -l \log \frac{\pi\sqrt{2}}{\varepsilon} - \sum_{k=1}^{l} \log(k\sqrt{m-k+1}).$$

Le lemme 2 permet de passer de là à l'inégalité annoncée.

IV. APPROXIMATION UNICURSALE

Proposition 2. *Soient* $K \subset \mathscr{E}_m$ *et* W *une unicursale de degré* p *et de dimension* l *qui approche* K *à* ε *près. Supposons* K *contenu dans une boule de rayon* $1-2\varepsilon$. *On a*

$$C_{4\varepsilon}(K) \leqslant \frac{\pi}{4} + l \log\left(\frac{2\pi\sqrt{2}\,lp}{\varepsilon}\right) + \frac{l}{2} \log m.$$

Démonstration. D'après la proposition 1,

$$\log V_m(W) \leqslant \frac{\pi}{4} + l \log(2p).$$

D'après le corollaire du théorème 2,

$$C_{4\varepsilon}(K) - l \log\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{\varepsilon}\right) - l \log l - l \log\sqrt{m} \leqslant \log V_m(W),$$

d'où le résultat.

Définition 8 (Kolmogorov [8]). Soit A un sous-ensemble d'un espace métrique X. On appelle $M_\varepsilon(A)$ le nombre minimum de boules de rayon ε, dans X, nécessaire pour recouvrir A. L'*ε-entropie* de A (dans X) en est le logarithme, elle est notée $H_\varepsilon(A)$ ($H_\varepsilon^X(A)$ quand on veut préciser).

Nous rappelons le résultat qui exprime la relation entre ε-entropie et ε-capacité en laissant la démonstration au lecteur.

Lemme 5. $C_{2\varepsilon}(A) \leqslant H_\varepsilon(A) \leqslant C_\varepsilon(A)$ (Kolmogorov l.c.).

Proposition 3 (cf. Vituškin [24], § 29). *Soient* E *un espace normé et* K *un sous-ensemble de* E *tel que*

$$M_\varepsilon(K) \leqslant \binom{p+l}{l} = \frac{(p+l)!}{p!\,l!}.$$

Il existe alors une unicursale de dimension l *et de degré* p *qui approche* K *à* ε *près.*

Démonstration. Soient $x_1, \ldots, x_M$ centres de boules de rayon ε dans E qui recouvrent K $(M = M_\varepsilon(K))$. Il existe un ensemble $T = (t_1, \ldots, t_R)$ dans $\boldsymbol{R}^l$ tel qu'il existe un polynôme de degré p et un seul qui prenne des valeurs données sur $T\left(R = \binom{p+l}{l}\right)$. Il existe donc un polynôme P de degré p à coefficients dans E tel que $P(t_j) = x_j$ $(j = 1, \ldots, M)$. L'image de $\boldsymbol{R}$ par P est une unicursale ayant les propriétés voulues.

Remarque 7. Appliquée à l'exemple cité dans l'introduction, la proposition donne un degré en C/ε^2 au lieu de $1/\varepsilon$. Je doute qu'on puisse trouver un résultat satisfaisant à ce niveau de généralité. Par contre, notons que pour cet exemple la proposition 2 donne bien une minoration en C/ε.

Définition 9 (Kolmogorov [9]). Soit K un sous-ensemble d'un espace normé E. On appelle $n^{\text{ème}}$ *épaisseur* (ou $n^{\text{ème}}$ *diamètre*) de K le nombre

$$d_n = d_n(K) = \inf_{L \in \mathscr{G}_n} \sup_{x \in K} \inf_{y \in L} \|x - y\|,$$

où $\mathscr{G}_n$ désigne l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension n de E.

Notations 3. On pose:

$$\mu(\varepsilon) = \mu_K(\varepsilon) = \inf\{n;\ d_n(K) \leqslant \varepsilon\},$$

$$f(x) \approx g(x) \text{ signifie: } f(x) = O\big(g(x)\big) \text{ et } g(x) = O\big(f(x)\big).$$

Exemple 4. Supposons que $d_n \approx n^{-a}$. (Celà arrive dans des cas usuels: Kolmogorov, l.c. Tihomirov [23], Lorentz [15], El Kolli [4]). Nous aurons alors

$$\mu(\varepsilon) \approx \varepsilon^{-1/a}.$$

Proposition 4. *Soient K un sous-ensemble d'un espace hilbertien, contenu dans une boule de rayon $1-2\varepsilon$, et W une unicursale de dimension l et de degré p qui approche K à ε près. On a*

$$C_{6\varepsilon}(K)-\frac{l}{2}\log\mu_K(\varepsilon)\leqslant\frac{\pi}{4}+l\log\left(\frac{2\pi\sqrt{2}\,lp}{\varepsilon}\right).$$

Démonstration. Soient $\varepsilon'>\varepsilon$, L un sous-espace vectoriel de dimension $\mu(\varepsilon)$ qui approche K à ε' près, $\overline{\omega}$ la projection orthogonale sur L. Considérons deux points x_j, x_k de K tels que $\|x_j-x_k\|>6\varepsilon$. On a, d'après le théorème de Pythagore,

$$\|\overline{\omega}x_j-\overline{\omega}x_k\|>2\sqrt{9\varepsilon^2-\varepsilon'^2}.$$

D'où, si de plus $\varepsilon'\leqslant 3\varepsilon/\sqrt{5}$,

$$C_{4\varepsilon'}(\overline{\omega}K)\geqslant C_{6\varepsilon}(K)$$

et $\overline{\omega}W$ est une unicursale de dimension l et de degré p qui approche $\overline{\omega}K$ à ε' près.

La proposition 2 donne alors l'inégalité annoncée, mais avec ε' au lieu de ε au second membre. Il reste à faire tendre ε' vers ε.

Exemple 5. Supposons que $d_n\approx n^{-a}$ et $C_\varepsilon\approx\varepsilon^{-1/a}$ (ce qui arrive aussi, voir, en plus des références de l'exemple 4, Kolmogorov et Tihomirov [11] et Clements [29]).

Il vient que

$$A\varepsilon^{-1/a}-\frac{l}{2a}\log\frac{1}{\varepsilon}\leqslant B+l\log\left(\frac{Clp}{\varepsilon}\right),$$

d'où, pour ε assez petit,

$$C_\varepsilon\leqslant B_0+l\log\left(\frac{C_0lp}{\varepsilon^{1+1/2a}}\right),$$

et enfin

$$A_0C_\varepsilon\leqslant l\log\left(\frac{C_0lp}{\varepsilon}\right).$$

La proposition 4 a un caractère désagréable: le premier membre de l'inégalité qui la constitue contient deux caractéristiques différentes de K. Nous donnerons donc une autre inégalité portant sur une autre caractéristique dont nous allons rappeler maintenant la définition (cf. Mitjagin et Pełczyński [18]).

Définition 10. On appellera *boule de dimension n* (et de rayon r) une boule (de rayon r) d'un sous-espace vectoriel de dimension n. On appellera *$n^{\text{ème}}$ grosseur* et on notera b_n ou $b_n(K)$ la borne supérieure des rayons des boules de dimension n contenus dans K.

Remarque 8. D'après un celèbre théorème de Krein et autres ([12], cité et démontré dans Lorentz [15], généralisé dans Douady [3]) on a $b_{n+1}\leqslant d_n$. D'autre part, d'après Henkin et Mitjagin [6], pour un convexe equilibré on a $d_n\leqslant(n+1)^2b_{n+1}$ et $d_n\leqslant(n+1)b_{n+1}$ dans les espaces de Hilbert.

Notation 4. Nous poserons:

$$\lambda(\varepsilon)=\lambda_K(\varepsilon)=\sup\{n;\ b_n(K)>\varepsilon\}.$$

Lemme 6. *Soient x, y vérifiant $y>x>0$, $y\geqslant 1$. Les solutions de l'équation en λ,*

$$\lambda-x\log\lambda=y, \tag{7}$$

sont majorées par $y\left(1+\dfrac{x}{y-x}\log y\right)$.

Démonstration. Posons

$$\varphi_x(\lambda)=\lambda-x\log\lambda.$$

φ_x est strictement croissante sur $[x,\infty]$ et

$$y\left(1+\frac{x}{y-x}\log y\right)>x.$$

Il s'agit donc de vérifier que

$$\varphi_x\left[y\left(1+\frac{x}{y-x}\log y\right)\right]$$

est supérieure à y:

$$\varphi\left[y\left(1+\frac{x}{y-x}\log y\right)\right]=y+\frac{xy}{y-x}\log y-x\log y-x\log\left(1+\frac{x}{y-x}\log y\right)$$

$$\geqslant y+\frac{xy}{y-x}\log y-x\log y-\frac{x^2}{y-x}\log y=y.$$

Corollaire. *Pour $y\geqslant 2x\geqslant 1$ les solutions de l'équation* (7) *son majorées par $y+2x\log y$.*

Lemme 7. *Pour la boule unité d'un espace normé de dimension m on a $C_\varepsilon\geqslant m\log 1/\varepsilon$.*

Démonstration. M_ε boules de rayon ε recouvrent la boule unité. Si a est la mesure de cette dernière, il en résulte que $aM_\varepsilon\varepsilon^m\geqslant a$.

On conclut en utilisant le lemme 5.

LEMME 8. *Soit K un sous-ensemble d'un espace de Hilbert contenu dans une boule de rayon $1-2\varepsilon$ et approché à ε près par une unicursale de dimension l et de degré p. On a, pour tout $t>0$,*

$$\lambda(t\varepsilon)\log\frac{t}{4}-\frac{l}{2}\log\lambda(t\varepsilon)\leqslant\frac{\pi}{4}+l\log\left(\frac{2\pi\sqrt{2}\,lp}{\varepsilon}\right).$$

Démonstration. On projette l'unicursale orthogonalement sur un sous-espace de dimension $\lambda(t\varepsilon)$ contenant une boule B de rayon $t\varepsilon$ dans K. On a, d'après la proposition 2,

$$C_{4\varepsilon}(B)\leqslant\frac{\pi}{4}+l\log\left(\frac{2\pi\sqrt{2}\,lp}{\varepsilon}\right)+\frac{l}{2}\log\lambda(t\varepsilon).$$

Mais, d'après le lemme 7, $C_{4\varepsilon}(B)\geqslant\lambda(t\varepsilon)\log t/4$, d'où l'inégalité annoncée.

PROPOSITION 5. *Soit K un sous-ensemble d'un espace de Hilbert, contenu dans une boule de rayon $1-2\varepsilon$ et approché à ε près par une unicursale de dimension l et de degré p. On a*

$$\lambda(4e\varepsilon)\leqslant\frac{\pi}{4}+3l\log\left(\frac{2\pi\sqrt{2}\,lp}{\varepsilon}\right).$$

Démonstration. On applique le lemme 8 avec $t=4e$:

$$\lambda(4e\varepsilon)-\frac{l}{2}\log\lambda(4e\varepsilon)\leqslant\frac{\pi}{4}+l\log\left(\frac{2\pi\sqrt{2}\,lp}{\varepsilon}\right).$$

Le corollaire du lemme 6 donne donc:

$$\lambda(4e\varepsilon)\leqslant\frac{\pi}{4}+l\log\left(\frac{2\pi\sqrt{2}\,lp}{\varepsilon}\right)+l\log\left[\frac{\pi}{4}+l\log\left(\frac{2\pi\sqrt{2}\,lp}{\varepsilon}\right)\right]$$
$$\leqslant\frac{\pi}{4}+l\log\left(\frac{2\pi\sqrt{2}\,lp}{\varepsilon}\right)+l\log\left(\frac{\pi}{4}+\frac{l^2 2\pi\sqrt{2}p}{\varepsilon}\right).$$

Mais on a

$$\left(\frac{2\pi\sqrt{2}\,lp}{\varepsilon}\right)^2\geqslant\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi\sqrt{2}\,l^2p}{\varepsilon},$$

d'où le résultat.

Remarque 9. Dans tous les cas où je connais une évaluation à peu près satisfaisante de $n^{\text{ème}}$ épaisseur, il existe $C>0$ tel que

$$\mu(C\varepsilon)\leqslant\lambda(\varepsilon)$$

et, par conséquent, il existe aussi $C>0$ tel que

$$\mu(C\varepsilon)\leqslant\frac{\pi}{4}+3l\log\left(\frac{2\pi lp\sqrt{2}}{\varepsilon}\right)$$

sous les hypothèses de la proposition 5.

Remarque 10. La proposition 5 est à comparer au théorème 14 de Lorentz [14] qui donne un résultat plus précis sous des hypothèses plus strictes.

V. CONSIDÉRATIONS BANACHIQUES

LEMME 9. *Soit A l'intersection d'une unicursale de dimension l et de degré p dans $\mathscr{E}_m$ avec une boule de rayon $1-\varepsilon$. On a*

$$C_{2\varepsilon}(A)\leqslant\frac{\pi}{4}+l\log\left(\frac{2\pi\sqrt{2}\,mlp}{\varepsilon}\right).$$

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition 1 et du théorème 2.

COROLLAIRE. *Soit A l'intersection d'une unicursale de dimension l et de degré p dans $\mathscr{E}_m$ avec une boule de rayon $R(1-\varepsilon)$. On a*

$$C_{2\varepsilon}(A)\leqslant\frac{\pi}{4}+l\log\left(\frac{2\pi\sqrt{2}m\,Rlp}{\varepsilon}\right).$$

Démonstration. Diviser ε et la distance par R dans le lemme.

LEMME 10 (John [7]). *Soit X un espace normé de dimension m. Il existe une norme hilbertienne $|\cdot|$ sur X telle que*

$$\|x\|\leqslant|x|\leqslant\sqrt{m}\,\|x\|$$

($\|x\|$ est la norme d'origine).

LEMME 11. *Soit X un espace normé de dimension m. Soit A la partie d'une unicursale de dimension l et de degré p dans X contenue dans une boule de rayon $(1-\varepsilon)$. On a*

$$C_{2\varepsilon}(A)\leqslant\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}\,l\log\left(\frac{2\pi\sqrt{2}\,mlp}{\varepsilon}\right).$$

Démonstration. Soit H l'espace X muni de la norme hilbertienne dont le lemme 10 affirme l'existence. On a donc

$$C_{2\varepsilon}^{X}(A)\leqslant C_{2\varepsilon}^{H}(A).$$

Dans H on applique le corollaire du lemme 9 avec $R=\sqrt{m}$.

PROPOSITION 2B. *Soient X un espace normé de dimension m, $K\subset X$ et W une unicursale de degré p et de dimension l qui approche K à ε près. Supposons K contenue dans une boule de rayon $1-2\varepsilon$. On a*

$$C_{4\varepsilon}(K)\leqslant\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}\,l\log\left(\frac{2\pi\sqrt{2}\,lpm}{\varepsilon}\right).$$

Démonstration. B étant une boule de rayon $1-\varepsilon$ telle que la boule concentrique de rayon $1-2\varepsilon$ contienne K on a $C_{4\varepsilon}(K) \leqslant C_{2\varepsilon}(W \cap B)$. Le lemme 11 permet de conclure.

Remarque 11. Il existe $C>0$ tel que pour toute norme sur $\boldsymbol{R}^2$, toute courbe unicursale qui approche la boule unité à ε près soit de degré au moins C/ε.

PROPOSITION 6. *Soit E un espace normé. Soit W une unicursale de dimension l et de degré $p \geqslant l$ qui approche K à ε près. On a*

$$C_{4\varepsilon}(K) \leqslant \frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}\, l \log\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{\varepsilon(l-1)!}\right)+\frac{3}{2}\, l(l+1)\log 2p.$$

Démonstration. Avec les notations de la proposition 2B on a encore $C_{2\varepsilon}(W \cap B) \geqslant C_{4\varepsilon}(K)$. On applique alors le lemme 11 dans l'espace vectoriel engendré par W. Comme un polynôme de degré p à l indéterminées a $\binom{p+l}{l}$ coefficients, la dimension m de cet espace vérifie:

$$m \leqslant \binom{p+l}{l} \leqslant \frac{2^l p^l}{l!}.$$

VI. UN CRITÈRE DE NUCLÉARITÉ

Cette dernière partie répond partiellement à une question (orale) de S. Rolewicz. Nous rappellerons d'abord sans démonstration un critère de nucléarité dû à B. S. Mitjagin que nous aurons à utiliser.

NOTATIONS 5. Si E est un espace vectoriel et U un ensemble convexe équilibré absorbant, E_U désignera l'espace quotient de E par le sous-espace

$$N_U = \{u;\ \forall t \in \boldsymbol{R},\ tx \in U\}$$

avec la norme

$$\|\bar{x}\|_U = \inf\{t>0;\ x \in tU\}$$

(qui ne dépend que de l'image $\bar{x}$ de x par la projection canonique $\bar{\omega}_U$ de E sur E_U). Si de plus A est un sous-ensemble de E, $H_\varepsilon(A;\ U)$ désignera l'ε-entropie de $\bar{\omega}_U(A)$:

$$H_\varepsilon(A;\ U) = H^{E_U}\big(\bar{\omega}_U(A)\big).$$

THÉORÈME 3 (Mitjagin [17]). *Soit $\alpha>0$. Une condition nécessaire et suffisante pour que l'espace localement convexe E soit nucléaire est que pour tout voisinage convexe équilibré U de l'origine, il existe un voisinage V de l'origine et un nombre $C>0$ tels que*

$$H_\varepsilon(V;\ U) \leqslant C\varepsilon^{-\alpha}.$$

NOTATIONS 6. Si E est un espace normé et A un sous-ensemble de E, nous appellerons $d_{n,p}(A)$ la borne inférieure des nombres ε tels qu'il existe une unicursale de dimension n et de degré p qui approche A à ε près.

Si E est un espace vectoriel et U un ensemble convexe équilibré absorbant nous noterons $d_{n,p}(A;\ U)$ pour $d_{n,p}(\bar{\omega}_U(A);\ U)$.

Remarque 12. On a

$$d_{n+1}(A) \leqslant d_{n,1}(A) \leqslant d_n(A)$$

avec égalité dans la deuxième relation si A est équilibré.

PROPOSITION 7. *Soient $\alpha>0$ et n un nombre entier $\geqslant 1$. Pour que l'espace localement convexe E soit nucléaire, il est nécessaire et suffisant que pour tout voisinage convexe équilibré U de l'origine, il existe un voisinage V de l'origine et un nombre $C>0$ tels que, pour tout p,*

$$d_{n,p}(V;\ U) \leqslant C(\log p)^{-\alpha}.$$

Démonstration. n, U, V étant fixés, nous poserons

$$\nu(\varepsilon) = \inf\{p;\ d_{n,p}(V;\ U) \leqslant \varepsilon\}$$

La condition équivaut alors à l'existence de A tel que

$$\nu(\varepsilon) \leqslant \exp(A\varepsilon^{-1/\alpha}).$$

Nécessité. Soit U comme dans l'énoncé, E étant nucléaire, il existe (théorème 3) A tel que

$$H_\varepsilon(V;\ U) \leqslant A\varepsilon^{-1/\alpha}.$$

Comme

$$\binom{n+p}{n} \geqslant \frac{p^n}{n!},$$

il en résulte d'après la proposition 3 que

$$\frac{[\nu(\varepsilon)]^n}{n!} \leqslant \exp(A\varepsilon^{-1/\alpha}),$$

d'où on déduit sans peine la condition de l'énoncé.

Suffisance. U et V étant comme dans l'énoncé, on a d'après la proposition 6 et avec une notation évidente:

$$C_{4\varepsilon}(V;\ U) \leqslant \frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}\, n\log\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{(n-1)!}\,\frac{1}{\varepsilon}\right)+\frac{3}{2}\, n(n+1)\log[2\nu(\varepsilon)]$$

$$\leqslant A_0+A_1\log\frac{1}{\varepsilon}+A_2\varepsilon^{-1/\alpha}$$

et d'après le lemme 5, on en déduit que la condition du théorème 3 est vérifiée.

Remarque 13. Nous avons travaillé à n fixé en faisant varier p. Nous aurions pu faire l'inverse. Pour $p=1$, Mitjagin l.c. donne aussi la condition

$$d_n(V;\, U) \leqslant Cn^{-\alpha}.$$

Cette condition se généralise à p quelconque

$$\forall U,\ \exists V,\ C\colon \forall n,\ d_{n,p}(V;\, U) \leqslant Cn^{-\alpha}.$$

(Démonstration laissée au lecteur).

Celà confirme la morale de cette histoire: l'erreur d'approximation par les unicursales diminue beaucoup plus vite quand la dimension augmente que quand c'est le degré.

Remarque 14. Visiblement, on peut construire avec les $d_{n,p}$ des invariants pour les isomorphismes vectoriels topologiques du type de la dimension approchée de Kolmogorov [10] et de la dimension diamétrale.

Remarque 15. Dans la proposition 3, on peut remplacer „unicursale de dimension l et de degré p" par „image de $\boldsymbol{R}^l$ par un polynôme de degré p" (voir la démonstration). On peut donc modifier de façon analogue la définition de $d_{n,p}$ et on aura encore la proposition 7.

Bibliographie

[1] Bessaga, Pełczyński and S. Rolewicz, *Approximative dimension of linear topological spaces and some of its applications*, Reports of Conf. on Funct. Anal. Warsaw 1960.

[2] N. Bourbaki, *Eléments de Mathématique*, Livre VI. *Intégration*, ch. VII, Paris 1952.

[3] R. Douady, *Petites perturbations d'une suite exacte et d'une suite quasiexacte*, Séminaire d'Analyse de la Faculté des Sciences de Nice, 1965/1966, exposé n° 12.

[4] A. El Kolli, *Thèse de troisième cycle*, Faculté des Sciences d'Alger, Septembre 1969.

[5] J. Favard, *Une définition de la longueur et de l'aire*, C. R. Ac. Sc. Paris 194 (1932), p. 344-346.

[6] Henkin et Mitjagin, Séminaire d'analyse fonctionnelle de l'Université de Voronej, 7 (1963), p. 97-103.

[7] F. John, *Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions*, Courant anniversary volume 1948.

[8] A. Kolmogorov, *Caractéristiques asymptotiques de certains compacts métriques*, Doklady A. N. URSS 108^3 (1956), p. 585-589 (en russe).

[9] — *Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse*, Ann. Math. 37 (1936), p. 107-111.

[10] — *Sur la dimension linéaire des espaces vectoriels topologiques*, Doklady A. N. URSS 120 (1958), p. 239-241 (en russe), et séminaire Bourbaki, mai 1958 (exp. 165) (en français).

[11] — et Tihomirov, *ε-entropie et ε-capacité d'ensembles dans les espaces fonctionnels*, Uspehi Mat. Nauk 14 (1959), p. 386 (en russe).

[12] Krasnoselski, Krein et Milman, *Sur l'indice de défaut des opérateurs linéaires dans un espace de Banach et sur quelques questions géométriques*, Recueil des travaux de l'Inst. Math. de l'Ac. Sc. de la R.S.S. d'Ukraine 11 (1948), p. 97-112 (en russe).

[13] Leontovič et Mel'nikov, *Sur la finitude de la variation d'une variété*, Trudy Moskov Mat. Obscestva 14 (1965), p. 306-337 (en russe, trad. anglaise)

[14] G. Lorentz, *Metric entropy and approximation*, Bull. Ann. Math. Soc. 72 (1966), p. 903-937.

[15] — *Approximation of functions*, New York 1966.

[16] J. Milnor, *On the Betti numbers of real varieties*, Proc. Am. Math. Soc. 15 (1964), p. 275-280.

[17] B. Mitjagin, *Dimension approchée et bases dans les espaces nucléaires*, Uspehi Mat. Nauk 164 (1961), p. 63-132 (en russe, trad. anglaise).

[18] — et A. Pełczyński, *Opérateurs nucléaires et dimension approchée*, Congrès International des Mathématiciens, Moscou 1966 (en russe).

[19] O. Olejnik, *Majoration des nombres de Betti des variétés algébriques réelles*, Mat. Sbornik 283 (1951), p. 635-640 (en russe).

[20] — *Sur la topologie des courbes algébriques réelles sur des surfaces algébriques*, Mat. Sbornik 29 (1951), p. 133-156.

[21] — et Petrovski, *Sur la topologie des surfaces algébriques réelles*, Izvestja A. N. URSS 13 (1949), p. 389-402.

[22] R. Thom, *Sur l'homologie des variétés algébriques réelles in Differential an Combinatorial Topology*, S. Cairus ed. (Princeton University Press 1965).

[23] V. Tihomirov, *Diamètres des ensembles dans les espaces fonctionnels et théorie de la meilleure approximation*, Uspehi Mat. Nauk 15^3 (1960), p. 81-120 (en russe, trad. anglaise).

[24] A. Vituškin, *Evaluation de la complexité des problèmes de tabulation*, Moscou 1959 (en russe, trad. anglaise sous le titre *Theory of the transmission and processing of information*).

[25] — *Sur les variations multidimensionnelles*, Moscou 1955 (en russe).

[26] H. Warren, *Lower bounds for approximation by non linear manifolds*, Trans. Am. Math. Soc. 133 (1968), p. 167-178.

[27] — *Partitions by real algebraic varieties and applications to questions of non-linear approximation*, Bull. Am. Math. Soc. 73 (1967), p. 192-194.

[28] A. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications* Paris 1942.

[29] G. F. Clements, *Entropies of several sets of real-valued functions*, Pacific J. Math 13 (1963), p. 1085-1095.