It is possible to find a nuclear space, a locally convex space, say E and F, and a non-locally convex admissible topology on $E\otimes F$. This topology cannot be locally pseudo-convex. The construction uses some unpublished results of the author, and will not be given here.

This is a good place to remember that the problem of whether the projective tensor product of two p-normed spaces is p-normed seems to be open. And in a similar spirit, the autor does not know whether an admissible Hausdorff topology can always be found on the tensor product of two Hausdorff topological vector spaces.

References

[a] J. P. Kahane, *Sur les séries de Fourier à coefficients dans l^p*, Proc. Conf. on Orthogonal Expensions and their Continuous Analogues, Southern Ill. Univ. Press, 1968.

[b] S. Rolewicz, *An open problem* submitted at this meeting.

[1] B. Gramsch, *Integration und holomorphe Funktionen in lokalbeschränkte Räumen*, Math. Ann. 162 (1965), p. 190-210.

[2] — *Tensorprodukte und Integration vektorwertige Funktionen*, Math. Zeitschrift 100 (1967), p. 108-122.

[3] D. Przeworska-Rolewicz and S. Rolewicz, *On integrals of functions with values in a linear metric spaces*, Studia Math. 26 (1966), p. 121-131.

[4] P. Turpin and L. Waelbroeck, *Sur l'approximation des fonctions différentiables à valerus dans les espaces vectoriels topologiques*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 267 (1968), p. 94-97.

[5] — *Intégration et fonctions holomorphes dans les espaces localement pseudo-convexes* ibidem 267 (1968), p. 160-162.

[6] — *Alèbres localement pseudoconve s es à inverse continu*, ibidem 267 (1968), p. 194-195.

[7] D. Vogt, *Integrationstheorie in p-normierten Räumen*, Math. Ann. 173 (1967), p. 219-232.

[8] L Waelbroeck, *Fonctions différentiables et petite bornologie*, Comptes Rendus Acad Sci. Paris 267 (1968), p. 220-222.

STUDIA MATHEMATICA, T. XXXVIII. (1970)

Colloquium on
Nuclear Spaces and Ideals in Operator Algebras

Injektive Operatorenideale über der Gesamtheit aller Banachräume und ihre topologische Erzeugung

von

IRMTRAUD STEPHANI (Jena)

1. Einführung in den Begriff des Operatorenideals. Für je zwei Banachräume E und F sei $\boldsymbol{L}(E,F)$ der lineare Raum aller linearen und stetigen Abbildungen von E in F, und mit $\boldsymbol{L}$ werde die Gesamtheit der linearen stetigen Abbildungen zwischen Banachräumen schlechthin bezeichnet. Im folgenden geht es um die Aussonderung spezieller Abbildungstypen aus der Gesamtheit $\boldsymbol{L}$. Diesem Zweck dient der *Begriff des Operatorenideals* (vgl. [5]), durch den in der Gesamtheit $\boldsymbol{L}$ eine Teilgesamtheit $\boldsymbol{A}$ axiomatisch festgelegt wird, und zwar in folgender Weise:

(A_1) Für je zwei Banachräume E und F ist $\boldsymbol{A}(E,F)$ ein linearer Teilraum von $\boldsymbol{L}(E,F)$. Dabei gibt es mindestens ein Paar $\tilde{E},\tilde{F}$, so daß $\boldsymbol{A}(\tilde{E},\tilde{F})$ eine Transformation $\tilde{T}_0$ mit $\tilde{T}_0\neq 0$ enthält.

(A_2) (a) Aus $T\in\boldsymbol{A}(E,F)$ und $R\in\boldsymbol{L}(F,G)$ folgt $RT\in\boldsymbol{A}(E,G)$.
(b) Aus $T\in\boldsymbol{A}(F,G)$ und $R\in\boldsymbol{L}(E,F)$ folgt $TR\in\boldsymbol{A}(E,G)$.

Einen Operator T, der für ein Paar von Banachräumen E,F zur Klasse $\boldsymbol{A}(E,F)$ gehört, werden wir gelegentlich auch eine *Abbildung vom Typ* $\boldsymbol{A}$ nennen.

Es zeigt sich, daß für ein beliebiges Operatorenideal $\boldsymbol{A}$ und je zwei Banachräume E,F die Gesamtheit $\boldsymbol{L}_0(E,F)$ der ausgearteten Abbildungen von E in F in $\boldsymbol{A}(E,F)$ enthalten ist. Umgekehrt erfüllt das System $\boldsymbol{L}_0$ der ausgearteten Abbildungen bereits die Bedingungen (A_1) und (A_2), d.h. $\boldsymbol{L}_0$ kann als das kleinste Operatorenideal angesprochen werden.

Tritt zu den Forderungen (A_1) und (A_2) noch die Forderung nach einer Norm α auf jedem der linearen Räume $\boldsymbol{A}(E,F)\subset\boldsymbol{L}(E,F)$ hinzu und wird (A_2) durch die Aussagen

$$(\mathrm{N})\quad \begin{array}{ll}(\mathrm{a}) & \alpha(RT)\leqslant\|R\|\,\alpha(T)\ \text{für}\ T\in\boldsymbol{A}(E,F)\ \text{und}\ R\in\boldsymbol{L}(F,G),\\ (\mathrm{b}) & \alpha(TR)\leqslant\|R\|\,\alpha(T)\ \text{für}\ T\in\boldsymbol{A}(F,G)\ \text{und}\ R\in\boldsymbol{L}(E,F)\end{array}$$

ergänzt, so soll das vorliegende Operatorenideal ein *normiertes Operatorenideal* oder kurz *Normideal* genannt werden. Die auf den einzelnen linearen

Räumen $\boldsymbol{A}(E, F)$ definierte Norm α wollen wir im Hinblick auf die Eigenschaften (N) als *Idealnorm* bezeichnen. Für eindimensionale Abbildungen T hängt die Idealnorm $\alpha(T)$ mit der Operatorennorm $\|T\|$ durch

$$\alpha(T) = c_\alpha \cdot \|T\| \tag{1.1}$$

zusammen, wobei c_α eine von T unabhängige Konstante ist. Allgemeiner gilt mit derselben Konstanten c_α

$$\alpha(T) \geqslant c_\alpha \cdot \|T\| \tag{1.2}$$

für beliebige Abbildungen $T \in \boldsymbol{A}(E, F)$. Geht man vermöge

$$\alpha^*(T) = \frac{1}{c_\alpha} \cdot \alpha(T)$$

zu einer äquivalenten Idealnorm über, so erreicht man $c_{\alpha^*} = 1$. Im folgenden werden wir stets von vornherein

$$c_\alpha = 1$$

voraussetzen.

In bezug auf die gewöhnliche Operatorennorm stellt offensichtlich jedes Operatorenideal ein Normideal dar. Normideale dieser Art werden im allgemeinen aber keine Rolle spielen. Von Interesse ist ein Normideal $\boldsymbol{A}$ erst dann, wenn die einzzelnen Räume $\boldsymbol{A}(E, F)$ vollständig bzgl. der Idealnorm α sind. In diesem Falle heißt $\boldsymbol{A}$ ein *vollständiges Normideal.*

Es gibt unter allen vollständigen Normidealen ein kleinstes, d.h. ein solches, das in jedem vollständigen Normideal enthalten ist. Das ist das *Normideal* $\boldsymbol{N}$ *der nuklearen Operatoren.* Eine Abbildung T aus $\boldsymbol{L}(E, F)$ heißt *nuklear*, wenn sie sich mit gewissen stetigen Linearformen a_i aus E' und gewissen Elementen y_i aus F, die der Bedingung

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|a_i\| \cdot \|y_i\| < +\infty \tag{1.3}$$

genügen, in der Form

$$Tx \doteq \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, a_i \rangle y_i \tag{1.4}$$

darstellen läßt. Die so charakterisierte Operatorengesamtheit $\boldsymbol{N}$ besitzt die Eigenschaften (A_1) und (A_2) und wird durch die Festsetzung

$$\nu(T) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \|a_i\| \cdot \|y_i\| \; : \; Tx = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, a_i \rangle y_i\right\} \tag{1.5}$$

zu einem vollständigen Normideal mit ν als Idealnorm. Dabei bezieht sich die Infimumsbildung auf alle möglichen Darstellungen von T in der Form (1.4).

Daß die nuklearen Abbildungen in jedem vollständigen Normideal enthalten sind, läßt sich im übrigen leicht verifizieren.

2. Erzeugung von Operatorenidealen durch Vergröberung der Topologie des Urbildraumes. Um von der Gesamtheit $\boldsymbol{L}$ aller linearen stetigen Abbildungen zwischen Banachräumen zu einer Teilgesamtheit $\boldsymbol{A}$ zu gelangen, versehen wir jeden Banachraum E in seiner Eigenschaft als Urbildraum mit einer im Vergleich zur Normtopologie gröberen Topologie, und zwar soll es sich jeweils um eine lokalkonvexe Topologie handeln.

Eine *lokalkonvexe Topologie* $\boldsymbol{T}$ *über einem linearen Raum* E wird erzeugt durch ein *System* $\boldsymbol{P}(E)$ *von Halbnormen über* E, das die folgenden Eigenschaften besitzt (vgl. [3]):

(P_1) Zu je zwei Halbnormen $p_1 \in \boldsymbol{P}(E)$ und $p_2 \in \boldsymbol{P}(E)$ gibt es eine Halbnorm $p \in \boldsymbol{P}(E)$ mit $p_1(x) \leqslant p(x)$ und $p_2(x) \leqslant p(x)$ für alle $x \in E$.

(P_2) Aus $p(x) = 0$ für alle $p \in \boldsymbol{P}(E)$ folgt $x = 0$.

Ist ein und derselbe lineare Raum E mit zwei lokalkonvexen Topologien $\boldsymbol{T}_1$ und $\boldsymbol{T}_2$ ausgestattet, so heißt $\boldsymbol{T}_2$ *feiner als* $\boldsymbol{T}_1$ *bzw.* $\boldsymbol{T}_1$ *gröber als* $\boldsymbol{T}_2$, wenn es zu jeder Halbnorm p_1 des zu $\boldsymbol{T}_1$ gehörigen Halbnormensystems $\boldsymbol{P}_1(E)$ eine Halbnorm p_2 des zu $\boldsymbol{T}_2$ gehörigen Halbnormensystems $\boldsymbol{P}_2(E)$ gibt derart, daß mit einer geeigneten Konstanten $\varrho > 0$ für alle $x \in E$ die Ungleichung

$$p_1(x) \leqslant \varrho p_2(x) \tag{2.1}$$

besteht. Die *Stetigkeit einer linearen Abbildung* S eines lokalkonvexen Raumes E in einen lokalkonvexen Raum F drückt sich in der folgenden Bedingung aus:

Zu jeder Halbnorm q des über F erklärten Halbnormensystems $\boldsymbol{P}(F)$ existieren eine Halbnorm p des Halbnormensystems $\boldsymbol{P}(E)$ über E und eine Konstante $C \geqslant 0$ mit

$$q(Sx) \leqslant C \cdot p(x) \tag{2.2}$$

für alle $x \in E$ (vgl. [1] und [2]).

Es werde jetzt jeder Banachraum E in seiner Eigenschaft als Urbildraum mit einer im Vergleich zur Normtopologie gröberen lokalkonvexen Topologie $\boldsymbol{T}$ ausgestattet. Der so entstehende lokalkonvexe Raum werde jeweils mit $E^{\boldsymbol{T}}$ bezeichnet. Für jeden Banachraum F in seiner Eigenschaft als Bildraum werde die Normtopologie beibehalten. Die Stetigkeit einer linearen Abbildung S des lokalkonvexen Raumes $E^{\boldsymbol{T}}$ in den Banachraum F läuft dann auf die Gültigkeit einer Beziehung

$$\|Sx\| \leqslant C \cdot p(x) \tag{2.3}$$

mit einer geeigneten Halbnorm p aus dem über E erklärten Halbnormensystem $\boldsymbol{P}(E)$ und einer Konstanten $C \geqslant 0$ hinaus. Sie zieht automatisch die Stetigkeit von S als Abbildung des Banachraumes E in den Banachraum F nach sich. Denn da $\boldsymbol{T}$ gröber ist als die Normtopologie auf E, läßt sich die Halbnorm $p(x)$ im Sinne von (2.1) mit einer geeigneten

Konstanten $\varrho > 0$ durch

(2.4) $$p(x) \leqslant \varrho \|x\|$$

abschätzen.

Die Gesamtheit $\boldsymbol{L}(E^T, F)$ der linearen stetigen Abbildungen des lokalkonvexen Raumes E^T in den Banachraum F bezeichnen wir im folgenden mit $\boldsymbol{A}(E, F)$, also

(2.5) $$\boldsymbol{A}(E, F) = \boldsymbol{L}(E^T, F).$$

Es ist demnach $\boldsymbol{A}(E, F)$ ein linearer Teilraum von $\boldsymbol{L}(E, F)$. Für ein Paar E_0, F, dessen erste Komponente E_0 endlich-dimensional ist, gilt sogar schärfer

$$\boldsymbol{A}(E_0, F) = \boldsymbol{L}(E_0, F).$$

Denn auf einem endlich-dimensionalen linearen Raum sind alle lokalkonvexen Topologien äquivalent.

Der Forderung (A_1) an ein Operatorenideal $\boldsymbol{A}$ sind wir durch unsere Konstruktion damit bereits gerecht geworden. Weiter liefert die Verknüpfung einer Abbildung T aus $\boldsymbol{A}(E, F)$, also einer linearen stetigen Abbildung von E^T in F, mit einer Abbildung R aus $\boldsymbol{L}(F, G)$ wieder eine lineare stetige Abbildung von E^T in G, d.h. das Produkt RT liegt in $\boldsymbol{A}(E, G)$. Das ist aber gerade die Eigenschaft (A_2) (a). Die Verifikation der Eigenschaft (A_2) (b) wird möglich, wenn man die Vergröberung der Topologien auf den einzelnen Banachräumen in der Weise koppelt, daß für je zwei Banachräume E und F die Abbildungen aus $\boldsymbol{L}(E, F)$ stetig bleiben bei simultaner Vergröberung der Topologien auf E und F. Dem entspricht die Bedingung

(K) $$\boldsymbol{L}(E, F) \subset \boldsymbol{L}(E^T, F^T).$$

Dann ist nämlich jede Abbildung R aus $\boldsymbol{L}(E, F)$ auch lineare stetige Abbildung von E^T in F^T und gibt bei Verknüpfung mit einer Abbildung T aus $\boldsymbol{A}(F, G)$ zu einer linearen stetigen Abbildung TR von E^T in G, also zu einer Abbildung aus $\boldsymbol{A}(E, G)$ Anlaß.

Die unter der Bezeichnung (K) geführte *Kopplungsbedingung* läßt in Verbindung mit der Inklusion

$$\boldsymbol{L}(E^T, F) \subset \boldsymbol{L}(E, F)$$

im übrigen folgende Schlußweise zu:

Für den eindimensionalen linearen Raum R_1 in der Bedeutung von F wird $F^T = R_1$, und man erhält

$$\boldsymbol{L}(E^T, R_1) \subset \boldsymbol{L}(E, R_1) \subset \boldsymbol{L}(E^T, R_1),$$

also

$$\boldsymbol{L}(E^T, R_1) = \boldsymbol{L}(E, R_1).$$

Dahinter verbirgt sich aber nichts anderes als die Übereinstimmung der dualen Räume E' und $(E^T)'$ von E und E^T. Die gegenüber der Normtopologie vergröberte lokalkonvexe Topologie $\boldsymbol{T}$ auf E ist also in jedem Falle so beschaffen, daß sie auf das Dualsystem $\langle E, E'\rangle$ paßt.

Die simultane Einführung einer derartigen im Vergleich zur Normtopologie gröberen lokalkonvexen Topologie $\boldsymbol{T}$ auf jedem Banachraum E in seiner Eigenschaft als Urbildraum unter Berücksichtigung von (K) werden wir im folgenden als *Prinzip der Vergröberung der Topologie des Urbildraumes* bezeichnen. Dieses Prinzip stellt, wie wir gesehen haben, ein *Erzeugungsprinzip für Operatorenideale* dar. Über (A_1) und (A_2) hinausgehend genügt ein so erzeugtes Operatorenideal $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{T}]$ der folgenden Bedingung:

(I) Ist $S \in \boldsymbol{A}(E, G)$ und $T \in \boldsymbol{L}(E, F)$ mit

(2.6) $$\|Tx\| \leqslant \|Sx\| \quad \text{für alle } x \in E,$$

so folgt $T \in \boldsymbol{A}(E, F)$.

Zur Begründung ziehen wir die Ungleichung (2.3) heran. Dieselbe Halbnorm p aus $\boldsymbol{P}(E)$ und dieselbe Konstante $C \geqslant 0$, die S als stetige lineare Abbildung von E^T in F ausweisen, können wegen (2.6) dazu dienen, auch die Stetigkeit von T als Abbildung des Raumes E^T in F klarzulegen, d.h. die Zugehörigkeit von T zu $\boldsymbol{A}(E, F)$.

Wir wollen Operatorenideale mit der zusätzlichen Eigenschaft (I) als *injektive Operatorenideale* bezeichnen.

Ist ein injektives Operatorenideal $\boldsymbol{A}$ a priori gegeben, so kann es nachträglich nach dem Prinzip der Vergröberung der Topologie auf dem Urbildraum erzeugt werden. Dazu nehmen wir für einen festen Banachraum E jeweils die sämtlichen auf E erklärten Abbildungen T vom Typ $\boldsymbol{A}$ her, d.h. die sämtlichen Abbildungen $T \neq 0$ von E in irgendeinen Banachraum F mit $T \in \boldsymbol{A}(E, F)$, und bilden

(2.7) $$p_T(x) = \|Tx\|.$$

Das ist eine Halbnorm über E. Die Gesamtheit der so entstehenden Halbnormen fassen wir in dem System $\boldsymbol{P}(E)$ zusammen. $\boldsymbol{P}(E)$ besitzt die charakteristischen Eigenschaften (P_1) und (P_2) eines Halbnormensystems über einem linearen Raum, das eine lokalkonvexe Topologie erzeugt.

Zum Beweis von (P_1) stellen wir die beliebig vorgelegten Halbnormen p_1 und p_2 aus $\boldsymbol{P}(E)$ mit gewissen Transformationen $T_1 \in \boldsymbol{A}(E, F_1)$ und $T_2 \in \boldsymbol{A}(E, F_2)$ in der Form $p_1(x) = \|T_1 x\|$ und $p_2(x) = \|T_2 x\|$ dar. Aus den Banachräumen F_1 und F_2 konstruieren wir sodann durch direkte Summenbildung einen Banach-Raum F, dessen Norm durch die Summe der Normen der beiden Komponenten bestimmt ist. Wir postulieren also

(2.8) $$\|y\| = \|y_1\|_{F_1} + \|y_2\|_{F_2}$$

für die durch Summen

$$y = y_1 + y_2 \quad \text{mit } y_1 \in F_1,\, y_2 \in F_2$$

eindeutig darstellbaren Elemente y aus F. Mit I_1 und I_2 bezeichnen wir diejenigen Abbildungen, die die Teilräume F_1 und F_2 identisch in den Raum F einbetten. Der Ansatz

$$T = I_1 T_1 + I_2 T_2 \tag{2.9}$$

liefert uns dann eine Abbildung von E in F, die wegen $T_1 \in \boldsymbol{A}(E, F_1)$ und $T_2 \in \boldsymbol{A}(E, F_2)$ in $\boldsymbol{A}(E, F)$ liegt. Damit gehört $p(x) = \|Tx\|$ zu $\boldsymbol{P}(E)$. Auf Grund der Festlegung (2.8) ist aber

$$\|Tx\| = \|T_1 x\| + \|T_2 x\|,$$

d.h.

$$p(x) = p_1(x) + p_2(x).$$

Also haben wir

$$p_1(x) \leqslant p(x) \text{ und } p_2(x) \leqslant p(x) \qquad \text{für alle } x \in E,$$

wie gewünscht.

Um (P_2) zu beweisen, brauchen wir nur diejenigen Halbnormen p des Systems $\boldsymbol{P}(E)$ heranzuziehen, die auf eindimensionale Abbildungen, also auf stetige Linearformen über E zurückgehen. Aus der Voraussetzung des Verschwindens von $|\langle x, a\rangle|$ für alle stetigen Linearformen a über E folgt nach dem Hahn-Banach-Theorem bereits $x = 0$.

Die lokalkonvexe Topologie des Halbnormensystems $\boldsymbol{P}(E)$ ist tatsächlich gröber als die Normtopologie auf E. Da nämlich $\boldsymbol{A}(E, F) \subset \boldsymbol{L}(E, F)$ gilt, besteht für jede Halbnorm (2.7) des Systems $\boldsymbol{P}(E)$ eine Abschätzung (2.4).

Auch von der Kopplungseigenschaft (K) überzeugt man sich leicht. Ist nämlich $S \in \boldsymbol{L}(E, F)$, so gehört nach (A_2) (b) für beliebiges $T \in \boldsymbol{A}(F, G)$ das Produkt TS zu $\boldsymbol{A}(E, G)$. Die Vorgabe einer Abbildung $T \in \boldsymbol{A}(F, G)$ entspricht aber gerade der Vorgabe einer Halbnorm q aus dem durch $\boldsymbol{A}$ auf F erzeugten System $\boldsymbol{P}(F)$, nämlich der Halbnorm

$$q(y) = \|Ty\|.$$

Wegen $TS \in \boldsymbol{A}(E, G)$ ist andererseits

$$p(x) = \|TSx\|$$

eine Halbnorm aus dem über E definierten Halbnormensystem $\boldsymbol{P}(E)$. Dabei besteht der Zusammenhang

$$q(Sx) = p(x).$$

Er ordnet sich der Ungleichung (2.2) unter und bestätigt auf diese Weise die Stetigkeit von S als Abbildung des Raumes E^T in den Raum F^T.

Damit sind alle Voraussetzungen für die Erzeugung eines Operatorenideals nach dem Prinzip der Vergröberung der Topologie des Urbildraumes gegeben. Charakterisieren wir die durch das Operatorenideal $\boldsymbol{A}$ auf den einzelnen Banachräumen induzierte lokalkonvexe Topologie durch das Symbol $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})$, so haben wir das durch $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})$ erzeugte injektive Operatorenideal sinngemäß mit $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})]$ zu bezeichnen. Offensichtlich ist

$$\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{A}[\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})]. \tag{2.10 (a)}$$

Denn für eine Abbildung T aus einem der Räume $\boldsymbol{A}(E, F)$ kann man die Zugehörigkeit zum Ideal $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})]$ einfach dadurch dartun, daß man die zu (2.3) analoge Abschätzung

$$\|Tx\| \leqslant C \cdot p(x) \tag{2.11}$$

durch die Halbnorm

$$p(x) = \|Tx\|$$

realisiert. Aber auch die entgegengesetzte Inklusion

$$\boldsymbol{A}[\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})] \subset \boldsymbol{A} \tag{2.10 (b)}$$

ist richtig. Für eine Abbildung T aus $\boldsymbol{L}(E, F)$, die vom Typ $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})]$ ist, muß ja von vornherein eine Abschätzung (2.11) mit einer Halbnorm p der Gestalt

$$p(x) = \|Sx\|$$

vorliegen, wobei S eine auf E erklärte Abbildung vom Typ $\boldsymbol{A}$ ist. Aus

$$\|Tx\| \leqslant C \cdot \|Sx\|$$

und der Eigenschaft (I) des Operatorenideals $\boldsymbol{A}$ kann dann $T \in \boldsymbol{A}(E, F)$ gefolgert werden.

Wir fassen das Ergebnis zusammen in dem

SATZ 2.1. *Jedes injektive Operatorenideal $\boldsymbol{A}$ läßt sich nach dem Prinzip der Vergröberung der Topologie des Urbildraumes erzeugen, und zwar mit Hilfe derjenigen lokalkonvexen Topologie $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})$, die durch die Abbildungen vom Typ $\boldsymbol{A}$ auf einem Banachraum E über das System der Halbnormen (2.7) induziert wird. Es ist dann*

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}[\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})]. \tag{2.12}$$

Dem Zyklus (2.12) kann ein Zyklus gegenübergestellt werden, der von einer lokalkonvexen Topologie $\boldsymbol{T}$ über das erzeugte Operatorenideal $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{T}]$ zu $\boldsymbol{T}$ zurückführt. Die entsprechende Gleichung

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{A}[\boldsymbol{T}]) \tag{2.13}$$

ist für jeden Banachraum E als Äquivalenz der rechts und links stehenden Topologien zu interpretieren.

In der Tat, sei für jeden Banachraum E eine im Vergleich zur Normtopologie gröbere lokalkonvexe Topologie $\boldsymbol{T}$ mit der Kopplungseigenschaft (K) gegeben. $\boldsymbol{P}(E)$ sei ein im Sinne von (P_1), (P_2) definierendes System von Halbnormen für die Topologie $\boldsymbol{T}$ über dem jeweiligen Banachraum E. Über die bereits früher gemachte Feststellung hinausgehend, daß $\boldsymbol{T}$ zur Erzeugung eines injektiven Operatorenideals $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{T}]$ verwendet werden kann, weisen wir jetzt für jedes p aus $\boldsymbol{P}(E)$ die Existenz einer linearen Abbildung T_0 von E einen geeigneten Banachraum F mit

$$\|T_0 x\| = p(x) \tag{2.14}$$

nach. Dazu betrachten wir den linearen Teilraum E_0 von E, der durch die Gleichung

$$p(x) = 0$$

bestimmt wird. Auf dem Quotientenraum

$$\bar{E} = E/E_0$$

können wir durch die Festsetzung

$$\bar{p}(\bar{x}) = p(x) \tag{2.15}$$

eine Norm einführen. Durch Vervollständigung des Raumes $\bar{E}$ bzgl. dieser Norm $\bar{p}$ erhalten wir schließlich einen Banachraum F. Als Abbildung T_0 wählen wir jetzt einfach die Zusammensetzung des kanonischen Homomorphismus von E auf den Quotientenraum $\bar{E}$ mit der identischen Einbettungsabbildung von $\bar{E}$ in den Banachraum F, also

$$T_0 x = \bar{x}$$

als Abbildung des Banachraumes E in den Banachraum F. Für die Norm des Bildes $T_0 x$ in $\bar{E}$ und damit auch in F gilt wegen (2.15) gerade (2.14), wie gewünscht. T_0 ist also jedenfalls eine Abbildung vom Typ $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{T}]$. Dementsprechend gehört $\|T_0 x\|$, d.h. $p(x)$ selbst zu demjenigen Halbnormensystem, das durch das Operatorenideal $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{T}]$ auf E induziert wird. Die Topologie $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A}[\boldsymbol{T}])$ ist demnach feiner als die Ausgangstopologie $\boldsymbol{T}$. Andererseits stellt sich jede Halbnorm p_0 des auf E durch das Operatorenideal $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{T}]$ induzierten Halbnormensystems in der Form

$$p_0(x) = \|T_0 x\|$$

mit einer Abbildung T_0 vom Typ $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{T}]$ dar, und daher existiert in dem System $\boldsymbol{P}(E)$ eine Halbnorm p, die mit einer Konstanten $C > 0$ eine Abschätzung

$$p_0(x) \leqslant C \cdot p(x)$$

leistet. Also ist die Topologie $\boldsymbol{T}$ feiner als die Topologie $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A}[\boldsymbol{T}])$. Zusammenfassend formulieren wir den

Satz 2.2. *Ein System lokalkonvexer Topologien $\boldsymbol{T}$, das jeden Banachraum E mit einer gröberen Topologie als der Normtopologie versieht und das für je zwei Banachräume E und F die Kopplungseigenschaft (K) besitzt, kann stets durch ein injektives Operatorenideal erzeugt werden, nämlich durch das auf $\boldsymbol{T}$ zurückgehende Ideal $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{T}]$. Es gilt dann*

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{A}[\boldsymbol{T}]) \tag{2.13}$$

im Sinne einer Äquivalenz der rechts und links stehenden Topologien für jeden Banachraum E.

Das gemeinsame Fazit der Sätze (2.1) und (2.2) ist die umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen injektiven Operatorenidealen einerseits und Systemen vergröberter lokalkonvexer Topologien auf Banachräumen mit der Kopplungseigenschaft (K) andererseits. Wir demonstrieren diese Beziehung jetzt an zwei Beispielen.

1. Beispiel. Jeder Banachraum E werde mit der schwachen Topologie $\boldsymbol{T}_s$ ausgestattet. Zur Erzeugung von $\boldsymbol{T}_s$ möge das System $\boldsymbol{P}_s(E)$ der Halbnormen

$$p_{a_1 a_2 \ldots a_n}(x) = \sup\{|\langle x, a_i\rangle| : i = 1, 2, \ldots, n\}$$

dienen, das sich auf die endlichen Mengen $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ stetiger Linearformen über E gründet. Wie bereits der Name sagt, ist die schwache Topologie schwächer, d.h. gröber als die Normtopologie. Auch die Kopplungseigenschaft (K) ist erfüllt. $\boldsymbol{T}_s$ bestimmt demnach ein injektives Operatorenideal $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{T}_s]$. Die zu $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{T}_s]$ gehörigen Abbildungen T sind durch Ungleichungen

$$\|Tx\| \leqslant C \cdot p_{a_1 a_2 \ldots a_n}(x)$$

charakterisiert und besitzen daher einen endlich-dimensionalen Bildraum. Es handelt sich also um ausgeartete Abbildungen. Da andererseits die ausgearteten Abbildungen in jedem Operatorenideal enthalten sind, gilt

$$\boldsymbol{A}[\boldsymbol{T}_s] = \boldsymbol{L}_0.$$

2. Beispiel. Auf jedem Banachraum E werde als lokalkonvexe Topologie die Topologie $\boldsymbol{T}_k$ der gleichmäßigen Konvergenz auf den kompakten Teilmengen des dualen Raumes E' zugrundegelegt. Diese Topologie resultiert aus dem System $\boldsymbol{P}_k(E)$ der Halbnormen

$$p_K(x) = \sup\{|\langle x, a\rangle| : a \in K\}$$

mit beliebigen kompakten Teilmengen K von E' und erfüllt ebenfalls die Voraussetzungen für die Erzeugung eines injektiven Operatorenideals $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{T}_k]$ nach dem Prinzip der Vergröberung der Topologie des Urbildraumes. Die auf einem Banachraum E erklärten Abbildungen T vom Typ $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{T}_k]$ erweisen sich durch den Satz von Arzelá-Ascoli als kompakt.

Andererseits stellt der Satz von Schauder ein Beweisprinzip dar, vermöge dessen auf die Zugehörigkeit einer jeden kompakten Abbildung zum Operatorenideal $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{T}_k]$ geschlossen werden kann. Also stimmt das Operatorenideal $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{T}_k]$ mit dem *Ideal* $\boldsymbol{K}$ *der kompakten Operatoren* überein.

3. Die injektive Hülle beliebiger Operatorenideale. Es sei jetzt $\boldsymbol{A}$ ein beliebiges Operatorenideal. Übernehmen wir die frühere Konstruktion des Systems lokalkonvexer Topologien $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})$ und die anschließende Herstellung des injektiven Operatorenideals $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})]$, so bleibt es bei der Inklusion

$$\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{A}[\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})], \tag{2.10)(a}$$

denn die Injektivität von $\boldsymbol{A}$ hat lediglich für den Nachweis von (2.10)(b) eine Rolle gespielt. Das Ideal $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})]$ besitzt für das Ideal $\boldsymbol{A}$ die Bedeutung eines einbettenden injektiven Operatorenideals, das seinerseits in jedem injektiven Operatorenideal enthalten ist, welches das Ideal $\boldsymbol{A}$ enthält. Dieser Sachverhalt rechtfertigt die Bezeichnung *injektive Hülle* für $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})]$; wir schreiben

$$\boldsymbol{A}[\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})] = \boldsymbol{A}_I.$$

Die Abbildungen des Ideals $\boldsymbol{A}_I$ können aber noch nach einem anderen Prinzip als dem der injektiven Hüllenbildung aus dem Ideal $\boldsymbol{A}$ gewonnen werden. Aufschluß darüber erteilt

Satz 3.1. *Eine Abbildung $T \in \boldsymbol{L}(E, F)$ gehört genau dann zur injektiven Hülle $\boldsymbol{A}_I$ eines Operatorenideals $\boldsymbol{A}$, wenn T bei geeigneter Erweiterung des Bildraumes F in eine Abbildung vom Typ $\boldsymbol{A}$ übergeht, d.h. wenn eine isometrische Einbettung J des Banachraumes F in einen Banachraum $\tilde{F}$ existiert, so daß die Abbildung $\tilde{T} = JT$ in $\boldsymbol{A}(E, \tilde{F})$ liegt.*

Wir schicken dem Beweis dieses Satzes einen Hilfssatz voraus. Es wird sich darin um *Banachräume mit der Fortsetzungseigenschaft* handeln. Ein Banachraum $\tilde{F}$ besitzt die Fortsetzungseigenschaft, wenn jede auf einem linearen Teilraum E eines Banachraumes $\tilde{E}$ erklärte lineare stetige Abbildung mit Werten in $\tilde{F}$ unter Erhaltung der Norm auf den ganzen Raum $\tilde{E}$ fortgesetzt werden kann.

Hilfssatz 3.1. *Es sei $\tilde{F}$ ein Banachraum mit der Fortsetzungseigenschaft und T eine Abbildung aus $\boldsymbol{L}(E, \tilde{F})$, die mit einer linearen stetigen Abbildung S von E in einen Banachraum Z durch*

$$\|Tx\| \leqslant \|Sx\| \tag{3.1}$$

verknüpft ist. Dann läßt T eine Produktdarstellung

$$T = RS \tag{3.2}$$

zu mit $R \in \boldsymbol{L}(Z, \tilde{F})$ und $\|R\| \leqslant 1$.

Beweis. Das Bild des Banachraumes E bei der Abbildung S ist ein linearer Teilraum Z_0 von Z. Indem man ein beliebiges Element z aus Z_0 mit einem geeigneten Element x aus E in der Form

$$z = Sx$$

darstellt, kann man durch

$$R_0 z = Tx$$

eine Abbildung R_0 von Z_0 in $\tilde{F}$ definieren. Das ist tatsächlich eine sinnvolle Festsetzung. Denn existieren für ein $z \in Z_0$ zwei Darstellungen

$$z = Sx \quad \text{und} \quad z = Sx',$$

so folgt nach (3.1) aus

$$S(x - x') = 0$$

auch

$$T(x - x') = 0,$$

also

$$Tx = Tx'.$$

Die Abbildung R_0 ist offensichtlich linear. Die Gleichung

$$\|R_0 z\| = \|Tx\|$$

liefert in Verbindung mit der Ungleichung (3.1) die Abschätzung

$$\|R_0 z\| \leqslant \|Sx\| = \|z\|.$$

Also ist R_0 auch stetig, und es gilt $\|R_0\| \leqslant 1$. Da der Bildraum $\tilde{F}$ die Fortsetzungseigenschaft besitzt, kann R_0 von dem Teilraum Z_0 unter Erhaltung der Norm auf den ganzen Raum Z fortgesetzt werden. Es sei R eine derartige Fortsetzung von R_0. Man hat dann

$$Rz = R_0 z \quad \text{für } z \in Z_0$$

bzw.

$$R(Sx) = R_0(Sx) = Tx \quad \text{für } x \in E.$$

Mit dieser auf dem ganzen Raum Z erklärten linearen stetigen Abbildung R besteht daher für T eine Produktdarstellung

$$T = RS,$$

und wegen $\|R_0\| \leqslant 1$ ist auch $\|R\| \leqslant 1$, wie gewünscht.

Wir kommen jetzt zum Beweis von Satz 3.1 selbst. Die injektive Hülle $\boldsymbol{A}_I$ des Operatorenideals $\boldsymbol{A}$ werde zunächst für solche Paare $E, \tilde{F}$ von Banachräumen betrachtet, deren zweite Komponente $\tilde{F}$ die Fortsetzungseigenschaft besitzt. Ist $T \in \boldsymbol{A}_I(E, \tilde{F})$, so gibt es dazu eine auf E erklärte Abbildung S vom Typ $\boldsymbol{A}$, etwa $S \in \boldsymbol{A}(E, Z)$, mit

$$\|Tx\| \leqslant \|Sx\|.$$

Nach Hilfssatz 3.1 kann T in Form eines Produktes

$$T = RS$$

von S mit einer Abbildung R aus $\boldsymbol{L}(Z, \tilde{F})$ angesetzt werden, und daraufhin garantiert die Idealeigenschaft (A_2)(a) die Zugehörigkeit der Abbildung T zu $\boldsymbol{A}(E, \tilde{F})$. Für Banachräume $\tilde{F}$ mit der Fortsetzungseigenschaft hat sich also das *Zwischenresultat*

$$\boldsymbol{A}_I(E, \tilde{F}) = \boldsymbol{A}(E, \tilde{F}) \tag{3.3}$$

eingestellt.

Zur Untersuchung von $\boldsymbol{A}_I(E, F)$ für beliebige Paare von Banachräumen E, F bemerken wir, daß jeder Banachraum F isometrisch in einen Banachraum $\tilde{F}$ mit der Fortsetzungseigenschaft eingebettet werden kann, nämlich in den Banachraum $M(V^0)$ der beschränkten Funktionen auf der Einheitskugel V^0 des dualen Raumes F'. Ist J die betreffende Einbettungsabbildung von F in den Raum $M(V^0)$ und T eine beliebige Abbildung aus $\boldsymbol{A}_I(E, F)$, so liegt das Produkt $\tilde{T} = JT$ in $\boldsymbol{A}_I(E, M(V^0))$. Auf dem Wege über

$$\boldsymbol{A}_I(E, M(V^0)) = \boldsymbol{A}(E, M(V^0))$$

kann nun weiter auf $\tilde{T} \in \boldsymbol{A}(E, M(V^0))$ geschlossen werden. Es gelingt also tatsächlich, eine Abbildung $T \in \boldsymbol{A}_I(E, F)$ durch Erweiterung des Bildraumes F in eine Abbildung vom Typ $\boldsymbol{A}$ überzuführen.

Ist umgekehrt eine Abbildung $T \in \boldsymbol{L}(E, F)$ so beschaffen, daß bei einer gewissen isometrischen Einbettung J von F in einen Banachraum $\tilde{F}$ eine Abbildung $\tilde{T} = JT$ aus $\boldsymbol{A}(E, \tilde{F})$ entsteht, so kann von

$$\|Tx\| = \|\tilde{T}x\|$$

her gefolgert werden $T \in \boldsymbol{A}_I(E, F)$. Damit ist Satz 3.1 in vollem Umfang bewiesen.

Wir benutzen Satz 3.1 für eine *neue Charakterisierung der Injektivität von Operatorenidealen*. Entsprechend der Definition der injektiven Hülle kann man zunächst sagen, daß $\boldsymbol{A}$ genau dann injektiv ist, wenn $T \in \boldsymbol{A}_I(E, F)$ jeweils zur Folge hat $T \in \boldsymbol{A}(E, F)$. Die Zugehörigkeit einer Abbildung T zu $\boldsymbol{A}_I(E, F)$ charakterisieren wir jetzt im Sinne von Satz 3.1. So ergibt sich als *äquivalente Bedingung zu* (I) die folgende Bedingung:

(UB) Ist $T \in L(E, F)$ und J eine isometrische Einbettung des Banachraumes F in einen Banachraum $\tilde{F}$, vermöge der $JT \in \boldsymbol{A}(E, \tilde{F})$ gilt, so folgt $T \in \boldsymbol{A}(E, F)$.

Das Kennzeichen (UB) soll auf *Unabhängigkeit vom Bildraum* hindeuten. In der Tat kann ja die betreffende Bedingung dahingehend interpretiert werden, daß die Zugehörigkeit einer Abbildung T zum Operatorenideal $\boldsymbol{A}$ nicht vom Bildraum abhängt, d.h. nicht nachträglich durch Erweiterung des Bildraumes herbeigeführt werden kann, wenn sie nicht von vornherein vorliegt. Wir werden daher injektive Operatorenideale auch bezeichnen als *Operatorenideale, die vom Bildraum unabhängig sind.*

4. Injektive Normideale. Ein Normideal $\boldsymbol{A}$ soll injektiv heißen, wenn es — über die Eigenschaft (I) eines injektiven Operatorenideals hinausgehend — die folgende Eigenschaft besitzt:

(IN) Ist $S \in \boldsymbol{A}(E, G)$ und $T \in \boldsymbol{L}(E, F)$ mit

$$\|Tx\| \leqslant \|Sx\| \quad \text{für alle } x \in E, \tag{2.6}$$

so folgt $T \in \boldsymbol{A}(E, F)$ und

$$\boldsymbol{\alpha}(T) \leqslant \boldsymbol{\alpha}(S). \tag{4.1}$$

Die gewöhnliche Operatorennorm macht jedes injektive Operatorenideal zu einem injektiven Normideal — ein Sachverhalt, der aber wiederum nur dann von Interesse sein wird, wenn auf diese Weise ein bezüglich der Operatorennorm vollständiges Normideal entsteht, wie es etwa bei dem Ideal der kompakten Operatoren der Fall ist.

Ziel der Betrachtungen dieses Abschnittes ist es, die injektive Hülle $\boldsymbol{A}_I$ eines beliebigen vollständigen Normideals $\boldsymbol{A}$ so mit einer Idealnorm $\boldsymbol{\alpha}_I$ auszustatten, daß ein vollständiges injektives Normideal entsteht.

Satz 4.1. *Es sei $\boldsymbol{A}$ ein beliebiges Normideal mit $\boldsymbol{\alpha}$ als Idealnorm. Dann wird durch den Ansatz*

$$\boldsymbol{\alpha}_I(T) = \inf\{\boldsymbol{\alpha}(S) \colon S \in \boldsymbol{A}(E, G) \text{ mit } \|Tx\| \leqslant \|Sx\|\}$$

auf jeder einzelnen Komponente $\boldsymbol{A}_I(E, F)$ der injektiven Hülle $\boldsymbol{A}_I$ von $\boldsymbol{A}$ eine Norm definiert. Diese Norm ist Idealnorm für $\boldsymbol{A}_I$ und macht $\boldsymbol{A}_I$ zu einem injektiven Normideal. Aus der Vollständigkeit von $\boldsymbol{A}$ bzgl. $\boldsymbol{\alpha}$ ergibt sich die Vollständigkeit von $\boldsymbol{A}_I$ bzgl. $\boldsymbol{\alpha}_I$.

Beweis. Die Normeigenschaften von $\boldsymbol{\alpha}_I$ auf $\boldsymbol{A}_I(E, F)$ sind leicht zu verifizieren. An $\|Tx\| \leqslant \|Sx\|$ kann man

$$\|T\| \leqslant \|S\|$$

ablesen. Beruft man sich weiter auf

$$\|S\| \leqslant \boldsymbol{\alpha}(S),$$

so gewinnt man die Aussage

$$\|T\| \leqslant \boldsymbol{\alpha}_I(T).$$

Es gilt also

$$\boldsymbol{\alpha}_I(T) \geqslant 0 \text{ und } \boldsymbol{\alpha}_I(T) = 0 \text{ nur im Falle } T = 0. \tag{n_1}$$

Die Homogenität

(n$_2$) $$\alpha_I(\lambda T) = |\lambda|\,\alpha_I(T)$$

liegt auf der Hand. Der Beweis der Dreiecksungleichung

(n$_3$) $$\alpha_I(T_1+T_2) \leqslant \alpha_I(T_1)+\alpha_I(T_2)$$

vollzieht sich folgendermaßen. Zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ werden Abbildungen $S_1 \in \boldsymbol{A}(E, G_1)$ und $S_2 \in \boldsymbol{A}(E, G_2)$ bestimmt mit

$$\|T_1x\| \leqslant \|S_1x\| \quad \text{und} \quad \alpha(S_1) \leqslant \alpha_I(T_1)+\varepsilon,$$
$$\|T_2x\| \leqslant \|S_2x\| \quad \text{und} \quad \alpha(S_2) \leqslant \alpha_I(T_2)+\varepsilon.$$

Eine analoge Konstruktion zu derjenigen, die uns im Abschnitt 2 zu zwei Abbildungen $T_1 \in \boldsymbol{A}(E, F_1)$ und $T_2 \in \boldsymbol{A}(E, F_2)$ eine auf E erklärte Abbildung

(2.9) $$T = I_1T_1+I_2T_2$$

vom Typ $\boldsymbol{A}$ geliefert hat, führt uns jetzt zu einer auf E erklärten Abbildung

(4.2) $$S = I_1S_1+I_2S_2$$

vom Typ $\boldsymbol{A}$. Entsprechend der Festsetzung der Norm auf dem Bildraum von S gilt

$$\|Sx\| = \|S_1x\|+\|S_2x\|.$$

Daraus resultiert für die Norm von $(T_1+T_2)x$ im Raum F die Abschätzung

(4.3) $$\|(T_1+T_2)x\| \leqslant \|Sx\|,$$

denn es besteht die Ungleichungskette

$$\|(T_1+T_2)x\| \leqslant \|T_1x\|+\|T_2x\| \leqslant \|S_1x\|+\|S_2x\|.$$

Die Abschätzung (4.3) läßt die Schlußfolgerung

$$\alpha_I(T_1+T_2) \leqslant \alpha(S)$$

zu. Die α-Norm von S wiederum kann im Anschluß an (4.2) durch

$$\alpha(S) \leqslant \alpha(I_1S_1)+\alpha(I_2S_2) \leqslant \alpha(S_1)+\alpha(S_2)$$

abgeschätzt werden. Berücksichtigt man schließlich noch

$$\alpha(S_1) \leqslant \alpha_I(T_1)+\varepsilon \quad \text{und} \quad \alpha(S_2) \leqslant \alpha_I(T_2)+\varepsilon,$$

so stellt sich das Ergebnis

$$\alpha_I(T_1+T_2) \leqslant \alpha_I(T_1)+\alpha_I(T_2)+2\varepsilon$$

ein. Die Dreiecksungleichung (n$_3$) folgt von hier aus durch den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$.

Es werde jetzt eine Abbildung T aus $\boldsymbol{A}_I(E, F)$ mit einer beliebigen Abbildung R aus $\boldsymbol{L}(F, G)$ verknüpft. Der Ausdruck für die Norm

$$\alpha_I(RT) = \inf\{\alpha(S) \colon S \in \boldsymbol{A}(E, Z) \text{ mit } \|RTx\| \leqslant \|Sx\|\}$$

kann dann dadurch vergrößert werden, daß man den Abbildungen S vom Typ $\boldsymbol{A}$ an Stelle von

$$\|RTx\| \leqslant \|Sx\|$$

die schärfere Bedingung

$$\|R\| \cdot \|Tx\| \leqslant \|Sx\|$$

auferlegt. So tritt die Idealeigenschaft

(N)(a) $$\alpha_I(RT) \leqslant \|R\|\,\alpha_I(T)$$

zutage.

Für das Produkt einer Abbildung R aus $\boldsymbol{L}(E, F)$ mit Abbildung T aus $\boldsymbol{A}_I(F, G)$ hat man entsprechend

$$\alpha_I(TR) = \inf\{\alpha(S) \colon S \in \boldsymbol{A}(E, Z) \text{ mit } \|TRx\| \leqslant \|Sx\|\}.$$

Eine Abschätzung von $\alpha_I(TR)$ nach oben ergibt sich aus der zusätzlichen Forderung nach einer Produktdarstellung

$$S = \tilde{S}R \quad \text{mit } \tilde{S} \in \boldsymbol{A}(F, Z)$$

für die zulässigen Abbildungen S aus $\boldsymbol{A}(E, Z)$. Da die Idealnorm α auf $\boldsymbol{A}$ selbst die Idealeigenschaft

(N)(b) $$\alpha(\tilde{S}R) \leqslant \|R\|\,\alpha(\tilde{S})$$

besitzt, kann weiterhin die Infimumsbildung anstatt über $\alpha(\tilde{S}R)$ über $\|R\|\,\alpha(\tilde{S})$ erstreckt werden, d.h.

$$\alpha_I(TR) \leqslant \inf\{\|R\|\,\alpha(\tilde{S}) \colon \tilde{S} \in \boldsymbol{A}(F, Z) \text{ mit } \|TRx\| \leqslant \|\tilde{S}Rx\|\}.$$

Mit einer nochmaligen Vergrößerung des Infimums ist zu rechnen, wenn

$$\|Ty\| \leqslant \|\tilde{S}y\|$$

nicht nur für die Bildelemente $y = Rx$, sondern für beliebige Elemente y aus F gefordert wird. Auf diese Weise kommt die Abschätzung

$$\alpha_I(TR) \leqslant \inf\{\|R\|\,\alpha(\tilde{S}) \colon \tilde{S} \in \boldsymbol{A}(F, Z) \text{ mit } \|Ty\| \leqslant \|\tilde{S}y\|\}$$

zustande, die endgültig zu

(N)(b) $$\alpha_I(TR) \leqslant \|R\|\,\alpha_I(T)$$

führt.

Die Idealnorm α_I macht das injektive Operatorenideal $\boldsymbol{A}_I$ zu einem injektiven Normideal. Ist nämlich $T_0 \in \boldsymbol{A}_I(E, F)$ und T eine auf E erklärte lineare Abbildung mit

$$\|Tx\| \leqslant \|T_0 x\|,$$

so kann jede auf E erklärte Abbildung S vom Typ $\boldsymbol{A}$ mit

$$\|T_0 x\| \leqslant \|Sx\|$$

auch zur Abschätzung von $\|Tx\|$ verwendet werden. Aus dieser Bemerkung wird

$$\alpha_I(T) \leqslant \alpha_I(T_0)$$

ersichtlich.

Zum Beweis der Vollständigkeit von $\boldsymbol{A}_I$ bzgl. α_I unter der Voraussetzung der Vollständigkeit von $\boldsymbol{A}$ bzgl. α ergänzen wir das *Zwischenresultat*

$$\boldsymbol{A}_I(E, \tilde{F}) = \boldsymbol{A}(E, \tilde{F}), \tag{3.3}$$

das sich auf Banachräume $\tilde{F}$ mit der Fortsetzungseigenschaft bezog, durch den *Zusatz*

$$\alpha_I(\tilde{T}) = \alpha(\tilde{T}) \quad \text{für } \tilde{T} \in \boldsymbol{A}(E, \tilde{F}). \tag{4.4}$$

Klar ist

$$\alpha_I(\tilde{T}) \leqslant \alpha(\tilde{T}).$$

Weiterhin operieren wir für beliebiges $\varepsilon > 0$ mit einer auf E erklärten Transformation S vom Typ $\boldsymbol{A}$, die

$$\|\tilde{T}x\| \leqslant \|S_\varepsilon x\| \quad \text{und} \quad \alpha(S_\varepsilon) \leqslant \alpha_I(T) + \varepsilon \tag{4.5}$$

leistet. Da $\tilde{T}$ den Banachraum E in einen Banachraum $\tilde{F}$ mit der Fortsetzungseigenschaft abbildet, ist Hilfssatz (3.1) anwendbar. Er sichert die Existenz einer linearen stetigen Abbildung R_ε, die eine Faktorisierung

$$\tilde{T} = R_\varepsilon S_\varepsilon \tag{4.6}$$

bewirkt, und deren Norm durch

$$\|R_\varepsilon\| \leqslant 1 \tag{4.7}$$

beschränkt ist. Aus (4.6) und (4.7) kann die Schlußfolgerung

$$\alpha(\tilde{T}) \leqslant \alpha(S_\varepsilon)$$

gezogen werden, die in Verbindung mit (4.5) die Aussage

$$\alpha(\tilde{T}) \leqslant \alpha_I(\tilde{T}) + \varepsilon$$

liefert. Die positive Zahl ε war beliebig gewählt worden; also gilt

$$\alpha(\tilde{T}) \leqslant \alpha_I(\tilde{T}),$$

und (4.4) ist bestätigt.

In $\boldsymbol{A}_I(E, F)$ sei jetzt eine α_I-Cauchy-Folge T_n vorgelegt. Durch Anwendung des Operators J, der den Banachraum F in den Raum $\tilde{F} = M(V^0)$ einbettet, verwandeln wir sie in eine Folge von Abbildungen

$$\tilde{T}_n = JT_n, \tag{4.8}$$

die in $\boldsymbol{A}_I(E, \tilde{F})$ und nach (3.3) daher auch in $\boldsymbol{A}(E, \tilde{F})$ enthalten ist. Diese Folge ist eine α-Cauchy-Folge in $\boldsymbol{A}(E, \tilde{F})$. Denn der Zusatz (4.4) gewährleistet zunächst

$$\alpha(\tilde{T}_n - \tilde{T}_m) = \alpha_I(\tilde{T}_n - \tilde{T}_m), \tag{4.9}$$

und wegen

$$\|(\tilde{T}_n - \tilde{T}_m)x\| = \|(T_n - T_m)x\|$$

und der Eigenschaft (IN) der Idealnorm α_I hat man weiter

$$\alpha_I(\tilde{T}_n - \tilde{T}_m) = \alpha_I(T_n - T_m). \tag{4.10}$$

Da $\boldsymbol{A}(E, \tilde{F})$ laut Voraussetzung vollständig bzgl. α ist, gibt es in $\boldsymbol{A}(E, \tilde{F})$ eine Abbildung $\tilde{T}$ mit

$$\lim_{n \to \infty} \alpha(\tilde{T}_n - \tilde{T}) = 0. \tag{4.11}$$

Erst recht gilt dann

$$\lim_{n \to \infty} \|\tilde{T}_n - \tilde{T}\| = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n \to \infty} \tilde{T}_n x = \tilde{T}x$$

für jedes $x \in E$. Nun liegen die Bildelemente $\tilde{T}_n x$ sämtlich in F, und F ist ein abgeschlossener Teilraum von $\tilde{F}$. Demzufolge gehört auch $\tilde{T}x$ für jedes x aus E zum Raum F, d.h. $\tilde{T}$ besitzt eine Darstellung

$$\tilde{T} = JT$$

mit $T \in \boldsymbol{L}(E, F)$. Es ist aber sogar $T \in \boldsymbol{A}_I(E, F)$, denn das injektive Operatorenideal $\boldsymbol{A}_I$ unterliegt der Bedingung (UB). Eine Wiederholung der Bemerkungen, mit denen die Gleichungen (4.9) und (4.10) kommentiert wurden, zeigt jetzt

$$\alpha(\tilde{T}_n - \tilde{T}) = \alpha_I(\tilde{T}_n - \tilde{T})$$

und

$$\alpha_I(\tilde{T}_n - \tilde{T}) = \alpha_I(T_n - T).$$

Die Grenzwertbeziehung (4.11) überträgt sich also auf die α_I-Norm von $T_n - T$ und ergibt

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_I(T_n - T) = 0.$$

Damit ist der Beweis für die Vollständigkeit des Raumes $\boldsymbol{A}_I(E,F)$ bzgl. α_I beendet.

Als Demonstrationsbeispiel für die Bildung der injektiven Hülle eines vollständigen Normideals behandeln wir das *Ideal* $\boldsymbol{N}$ *der nuklearen Abbildungen*. Die zur injektiven Hülle $\boldsymbol{N}_I$ von $\boldsymbol{N}$ gehörigen Abbildungen sollen *injektiv-nuklear* genannt werden. Wie sich herausstellt, deckt sich der Begriff der injektiv-nuklearen Abbildung mit dem der quasinuklearen Abbildung. Nach Pietsch (vgl. [3], [4]) heißt eine Abbildung $T\in\boldsymbol{L}(E,F)$ *quasinuklear*, wenn es eine Folge von stetigen Linearformen a_i über E mit

$$\sum_{i=1}^{\infty}\|a_i\|<+\infty$$

gibt, so daß sich die Norm $\|Tx\|$ für alle $x\in E$ durch

$$\|Tx\|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|\langle x,a_i\rangle| \tag{4.12}$$

abschätzen läßt.

In der Tat, einer derartigen quasinuklearen Abbildung T von E in F kann eine nukleare Abbildung S von E in l^1 zugeordnet werden, nämlich die Abbildung

$$Sx=\sum_{i=1}^{\infty}\langle x,a_i\rangle e_i,$$

die das Element x aus E auf die in l^1 gelegene Folge $\{\langle x,a_i\rangle\}$ abbildet. Die e_i bezeichnen dabei die Einheitsfolgen in l^1. Da die Norm des Bildelementes Sx in l^1 gerade durch

$$\|Sx\|=\sum_{i=1}^{\infty}|\langle x,a_i\rangle|$$

geliefert wird, kann an Stelle von (4.12) auch

$$\|Tx\|\leqslant\|Sx\| \tag{2.6}$$

geschrieben werden. Durch diese Ungleichung aber weist sich T als injektiv-nukleare Abbildung von E in F aus. Ist umgekehrt T als injektiv-nukleare Abbildung von E in F vorgegeben, so besteht mit einer geeigneten nuklearen Abbildung S von E in einen Banachraum G die Abschätzung (2.6). Für S kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit ein Ansatz

$$Sx=\sum_{i=1}^{\infty}\langle x,a_i\rangle y_i$$

gemacht werden mit stetigen Linearformen a_i über E und Elementen y_i aus G, die den Bedingungen

$$\sum_{i=1}^{\infty}\|a_i\|<+\infty \text{ und } \|y_i\|=1 \quad \text{für } i=1,2,3,\ldots$$

genügen. Durch

$$\|Sx\|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|\langle x,a_i\rangle|$$

läßt sich die Abschätzung (2.6) jetzt zu (4.12) fortsetzen, und damit ist T als quasinukleare Abbildung von E in F erkannt.

Als *quasinukleare Norm einer quasinuklearen Abbildung* T wird in den Arbeiten [3] und [4] das über alle Summen $\sum_{i=1}^{\infty}\|a_i\|$ von zulässigen Linearformen a_i erstreckte Infimum

$$\pi_0(T)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\|a_i\|:\ \|Tx\|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|\langle x,a_i\rangle|\right\}$$

definiert. Wie man leicht verifiziert, fällt die quasinukleare Norm $\pi_0(T)$ mit der auf der injektiven Hülle $\boldsymbol{N}_I$ von $\boldsymbol{N}$ erklärten Idealnorm $\nu_I(T)$ zusammen. So ergibt sich die Übereinstimmung des Ideals der quasinuklearen Abbildungen als vollständigem Normideal mit dem vollständigen Normideal $\boldsymbol{N}_I$ der injektiv-nuklearen Abbildungen. Satz 6 der Arbeit [4] bringt die allgemein gültige Inklusion

$$\boldsymbol{A}\subset\boldsymbol{A}_I$$

zum Ausdruck, und Satz 7 ordnet sich der Aussage

$$\boldsymbol{A}_I(E,\tilde{F})=\boldsymbol{A}(E,\tilde{F}) \tag{3.3}$$

mit dem Zusatz

$$\alpha_I(\tilde{T})=\alpha(\tilde{T}) \tag{4.4}$$

unter, die sich auf Banachräume $\tilde{F}$ mit der Fortsetzungseigenschaft bezieht. Theorem 1 schließlich findet sich in dem hier bewiesenen Satz 3.1 wieder. Da ferner das Ideal $\boldsymbol{N}$ der nuklearen Abbildungen in jedem vollständigen Normideal enthalten ist, kann automatisch die *Zugehörigkeit der injektiv-nuklearen Abbildungen zu jedem vollständigen injektiven Normideal* gefolgert werden. Von hier aus erhält man einen Zugang zu den Sätzen 11 und 4 der bereits zitierten Arbeit [4]. Es handelt sich dabei um die Feststellung, daß jede quasinukleare Abbildung absolutsummierend bzw. kompakt ist.

Literaturnachweis

[1] N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques*, Chap. II, Paris 1953.
[2] K. Floret und J. Wloka, *Einführung in die Theorie der lokalkonvexen Räume*, 1968.
[3] A. Pietsch, *Nukleare lokalkonvexe Räume*, Berlin 1965.
[4] — *Quasinukleare Abbildungen in normierten Räumen*, Math. Annalen 165 (1966), S. 76-90.
[5] — und H. Triebel, *Interpolationstheorie für Banachideale von beschränkten linearen Operatoren*, Studia Math. 31 (1968), S. 95-109.
[6] J. Lindenstrauss and A. Pełczyński, *Absolutely summing operators in L_p-spaces and their applications*, ibidem 29 (1968), S. 275-326.

STUDIA MATHEMATICA, T. XXXVIII. (1970)

Colloquium on
Nuclear Spaces and Ideals in Operator Algebras

The conjugate of the product of operators

by

J. A. W. VAN CASTEREN and SEYMOUR GOLDBERG* (College Park, Md.)

Throughout this paper S is a linear operator with domain $D(S)$ dense in Banach space X, kernel $N(S)$ and range $R(S)$ in Banach space Y. T is a linear operator with domain dense in Y and range in Banach space Z. T' and X' denote the conjugate of T and X, respectively.

In [3], Schechter proved the following theorem (Gustafson, Bull. A. M. S. 75, no. 4, proved the theorem for Hilbert space):

1. THEOREM. *If S and T are closed and $R(S)$ has finite codimension, then $(TS)' = S'T'$.*

We show that in a Hilbert space setting, Schechter's theorem is best in the following sense:

2. THEOREM. *Let S be a densely defined closed linear operator with domain and range in Hilbert space H. The adjoint $(TS)^* = S^*T^*$ for all closed densely defined linear operators T with domain and range in H if and only if $R(S)$ has finite codimension.*

In proving theorem 2 the following lemma is used:

3. LEMMA. *Given a closed infinite-dimensional subspace M of Hilbert space H, there exists a closed linear operator with domain a proper dense subspace of H and range contained in M.*

Proof. Choose an infinite orthonormal subset $x_1, x_2, \ldots$ of M with closed linear span denoted by N. Define the map K from N into N by

$$Kz = \sum_{1}^{\infty} 2^{-k} \langle z, x_k \rangle x_k.$$

Then K is compact and 1-1. Since $Kx_j = 2^{-j}x_j$ and K is compact, $R(K)$ is a proper dense subspace of N by [2], III. 1.12. Hence $D = R(K) \oplus \oplus N^\perp \cap M \oplus M^\perp$ is a proper dense subspace of H and $B: D \to M$, defined by $B(Kz+u+v) = z$, $z \in N$, $u \in N^\perp \cap M$ and $v \in M^1$, is easily seen to be closed.

* Supported by NSF grant no. GP-12295