Note sur topologie exponentielle

par

M. Čoban (Moscou)

Soit X un espace topologique. Désignons par $A(X)$ la famille de tous les ensembles non-vides situés dans l'espace X.

La base de topologie de Vietoris (la topologie exponentielle) dans l'ensemble $A(X)$ est formée par les ensembles du type $\langle U_1, U_2, \ldots, U_s\rangle = \{L \in A(X) |\ L \subseteq \bigcup_{i=1}^{s} U_i;\ \ L \cap U_i \neq \emptyset,\ \ i = 1, \ldots, s\}$ les ensembles $U_1, U_2, \ldots, U_s$ étant ouverts dans l'espace X.

Remarque 1. Si $\langle B_1, \ldots, B_s\rangle \subseteq \langle L_1, \ldots, L_k\rangle$, alors $\bigcup_{i=1}^{s} B_i \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} L_j$; pour tout $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ il existe un $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ tel que $B_i \subset L_j$.

Dans ce qui suit nous allons étudier les sous-espaces de $A(X)$ suivants:

$F(X) = \{E \in A(X) |\ E$ est fermé$\}$;

$C(X) = \{L \in F(X) |\ L$ est compact$\}$;

$J_n(X) = \{B \in A(X) |$ card $B \leqslant n\}$, où n est un nombre naturel fixé.

Nous allons considérer tout d'abord les espaces normaux et les p-espaces; quelques problèmes concernant le poids de l'espace vont suivre.

Notations auxiliaires. La terminologie dont nous allons nous servir est empruntée aux travaux de Bourbaki [5] et Kuratowski [7] sauf pour les termes que nous définissons nous-mêmes ici.

Donc, nous désignons par les symboles ωX ou βX — selon le cas — la compactification de Wallman ou celle de Stone–Čech (si ωX ou βX existe pour l'espace X).

Nous allons appeler le *caractère* de l'ensemble M dans l'espace X le plus petit nombre cardinal $\chi_X(M)$ suffisant pour qu'il existe une famille des ensembles ouverts

$$\Omega = \{U_\alpha |\ \alpha \in \theta, \operatorname{card}\theta = \chi_X(M)\}$$

tels que pour tout voisinage OM de M il existe un $\alpha \in \theta$ tel que $M \subseteq U_\alpha \subset OM$. L'espace X est dit un espace à *caractère dénombrable* si pour tout point $x \in X$ on a $\chi_X(x) \leqslant \aleph_0$. Le poids de l'espace X sera designé par $p(X)$. Un T_1-espace X sera dit un p-espace (cf. [3]), s'il existe une famille dénombrable $\{\gamma_n | \ n = 1, 2, \ldots\}$ des sous-ensembles, ouverts de ωX, telle que γ_n est un recouvrement de X pour $n = 1, 2, \ldots$ et pour tout point $x \in X$ on a $\bigcap_{n=1}^{\infty} \gamma_n x \subseteq X$ (¹).

Soient X un T_1-espace et ωX la compactification de Wallman. On sait qu'à chaque point $\xi \in \omega X$ correspond un certain système maximal centrifié $S(\xi) = \{P_a\}$ des ensembles fermés dans l'espace X (c.-à-d. tel que $P_{a_1} \cap P_{a_2} \cap \ldots \cap P_{a_k} \neq 0$ pour chaque suite $a_1, a_2, \ldots, a_k$ des indices). L'ensemble V ouvert dans ωX sera dit *quasi-fermé*, si pour tout ensemble $F \subset V \cap X$ fermé dans X on a $[F]_{\omega X} \subseteq V$. La somme de deux ensembles quasi-formés est quasi-fermée, elle aussi (voir [12]). Les ensembles du type $O\langle U\rangle = \{\xi \in \omega X | \text{ il existe un } P_a \in S(\xi) \text{ tel que } P_a \subset U\}$, où U est ouvert dans X, sont quasi-fermés. On admet que tout espace est un espace de Tychonoff, si le contraire n'est pas explicitement mentionné.

L'espace $A(X)$ est T_1-espace si et seulement si l'espace X est discret. E. Michael dans [9] démontra le théorème suivant: si X est compact, $F(X)$ l'est aussi. A son tour, V. Ivanova démontra dans [6] que $F(N)$, où N désigne l'ensemble des nombres naturels avec la topologie discrète, est un espace non-normal. Donc, étant donnés les résultats de Michael et Ivanova et aussi un théorème de B. Levchainko (cf. [8]) nous sommes à même de formuler

PROPOSITION 1. *Soit X un espace métacompact (c.-à-d. ponctuellement paracompact). La condition nécessaire et suffisante pour que $F(X)$ soit un espace normal est que X soit compact.*

Le problème d'établir sous quelles conditions $C(X)$ est normal reste ouvert. Dans cet ordre d'idées nous allons démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) *X est un p-espace paracompact;*

(b) *$J_n(X)$ est un p-espace paracompact pour tout nombre naturel n;*

(c) *$C(X)$ est un p-espace paracompact.*

Le Théorème 1 résultera de notre Proposition 2 et du Théorème 2 (voir infra).

PROPOSITION 2. *La transformation de l'espace X dans espace Y— $f\colon X \to Y$ — est propre (²) si et seulement si la transformation $f_c\colon C(X) \to C(Y)$ où $f_c\Phi = f\Phi$ pour tout élément $\Phi \in C(X)$, est propre.*

(¹) Soit $M \subseteq X$ et $\gamma = \{\Gamma_\beta\}$ une famille des sous-ensembles de X. Nous écrivons: $\gamma M = \bigcup \{\Gamma_\beta \in \gamma | \ \Gamma_\beta \cap M \neq \emptyset\}$.

(²) On dit qu'une transformation continue $f\colon X \to Y$ est propre si f est fermé et $\overset{-1}{f} y$ est compact pour tout point $y \in Y$.

Démonstration. En admettant que la transformation $f_c\colon C(X) \to C(Y)$ est propre, on voit aisément que la transformation $f\colon X \to Y$ est propre aussi. Admettons donc que la transformation $f\colon X \to Y$ est propre. Considérons le prolongement $\tilde{f}\colon \beta X \to \beta Y$ de la transformation f sur les compactifications de Stone–Čech.

Etant donné que les espaces $C(\beta X)$ et $C(\beta Y)$ sont normaux et compacts, la transformation $\tilde{f}_c\colon C(\beta X) \to C(\beta Y)$ est propre. La transformation f étant propre, nous avons $f(\beta X \setminus X) \subset \beta Y \setminus Y$, donc $\tilde{f}_c^{-1}\tilde{f}_c C(X) = C(X) = \tilde{f}_c^{-1} C(Y)$ et $f_c = \tilde{f}_c | C(X)$. C'est pourquoi il suffit de démontrer.

PROPOSITION 3′. *Soit bX une compactification de Hausdorff de l'espace X. La transformation $\varphi\colon C(X) \to F(bX)$ — où pour tout élément $E \in C(X)$ on a $\varphi E = E$ — établit un homéomorphisme de $C(X)$ avec $\varphi C(X) \subseteq F(bX)$. La démonstration de cette proposition est similaire à celle de la proposition suivante.*

PROPOSITION 3. *Considérons la transformation $\varphi\colon F(X) \to F(\omega X)$ où $\varphi L = [L]_{\omega X}$ pour tout élément $L \in F(X)$. Pour tout T_1-espace X la transformation φ est un homéomorphisme de $F(X)$ sur $\varphi F(X) \subseteq F(\omega X)$.*

Démonstration. Il est aisé de voir que la transformation φ est biunivoque. Démontrons maintenant que φ est continue. Soient $A \in F(X)$ et $O\varphi A = \langle U_1, U_2, \ldots, U_s\rangle$, où les ensembles $U_1, U_2, \ldots, U_s$ sont ouverts dans ωX. Alors ils existent les ensembles $V_1, V_2, \ldots, V_s$ ouverts et quasi-fermés dans X tels que $[A]_{\omega X} \in \langle V_1, V_2, \ldots, V_s\rangle \subseteq \langle U_1, U_2, \ldots, U_s\rangle$. Donc, $\varphi \langle V_1 \cap X, V_2 \cap X, \ldots, V_s \cap X\rangle \leqslant O\varphi A$ et $A \in \langle V_1 \cap X, \ldots, V_s \cap X\rangle$. Ainsi la continuité de la transformation φ se trouve démontrée. Pour prouver que la transformation φ est bicontinue il nous reste à démontrer que la transformation φ^{-1} est continue. En effet, si $\Phi \in \varphi F(X)$ et $O\varphi^{-1}\Phi = \langle V_1, \ldots, V_s\rangle$, alors $\Phi \in \langle O\langle V_1\rangle, \ldots, O\langle V_s\rangle\rangle$ et pour tout élément $\Phi' \in \langle O\langle V_1\rangle, \ldots, O\langle V_s\rangle\rangle \cap \varphi F(X)$ on a $\varphi^{-1}\Phi' \in \langle V_1, \ldots, V_s\rangle$, ce qui achève la démonstration des Propositions 2 et 3.

THÉORÈME 2. *La transformation $\varphi_n\colon X^n \to J_n(X)$ — où $\varphi_n(x_1, \ldots, x_n) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — est ouverte, fermée, continue et d'ordre fini* (³).

Démonstration. La continuité de la transformation φ_n résulte de la définition de la topologie de Vietoris dans l'espace $A(X)$.

Considérons l'ensemble B fermé dans l'espace X^n et un point $\{x_1, \ldots, x_k\} \notin \varphi_n B$, où $k \leqslant n$. Etant donné que X est un espace régulier, φ_n étant d'ordre fini, il s'ensuit qu'il existe des voisinages $Ox_1, \ldots, Ox_k$, disjoints deux à deux tels que pour tout point $(x_{i(1)}, \ldots, x_{i(n)}) \in \varphi^{-1}\{x_1, \ldots, x_k\}$ on a $\prod_{j=1}^{n} Ox_{i(j)} \cap B = \emptyset$.

(³) On dit qu'une transformation $f\colon X \to Y$ est d'ordre fini si pour tout point $y \in Y$ l'ensemble $f^{-1}y$ est fini.

Nous allons démontrer maintenant que $\langle Ox_1, \ldots, Ox_k\rangle \cap \varphi_n B = \emptyset$.

Admettons le contraire, c.-à-d. qu'il existe un point $\{y_1, y_2, \ldots, y_s\} \in \langle Ox_1, Ox_2, \ldots, Ox_k\rangle \cap \varphi_n B$, où $k \leqslant s \leqslant n$. Par conséquent, il existe un point $(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in B \cap \varphi_n^{-1}\{y_1, y_2, \ldots, y_s\}$. Vu que $\{y_1, \ldots, y_s\} \in \langle Ox_1, \ldots, Ox_k\rangle$ pour tout $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, il existe un $Ox_{i(j)}$ tel que $z_j \in Ox_{i(j)}$. On obtient donc $(z_1, z_3, \ldots, z_n) \in \prod_{j=1}^{n} Ox_{i(j)}$ ce qui est en contradiction avec la condition $\prod_{j=1}^{n} Ox_{i(j)} \cap B = \emptyset$. Ainsi la transformation φ_n est fermée. Maintenant nous allons démontrer que la transformation φ_n est ouverte. Choisissons un voisinage $O(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} Ox_i$ du point $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X^n$ tel que $Ox_i = Ox_j$ pour $x_i = x_j$ et $Ox_i \cap Ox_j = \emptyset$ dans le cas contraire. Nous allons démontrer maintenant que $\varphi_n O(x_1, \ldots, x_n) \supseteq \langle Ox_1, \ldots, Ox_n\rangle$.

En effet, si $\{y_1, y_2, \ldots, y_s\} \in \langle Ox_1, \ldots, Ox_n\rangle$, alors il existe un point $(y_{i(1)}, y_{i(2)}, \ldots, y_{i(n)}) \in \varphi_n^{-1}\{y_1, y_2, \ldots, y_s\}$ tel que $y_{i(j)} \in Ox_j$ pour tout $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Donc, $(y_{i(1)}, y_{i(2)}, \ldots, y_{i(n)}) \in O(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Ainsi le Théorème 2 se trouve démontré. En vertu d'un théorème de Michael ([9], Théorème 4.9. 13) l'espace $C(X)$ est métrisable si et seulement si l'espace X est métrisable. Le théorème Archangielski dans [3] et le résultat cité de Michael supplementés de notre Proposition 2 et du Théorème 2 constituent ensemble la démonstration du Théorème 1.

Exemple. Soit X l'ensemble des nombres réels. Un voisinage arbitraire $O\xi$ d'une point quelconque $\xi \in X$ est formé du semi-segment $[\xi, x\rangle$, où $x > \xi$ (voir [1], l'espace A_7). L'espace X est un espace de Lindelöf, parfaitement normal.

Les ensembles $A = \{(r, -r) | r$ est un point rationnel$\}$ et $B = \{(i, -i) | i$ est un point irrationnel$\}$ sont fermés et disjoints dans l'espace X^2, mais il n'existe pas un ensemble ouvert G tel que $A \subset G$ et $[G] \cap B = \emptyset$.

Conformément au Théorème 2 les ensembles $\varphi_2 A$ et $\varphi_2 B$ sont fermés et disjoints dans l'espace $J_2(X)$.

Il est évident qu'il n'existe pas un ensemble U ouvert dans l'espace $J_2(X)$ tel que $\varphi_2 A \subset U$ et $[U] \cap \varphi_2 B = \emptyset$.

Vu que l'espace $J_2(X)$ est un sous-espace fermé de l'espace $C(X)$; ce dernier n'est pas un espace normal.

Le Théorème 2 implique, en particulier, que l'espace $J_n(X)$ hérite de l'espace X toute propriété topologique W invariante par rapport à la multiplication cartesienne finie et par rapport aux transformations continues à la fois ouvertes, fermées et d'ordre fini. Si, en outre, W est héreditaire par rapport aux sous-ensembles fermés, W appartient à $J_n(X)$ si et seulement si W appartient à X. Nous allons donner un exemple:

Proposition 4. *Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(a) *X — est un p-espace;*

(b) *$J_n(X)$ — est un p-espace pour un certain nombre naturel n;*

(c) *$J_n(X)$ — est un p-espace pour tout nombre naturel n.*

Nous allons introduire une notation qui sera utilisée dans les démonstrations des Théorèmes 3 et 4.

Soit $\gamma = \{V_\alpha | \alpha \in \theta\}$ une famille des ensembles ouverts dans l'espace X. Nous allons écrire $\langle n\cdot\gamma\rangle$ pour $\{\langle V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_n}\rangle | \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \theta\}$ et $\langle\gamma\rangle$ pour $\bigcup_{n=1}^{\infty}\langle n\cdot\gamma\rangle$.

Théorème 3. *S'il existe une famille $\{\gamma_k | k = 1, 2, \ldots\}$ des recouvrements de l'espace X composé des ensembles ouverts dans ωX et telle que $\bigcap_{k=1}^{\infty}\gamma_k\Phi \subseteq X$ pour tout compact $\Phi \subset X$ l'espace $C(X)$ est un p-espace.*

Démonstration. Il est évident que pour tout nombre k la famille $\langle\gamma_k\rangle$ des ensembles ouverts dans $F(\omega X)$ recouvre l'espace $C(X) \subseteq F(\omega X)$ tout entier. Soit $\Phi \in C(X)$. Nous allons démontrer que $\bigcap_{k=1}^{\infty}\langle\gamma_k\rangle\Phi \subseteq C(X)$.

Posons, en effet, $L \in F(\omega X)\setminus C(X)$. Alors il existe un point x tel que $x \in L \cap (\omega X\setminus X)$. D'autre part, il existe un nombre naturel k tel que $x \notin \gamma_k\Phi$. Par conséquent, il vient $\langle\gamma_k\rangle\Phi \notin L$. Donc, $\bigcap_{k=1}^{\infty}\langle\gamma_k\rangle\Phi \subseteq C(X)$ pour tout élément $\Phi \in C(X)$. Ainsi, le Théorème 3 se trouve démontré (cf. [3], Théorème 1.7).

Théorème 4. *Si l'espace X est complet au sens de Čech, $C(X)$ l'est aussi.*

Démonstration. Soit $\{G_n | n = 1, 2, \ldots\}$ une famille des ensembles ouverts dans X telle que $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = X$.

Chaque ensemble $\langle G_n\rangle$ est ouvert dans $F(\beta X)$. Prenons un élément $\Phi \in F(\beta X)\setminus C(X)$. Alors il existe un point x tel que $x \in \Phi \cap (\beta X\setminus X)$. En même temps, il existe un nombre naturel n tel que $x \notin G_n$. Donc, $\Phi \notin \langle G_n\rangle$. Ainsi, nous obtenons $\bigcap_{n=1}^{\infty}\langle G_n\rangle = C(X)$. Vu que tout sous-espace fermé d'un espace complet au sens de Čech est complet au sens de Čech, la démonstration du Théorème 4 est achevée.

Théorème 5. *Si l'espace X est muni d'une base ponctuellement dénombrable, le même reste vrai pour l'espace $C(X)$.*

En effet, si la famille ω est une base ponctuellement dénombrable de l'espace X, alors la famille $\langle\omega\rangle$ constitue une base de l'espace $C(X)$; d'après un théorème de A. Michainko (voir [10]) elle est ponctuellement dénombrable.

Théorème 6. *Pour tout T_1-espace X le poids de l'espace $F(X)$ est égal au poids de la compactification de Wallman ωX de l'espace X.*

Démonstration. Admettons que le poids de l'espace $F(X)$ ne dépasse pas le nombre cardinal τ. Alors il existe une famille finie additive $w = \{U_a|\ a \in \theta,\ \text{card}\ \theta = \tau\}$ des ensembles ouverts dans l'espace X telle que pour tout élément $A \in F(X)$ et pour tout voisinage OA dans l'espace $F(X)$ ils existent les éléments $U_{a_1}, \ldots, U_{a_n} \in w$ tels que

$$A \in \langle U_{a_1}, U_{a_2}, \ldots, U_{a_n}\rangle \subseteq OA\,.$$

Nous allons démontrer que la famille $w = \{O\langle U_a\rangle|\ a \in \theta\}$ constitue une base dans l'espace ωX. Soit $\xi \in \omega X$ et $O\xi$ un voisinage de ξ dans ωX.

Prenons un ensemble V quasi-fermé et ouvert dans ωX tel que

$$\xi \in V \subseteq O\langle V \cap X\rangle \subseteq O\xi \quad \text{et} \quad P_a \subseteq V \cap X, \quad \text{pour un } P_a \in S(\xi)\,.$$

Alors il existe un élément $U_{a'} \in w$ tel que $P_a \in \langle U_{a'}\rangle \subseteq \langle V \cap X\rangle$. Donc, $P_a \subseteq U_{a'} \subseteq V \cap X$.

Ainsi nous avons démontré que $\xi \in O\langle U_{a'}\rangle \subseteq O\xi$. En même temps, nous avons établi l'inégalité $p(\omega X) \leqslant p(F(X))$. Il vient, d'après la Proposition 3, que $p(F(X)) \leqslant p(F(\omega X))$.

Il résulte d'un lemme de Michael ([9], Lemma 2.3.1) que

$$p(\omega X) = p(F(\omega X))\,.$$

Par conséquent, on obtient

$$p(\omega X) = p(F(X)) = p(F(\omega X))\,.$$

Ceci achève la démonstration du Théorème 6.

D'après V. Ponomariov (cf. [14]), la famille $w = \{U_a\}$ des ensembles ouverts dans l'espace X est une famille *dense*, si pour tout ensemble W ouvert dans l'espace X il existe un $U_a \in w$ tel que $U_a \subset V$. Le plus petit nombre cardinal $\pi\text{-}p(X)$ tel qu'il existe une famille dense de puissance $\pi\text{-}p(X)$ sera dit le π-poids de l'espace X.

Proposition 5. *Pour tout espace topologique on a la formule suivante:*

$$\pi\text{-}p(X) = \pi\text{-}p(F(X)) = \pi\text{-}p(C(X)) = \pi\text{-}p(A(X))\,.$$

Démonstration. Si la famille $w = \{U_a\}$ est dense dans l'espace X, alors — en vertu de la remarque 1 — il vient que la famille $\langle\omega\rangle$ est dense dans l'espace $F(X)$.

Soit $\Omega = \{G_a|\ a \in \theta\}$ une famille dense dans l'espace $F(X)$. Pour tout élément $a \in \theta$ ils existent des ensembles $U_{1(a)}, U_{2(a)}, \ldots, U_{s(a)}$ ouverts dans l'espace X tels que $\langle U_{1(a)}, U_{2(a)}, \ldots, U_{s(a)}\rangle \subseteq G_a$. On voit que la famille $\gamma = \{U_{i(a)}|\ i(a) = 1(a), \ldots, s(a);\ a \in \theta\}$ est dense dans l'espace X.

Ainsi nous avons démontré l'égalité $\pi\text{-}p(X) = \pi\text{-}p(F(X))$. Les autres égalités, c.-à-d. $\pi\text{-}p(X) = \pi\text{-}p(C(X))$ et $\pi\text{-}p(X) = \pi\text{-}p(A(X))$, peuvent être démontrées d'une façon analogue.

Soit A un sous-ensemble de X. Nous disons que le *π-poids extérieur de l'ensemble A relatif à X* ne surpasse pas le nombre cardinal τ, s'il existe une famille $\Omega = \{U_a|\ U_a \cap A \neq \emptyset,\ a \in \theta,\ \text{card}\ \theta \leqslant \tau\}$ des ensembles ouverts dans l'espace X telle que pour chaque ensemble V ouvert dans X, où $V \cap A \neq \emptyset$, il existe $U_a \subset V$.

Dans ce cas nous écrivons $\pi\text{-}p(A, X) \leqslant \tau$.

Remarque 2. Admettons qu'il existe dans l'ensemble A un sous-ensemble dense de puissance τ. Si $\chi_X(x) \leqslant \tau$ pour tout point $x \in A \subseteq X$, alors $\pi\text{-}p(A, X) \leqslant \tau$.

Lemme 1. *Pour chaque élément $A \in F(X)$ nous avons $\chi_{F(X)}(A) \leqslant \tau$ si et seulement si $\chi_X(A) \leqslant \tau$ et $\pi\text{-}p(A, X) \leqslant \tau$.*

Démonstration. Soit $\chi_{F(X)}(A) \leqslant \tau$. Alors il existe une famille $\{\langle U_{1(a)}, \ldots, U_{s(a)}\rangle|\ a \in \theta,\ \text{card}\ \theta \leqslant \tau\}$ constituant une base de voisinages de l'élément A dans $F(X)$. Soit OA un voisinage arbitraire de l'ensemble A dans l'espace X. Il existe un élément $a \in \theta$ tel que $\langle U_{1(a)}, \ldots, U_{s(a)}\rangle \subseteq \langle OA\rangle$. Donc, $A \subseteq \bigcup_{i=1(a)}^{s(a)} U_i \subseteq OA$. Soit V un ensemble ouvert dans l'espace X satisfaisant à $V \cap A \neq \emptyset$. Alors il existe un élément $a \in \theta$ tel que $A \in \langle U_{1(a)}, \ldots, U_{s(a)}\rangle \subseteq \langle X, V\rangle$. Donc, en vertu de la Remarque 1, on a $U_i \subset V$ pour un $i \in \{1(a), \ldots, s(a)\}$. Ainsi nous avons démontré les inégalités $\chi_X(A) \leqslant \tau$, et $\pi\text{-}p(A, X) \leqslant \tau$. Supposons maintenant que ces inégalités sont satisfaites. Il existe alors une famille $\{V_\beta|\ \beta \in B,\ \text{card} B \leqslant \tau\}$ qui détermine le π-poids extérieur de l'ensemble A relatif à X et la famille $\{U_a|\ a \in \theta,\ \text{card}\,\theta \leqslant \tau\}$ qui détermine le caractère de l'ensemble A dans l'espace X.

On voit aussitôt que la famille $\{\langle U_a, U_{\beta_1}, \ldots, U_{\beta_s}|\ a \in \theta,\ \beta_i \in B\}$ constitue une base de l'élément A dans l'espace $F(X)$. Donc, $\chi_{F(X)}(A) \leqslant \tau$.

Le Lemme 1 implique le corollaire suivant:

Corollaire 1. *Si l'élément $A \in F(X)$ a le caractère τ dans l'espace $F(X)$, alors il existe un sous-ensemble $A' \subset A$ de puissance τ dense dans l'ensemble A.*

Lemme 2. *Soit $\chi_X(x) \leqslant \tau$ pour tout point $x \in X$. Soit, ensuite, un ensemble $\{x_a|\ a \in \theta,\ card\ \theta \leqslant \tau\}$ dense dans l'espace X. Si l'ensemble A est dense dans X, alors il existe un sous-ensemble de puissance $\leqslant \tau$, dense dans l'ensemble A.*

En effet, si la famille $\omega_a = \{V_{a\beta}|\ \beta \in B_a,\ \text{card}\ B_a \leqslant \tau\}$ est une base du point x_a dans l'espace X, alors l'ensemble $\{x_{a\beta} \in V_{a\beta} \cap A|\ \beta \in B_a,\ a \in \theta\}$ est dense dans l'espace X.

Dans [9] Michael énonca l'assertion suivante (Proposition 4.5.2): Si X est un espace à caractère dénombrable, alors l'espace $C(X)$ est à caractère dénombrable aussi. Cependant cette assertion n'est pas juste en général.

THÉORÈME 7. *Pour tout espace compact X les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(1) *pour tout élément $A \in F(X)$ on a $\chi_{F(X)}(A) \leqslant \tau$;*

(2) *pour tout ensemble $B \subset X$ il existe un sous-ensemble $B' \subset B$ de puissance $\leqslant \tau$ dense dans B et tel que $\chi_X([B]) \leqslant \tau$.*

Démonstration (1)–(2). Soit B un sous-ensemble de X. Alors on a $[B] \in F(X)$ et $\chi_{F(X)}([B]) \leqslant \tau$. D'après le Lemme 1 il vient $\chi_X([B]) \leqslant \tau$. Il s'ensuit — en vertu du Corollaire 1 et du Lemme 2 — qu'il existe un sous-ensemble $B' \subset B$ de puissance $\leqslant \tau$, dense dans l'ensemble B.

(2)$\to$(1). Conformément à la Remarque 2, on peut admettre que pour tout ensemble B on a $\pi\text{-}p(B, X) \leqslant \tau$. Alors, en vertu du Lemme 1 on a $\chi_{F(X)}(A) \leqslant \tau$ pour tout élément $A \in F(X)$.

La démonstration du Théorème 7 se trouve ainsi achevée.

Ledit théorème entraîne le corollaire suivant:

COROLLAIRE 2. *Pour tout espace compact les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(1) *l'espace $F(X)$ est à caractère dénombrable;*

(2) *l'espace X est parfaitement normal et héréditairement séparable.*

Le Corollaire 2 et un théorème de V. E. Šnejder (cf [15]) impliquent le

THÉORÈME 8. *L'espace compact X est métrisable si et seulement si l'espace $F(X \times X)$ est à caractère dénombrable.*

Le Lemme 1 et le Corollaire 2 donnent le

THÉORÈME 9. *L'espace $C(X)$ est à caractère dénombrable si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites:*

(a) *l'espace X est du type dénombrable* (4);

(b) *tout sous-espace compact $\Phi \subseteq X$ est parfaitement normal et séparable.*

Soit X un espace topologique arbitraire. Désignons par $I(X)$ l'ensemble de tous les points isolés de l'espace X et par $S(X)$ la différence $= X \backslash I(X)$. Nous allons caractériser les espaces topologiques X pour lesquels l'espace $F(X)$ est à caractère dénombrable.

THÉORÈME 10. *L'espace $F(X)$, où X est normal, est à caractère dénombrable si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites:*

(a) *l'espace X est parfaitement normal;*

(b) *l'ensemble $I(X)$ est dénombrable;*

(4) L'espace X est du type dénombrable si pour tout ensemble compact $\Phi \subseteq X$ il existe un ensemble compact $C \subseteq \Phi$ tel que $\chi_X(C) \leqslant \aleph_0$ (cf. [4] et [18]).

(c) *l'ensemble $S(K)$ est dénombrablement* (5) *compact, héréditairement separable et, en plus, $\chi_X(S(X)) \leqslant \aleph_0$.*

Démonstration. Soit un espace $F(X)$ à caractère dénombrable. Alors, en vertu du Lemme 1, les conditions (a) et (b) sont satisfaites. Pour vérifier (c) il suffit de remarquer que l'ensemble $S(X)$ est dénombrablement compact. Supposons qu'il ne l'est pas. Alors il existe un ensemble dénombrable $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \subseteq S(X)$ sans aucun point d'accumulation. Ceci implique l'existence d'une famille discrete $\{U_n | n = 1, 2, \ldots\}$ des ensembles ouverts dans l'espace X telle que $x_n \in U_n$ pour tout nombre naturel n.

En vertu du Lemme 1 on a $\chi_X(A) \leqslant \aleph_0$. Donc, il existe une famille $\{G_n | n = 1, 2, \ldots\}$ déterminant le caractère de l'ensemble A dans l'espace X. Le point x_n n'étant pas isolé, on peut trouver un point $y_n \in G_n \cap (U_n \backslash A)$ pour tout nombre naturel n.

L'ensemble $B = \{y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots\}$ est fermé dans l'espace X; pour tout nombre naturel n on a $B \cap G_n \neq \emptyset$. Mais ceci est en contradiction avec l'hypothèse que $\{G_n | n = 1, 2, \ldots\}$ détermine le caractère de l'ensemble A. Par conséquent, l'ensemble $S(X)$ est forcément dénombrablement compact.

Admettons maintenant que les conditions (a)–(c) sont satisfaites. Vu que la réunion des deux ensembles de caractère dénombrable dans l'espace X donne un ensemble de caractère dénombrable dans cet espace, il suffit de démontrer — en vertu du Lemme 1 — que pour tout ensemble $\Phi \subseteq S(X)$ fermé dans l'espace X nous avons $\chi_X(\Phi) \leqslant \aleph_0$.

Dans ce but nous allons considérer l'ensemble $\Phi \subseteq S(X)$ fermé dans l'espace X et son voisinage $O\Phi \subseteq X$.

Nous admettons que la famille $\{G_n | n = 1, 2 \ldots\}$ détermine le caractère de l'ensemble $S(X)$ dans l'espace X. Soit $\{U_n | n = 1, 2, \ldots\}$ une famille des ensembles ouverts dans l'espace X tel que $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \Phi$ et que pour tout nombre naturel n on a $\Phi \subseteq U_{n+1} \subseteq [U_{n+1}] \subseteq U_n \subseteq [U_n] \subseteq G_n$.

Admettons que pour tout nombre naturel n il existe un point $x_n \in U_n \backslash O\Phi$. Posons $A = \{x_n | n = 1, 2, \ldots\}$, $A_1 = A \cap I(X)$ et $A_2 = A \cap S(X)$.

Soit $x \in \Phi$. Etant donné que $O\Phi \cap A = \emptyset$, nous avons $x \notin [A]$. Pour $x \notin \Phi$ il existe un nombre naturel n tel que $x \notin [U_n]$. L'ensemble $A \cap (X \backslash [U_n])$ étant fini, on a $x \notin [A \backslash \{x\}]$. Par conséquent, l'ensemble A n'a aucun point d'accumulation. En vertu de (c) l'ensemble A_2 est fini, alors

(5) Si dans l'espace X pour toute suite décroissante d'ensembles fermés non-vides $F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots$ on a $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$, alors cet espace est dit dénombrablement compact.

$A_1 \subset X \setminus S(X)$ est un ensemble dénombrable et fermé dans l'espace X. L'ensemble $U = X \setminus A_1$ est ouvert et contient $S(X)$. Vu que $A_1 \cap G_n \supseteq A_1 \cap U_n \neq \emptyset$ pour tout nombre naturel n, on obtient une contradiction avec l'assertion que $\{G_n |\ n = 1, 2, \ldots\}$ détermine le caractère de l'ensemble $S(X)$ dans l'espace X.

Nous avons démontré ainsi que $\Phi \subseteq U_n \subseteq O\Phi$ pour un certain nombre naturel n. Par conséquent, la famille $\{U_n |\ n = 1, 2, \ldots\}$ détermine le caractère de l'ensemble Φ dans l'espace X.

Ainsi le Théorème 10 se trouve démontré.

Dans le même ordre d'idées nous allons formuler la proposition suivante, qu'on démontre aisément.

PROPOSITION 6. *Soit $\chi_{F(X)}(A) \leqslant \tau$ pour tout élément $A \in F(K)$. Alors la puissance de l'espace $F(X)$ ne dépasse pas le nombre cardinal 2^τ.*

On peut démontrer sans peine le lemme suivant:

LEMME 3. *Pour tout l'ensemble Φ fermé dans l'espace X tel que $\chi_X(\Phi) \leqslant \tau$ nous avons aussi $\chi_{F(X)}(F(\Phi)) \leqslant \tau$, où $F(\Phi) = \{L \in F(X) |\ L \subseteq \Phi\}$.*

Pour tout sous-ensemble $\sigma = \{A_a\}$ de l'espace $A(X)$, nous allons désigner par S_σ le réunion $\bigcup \{A_a |\ A_a \in \sigma\}$.

LEMME 4. *Soit $\sigma = \{A_a |\ a \in \theta\}$ un sous-espace compact de l'espace $C(X)$. Alors l'ensemble S_σ est compact et nous avons $\chi_X(S_\sigma) \leqslant \chi_{C(X)}(\sigma)$.*

Démonstration. Soit $w = \{U_\beta |\ \beta \in B\}$ un recouvrement de l'ensemble S_σ par des ensembles ouverts dans l'espace X. Alors le système $\langle w \rangle$ est un recouvrement de l'ensemble compact σ et contient un recouvrement fini de σ, à savoir $\{\langle U_{1(1)}, \ldots, U_{1(s_1)} \rangle, \ldots, \langle U_{n(1)}, \ldots, U_{n(s_n)} \rangle\}$. Il est évident maintenant que le système $\{U_{1(1)}, \ldots, U_{1(s_1)}, \ldots, U_{n(1)}, \ldots, U_{n(s_n)}\}$ est un recouvrement fini de S_σ. Par conséquent, l'ensemble S_σ est compact.

Il nous reste à démontrer que $\chi_X(S_\sigma) \leqslant \tau = \chi_{C(X)}(\sigma)$. Admettons que la famille

$$\{W_a = \bigcup_{i=1}^{n} \langle V^{i(a)}_{a(1)}, \ldots, V^{i(a)}_{a(s_a)} \rangle |\ a \in \theta;\ \operatorname{card} \theta \leqslant \tau\}$$

détermine le caractère de l'ensemble σ dans l'espace $C(X)$. Considérons maintenant un voisinage OS_σ de l'ensemble S_σ dans l'espace X. Il existe un élément $a \in \theta$ tel que $\sigma \leqslant W_a \leqslant \langle OS_\sigma \rangle$. Par conséquent, $S_\sigma \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{s_a} V^{i(a)}_{a(j)} \subseteq OS_\sigma$. Il en résulte que le système $\{\bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{s_a} V^{i(a)}_{a(j)} |\ a \in \theta\}$ détermine le caractère de l'ensemble S_σ dans l'espace X.

Notre lemme se trouve ainsi démontré.

Le théorème suivant établit un fait intéressant: l'espace $C(X)$ hérite de l'espace X la propriété d'être du type dénombrable tandis que ce n'est pas le cas pour la propriété d'être de caractère dénombrable (cf. Théorème 9).

THÉORÈME 11. *Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(a) *l'espace X est du type dénombrable;*

(b) *l'espace $C(X)$ est du type dénombrable* (⁶);

(c) *l'espace $C(X)$ est du type ponctuellement dénombrable.*

Démonstration. Admettons que X est du type dénombrable et que $\sigma = \{A_a |\ a \in \theta\}$ est un sous-ensemble compact arbitraire de l'espace $C(X)$. En vertu du Lemme 4 l'ensemble S_σ est compact. Par conséquent, il existe un compact $\Phi \subseteq X$ tel qu'on a $S_\sigma \subseteq \Phi$ et $\chi_X(\Phi) \leqslant \aleph_0$.

En vertu du Lemme 3 on a $F(\Phi) \subseteq C(X)$ et $\chi_{C(X)}(F(\Phi)) \leqslant \aleph_0$. Il est évident que $\sigma \subseteq F(\Phi)$. Il s'ensuit que l'espace $C(X)$ est du type dénombrable.

Supposons maintenant que l'espace $C(X)$ est du type ponctuellement dénombrable et Φ est un sous-ensemble compact de l'espace X. Vu que $\Phi \in C(X)$, il existe un compact $\sigma \subseteq C(X)$ tel que $\Phi \in \sigma$ et $\chi_{C(X)}(\sigma) \leqslant \aleph_0$.

En vertu du Lemme 4 on a $\Phi \subseteq S_\sigma$ et $\chi_X(S_\sigma) \leqslant \aleph_0$. Par suite, l'espace X est du type dénombrable. Ainsi le Théorème 11 se trouve démontré.

Soit X un espace métrique séparable. Par un raisonnement analogue à la dernière partie de la démonstration du Lemme 1 nous sommes à même de démontrer que tout élément $A \in F(X)$ est un G_σ dans l'espace $F(X)$. S'il existe pour l'élément A un compact $\Phi \subset F(X)$ tel que $A \in \Phi$ et $\chi_{F(X)}(A) \leqslant \aleph_0$, on a $\chi_{F(X)}(A) \leqslant \aleph_0$ (cf. [18]) Lemme 2). Donc l'espace $F(X)$ n'est pas du type ponctuellement dénombrable même si l'on prend pour X l'espace des nombres réels, où pour l'ensemble A des entiers nous avons $\chi_X(A) > \aleph_0$.

THÉORÈME 12 (⁷). *Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(a) *l'espace X est compact et métrisable;*

(b) *l'espace $F(X)$ est métrisable;*

(c) *l'espace $F(X)$ contient un réseau* (⁸) *dénombrable.*

Démonstration. Admettons que $F(X)$ est un espace métrisable. L'espace X est compact et métrisable en vertu de la Proposition 1. Si l'espace $F(X)$ contient un réseau dénombrable il existe aussi un réseau dénombrable dans l'espace X et comme X est un espace de Tychonoff c'est un espace de Lindelöf, donc un espace normal. D'un théorème de Michael ([9], Théorème 4.5.9) s'ensuit que l'espace $F(X)$ est un espace normal et l'espace X est de Tychonoff, donc $F(X)$ est aussi un espace normal et l'espace X est

(⁶) L'espace X est du type ponctuellement dénombrable, si pour tout point $x \in X$ il existe un ensemble compact $\Phi < X$ tel que $x \in \Phi$ et $\chi_X(\Phi) \leqslant \aleph_0$ (cf. [4]).

(⁷) L'équivalence des propriétés (a) et (b) a été démontrée par Michael (cf. [9] Théorème 4.9.7.).

(⁸) On appelle „réseau" (cf. [2]) une famille w de sous-ensembles de X telle que pour tout $x \in X$ et un voisinage V de x il existe un $A \in w$ satisfaisant à la condition $x \in A \leqslant V$.

compact en vertu de la Proposition 1. En plus, suivant un théorème d'Archangielski (cf. [2]) l'espace X étant compact et métrisable, l'espace $F(X)$ contient — en vertu du Théorème 6 — une base dénombrable.

Ainsi, $F(X)$ est métrisable.

Théorème 13. *Pour tout p-espace paracompact les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(a) *l'espace X est métrisable;*

(b) *l'espace $C(X)$ est métrisable;*

(c) *l'espace $C(X)$ est parfaitement normal;*

(d) *l'espace $J_n(X)$ est parfaitement normal pour tout nombre naturel $n \geqslant 2$;*

(e) *l'espace $J_2(X)$ est parfaitement normal.*

Démonstration. L'équivalence des propriétés (a) et (b) a été démontrée par Michael ([9], Théorème 4.9.13). Implication (b)→(c) est évidente.

Si l'espace $C(X)$ est parfaitement normal, l'espace $J_n(X)$ l'est aussi. Admettons, maintenant, que l'espace $J_2(X)$ est parfaitement normal. Alors — d'après le Théorème 2 — la diagonale $D = \{(x, x) | \ x \in X\}$ est un ensemble G_σ dans l'espace $X \times X$. Il s'ensuit — en vertu d'un théorème d'Okuyama (cf. [11] et [16]) que l'espace X est métrisable.

Le problème si l'espace $J_2(X)$ est parfaitement normal dans le cas où l'espace $C(X)$ est héréditairement normal reste ouvert.

Appendice

Nous pouvons définir dans l'ensemble $A(X)$ une autre topologie, dite $\varkappa$-topologie (cf. [9] et [13]). La base de $\varkappa$-topologie est formée par les ensembles du type $\langle G\rangle = \{L \in A(X) | \ L \subset G\}$ où l'ensemble G est ouvert dans l'espace X. Appelons *λ-topologie* la topologie dans l'ensemble $A(X)$ dont les ensembles du type $\lambda(U) = \{L \in A(X) | \ L \cap U \neq \emptyset\}$, l'ensemble U étant ouvert dans l'espace X, forment une pseudo-base. Nous allons désigner par $A_\varkappa(X)$ et $A_\lambda(X)$ l'ensemble $A(X)$ avec la topologie $\varkappa$ et λ respectivement.

Revenons à la Proposition 2. La question suivante se pose: quelle est la relation entre les transformations $f\colon X \to Y$ et $f_A\colon A(X) \to A(Y)$, où $f_A B = fB$ pour tout élément $B \in A(X)$? Nous allons considérer les restrictions $f_F = f_A|F(X)$ et $f_C = f_A|C(X)$.

Proposition A.1. *Admettons que l'espace X est normal. Alors la transformation $\varphi\colon A(X) \to F(X)$, où $\varphi L = [L]_X$ pour tout élément $L \in A(X)$, est propre.*

Démonstration. La continuité de φ a été démontrée par Michael ([9], Théorème 5.3). Pour un $\Phi \in F(X)$ nous avons $\varphi^{-1}\Phi = \{L \in A(X) | \ [L]_X = \Phi\}$. Si $\langle U_1, \ldots, U_s\rangle$ est un voisinage de l'élément Φ dans l'espace $A(X)$ on a $\varphi^{-1}\Phi \leqslant \langle U_1, \ldots, U_s\rangle$. Par conséquent, $\varphi^{-1}\Phi$ est un espace compact. Il reste à prouver que φ est une transformation fermée. Admettons que l'ensemble $\sigma \leqslant A(X)$ est fermé dans l'espace $A(X)$ et que $\Phi \notin \varphi\sigma$.

Etant donné que $\varphi^{-1}\Phi \cap \sigma = \emptyset$ et $\Phi \in \varphi^{-1}\Phi$, il existe un voisinage $\langle U_1, \ldots, U_s\rangle$ de l'élément Φ dans l'espace $A(X)$ tel que $\langle U_1, \ldots, U_s\rangle \cap \cap \sigma = \emptyset$. L'espace X étant normal, ils existent les ensembles $V_1, \ldots, V_s$ ouverts dans l'espace X tels que $\Phi \in \langle V_1, \ldots, V_s\rangle$ et $[V_i]_X \subset U_i$ pour tout nombre naturel $i = 1, 2, \ldots, s$.

Il en résulte que $\varphi^{-1}\Phi' \subset \langle U_1, \ldots, U_s\rangle$, si $\Phi' \in \langle V_1, \ldots, V_s\rangle \cap F(X)$. Par conséquent, $\langle V_1, \ldots, V_s\rangle \cap \varphi\sigma = \emptyset$ et $\Phi \in \langle V_1, \ldots, V_s\rangle$. Ainsi, la proposition est démontrée.

Proposition A.2. *La transformation $f\colon X \to Y$ est irréductible* (⁹) *si et seulement si $f_A\colon A(X) \to A(Y)$ est irréductible.*

Démonstration. Admettons que la transformation $f\colon X \to Y$ est irréductible, et considérons un ensemble ouvert $\langle U_1, \ldots, U_n\rangle \subset A(X)$ où les ensembles $U_1, \ldots, U_n$ sont ouverts dans l'espace X. Pour tout nombre $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ il existe un point $y_i \in Y$ tel que $f^{-1}y_i \leqslant U_i$. Posons $B = \{y_1, \ldots, y_n\}$. Il est évident que $f_A^{-1}B \leqslant \langle U_1, \ldots, U_n\rangle$. Par conséquent, la transformation f_A est irréductible.

Etant donné que pour tout ensemble $L \subseteq X$ nous avons $f_A A(L) = A(fL)$, où $A(L) = \{S \in A(X) | \ S \subseteq L\}$, si f est irréductible, f_A l'est aussi.

Ayant recours à une méthode similaire nous sommes à même de démontrer la proposition suivante:

Proposition A.3. *Pour une transformation propre $f\colon X \to Y$ les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(a) *la transformation $f\colon X \to Y$ est irréductible;*

(b) *la transformation $f_A\colon A(X) \to A(Y)$ est irréductible;*

(c) *la transformation $f_F\colon F(X) \to F(Y)$ est irréductible;*

(d) *la transformation $f_C\colon C(X) \to C(Y)$ est irréductible.*

Compte tenu des Propositions 2 et A.3 nous pouvons établir — en vertu d'un théorème de Ponomariev (cf. [14], Théorème 10.1) — le théorème suivant:

Théorème A.4. *L'espace $C(X)$ est ω-absolue avec un espace métrique si et seulement si l'espace X est ω-absolue avec un espace métrique arbitraire.*

(⁹) Une transformation $f\colon X \to Y$ est dite irréductible s'il n'existe pas un ensemble $F \subset X$ fermé tel que $fF = Y$ et $F \neq X$.

Nous allons maintenant démontrer le théorème suivant:

Théorème A.5. *Les propriétés suivantes sont équivalentes*:

(a) *la transformation* $f\colon X\to Y$ *est ouverte*,

(b) *la transformation* $f_A\colon A(X)\to A(Y)$ *est ouverte*,

(c) *la transformation* $f_A\colon A_\varkappa(X)\to A_\varkappa(Y)$ *est ouverte*,

(d) *la transformation* $f_A\colon A_\lambda(X)\to A_\lambda(Y)$ *est ouverte*,

(e) *l'assignement à* y *de l'ensemble* $f^{-1}(y)\in A(X)$ *est un homéomorphisme de l'espace* Y *sur le sous-espace* $D_f=\{f^{-1}y|\ y\in Y\}$ *de l'espace* $A_\lambda(X)$.

Démonstration (a)$\leftrightarrow$(b). Admettons que $f\colon X\to Y$ est une transformation ouverte. Pour prouver (b) il suffit de démontrer que $f_A\langle U_1,\dots,U_s\rangle=\langle fU_1,\dots,fU_s\rangle$, où les ensembles $U_1,U_2,\dots,U_s$ sont ouverts dans l'espace X.

Soit $L\in f_A\langle U_1,\dots,U_s\rangle$. Alors il existe un ensemble $B\subset X$ tel que $B\subset\bigcup_{i=1}^{s}U_i$, $fB=A$ et $B\cap U_i\neq\emptyset$ pour tout nombre naturel $i\in\{1,2,\dots,s\}$.

Par conséquent, $fB\subset\bigcup_{i=1}^{s}fU_i$ et $fB\cap fU_i\neq\emptyset$ pour tout nombre naturel $i\in\{1,2,\dots,s\}$. Donc, $L\in\langle fU_1,fU_2,\dots,fU_s\rangle$. Inversement, si $L\in\langle fU_1,fU_2,\dots,fU_s\rangle$ nous écrivons $B=f^{-1}L\cap(\bigcup_{i=1}^{s}U_i)$. Il va de soi que $B\in\langle U_1,\dots,U_t\rangle$ et $fB=L$. Donc, il vient $L\in f_A\langle U_1,\dots,U_s\rangle$.

Etant donné que $fU=f_A\langle U\rangle\cap Y$ pour tout ensemble U ouvert dans l'espace X, l'équivalence des propriétés (a) et (b) se trouve ainsi démontrée.

Recourrant à une méthode tout-à-fait similaire on peut démontrer l'équivalence des propriétés (a), (c) et (d). Il y a lieu de souligner que dans la démonstration de l'équivalence des propriétés (a) et (d) un rôle important est assigné au fait que les ensembles du type $\langle X,U_1,\dots,U_s\rangle$, où les ensembles $U_1,\dots,U_s$ sont ouverts dans l'espace X, constituent une base dans l'espace $A_\lambda(X)$.

L'équivalence des propriétés (a) et (e) ressort de la définition même de la transformation ouverte.

Travaux cités

[1] P. Alexandroff et P. Urysohn, *Mémoire sur les espaces topologiques compacts*, Verh. K. Akad. Wetensch., Amsterdam, 14 (1929), p. 1–96.

[2] А. Архангельский, *Аддиционная теорема для веса множеств лежащих в бикомпактах*, ДАН ССР 126 (1959), p. 237-241.

[3] — *Об одном классе пространств содержащем все метрические и все локально бикомпактные пространства*, Мат. Сбор., Н. С., 67 (109) (1965), p. 55-88.

[4] — *Бикомпактные пространства и топология пространств*, Труды Москов. Мат. Общ., 13 (1965), p. 3-55.

[5] N. Bourbaki, *Topologie générale*, Paris 1961, chap. 1 et 2.

[6] В. М. Иванова, *К теории пространства подмножеств*, ДАН СССР 101 (1955), p. 601-603.

[7] K. Kuratowski, *Topologie I*, Warszawa 1958.

[8] Б. Т. Левшенко, *О понятии компактности и точечно-конечных покрытиях*, Мат. Сбор., Н. С., 42 (84) (1957), p. 479-484.

[9] E. Michael, *Topologies in space of subsets*, Trans. Amer. Math. Soc. 71 (1951), p. 151–188.

[10] А. Мищенко, *О пространствах с точечно счетной базой*, ДАН СССР 144 (1962), p. 985-988.

[11] A. Okuyama, *On metrizability of M-space*, Proc. Japan Acad. 40 (1964), p. 176–179.

[12] П. К. Осматеску, *ω_a-расширения*, Вестник Москов. Унив., Мат.-Мех., № 6 — 1963, p. 45-54.

[13] В. И. Пономарев, *Новое пространство замкнутых множеств и многозначные отображения бикомпактов*, Мат. Сбор., Н. С., 48 (90) (1951), p. 191-212.

[14] — *О пространствах ω-абсолютных с метрическими*, Усп. Мат. Наук 21 (1966), вып. 4, p. 101-132.

[15] В. Е. Шнейдер, *Непрерывные образы суспинских и борелевских множеств. Метризационные теоремы*, ДАН СССР 50 (1945), p. 77-80.

[16] М. М. Чобан, *Некоторые метризационные теоремы для перистых пространств*, ДАН СССР, p. 173 (1967), p. 1270-1272.

[17] — *О пространствах бикомпактных подмножеств*, Вестник Москов. Унив., Мат.-Мех., № 2 — 1969, p. 50-55.

[18] — *Совершенные отображения и пространства счетного типа*, Вестник Москов. Унив., Мат.-Мех., № 6 — 1967, p. 87-93.

Reçu par la Rédaction le 10. 12. 1969