STUDIA MATHEMATICA, T. XXXVII. (1971)

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ БАЗИСОВ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ШКАЛАХ

Б. С. МИТЯГИН (Москва)

Основная цель настоящей статьи — дать доказательство квазиэквивалентности безусловных базисов в гильбертовых шкалах, порождённых самосопряжённым оператором. Это утверждение, высказанное в форме гипотезы автором в [13], 3в), стр. 128, обобщает (и объединяет в себе) теорему Лорча-Гельфанда ([11], [3]; см. также [4], гл. 6) об эквивалентности безусловных нормированных базисов в гильбертовом пространстве и результаты Драгилева [6], [7] и автора [12], [13], § 6, о квазиэквивалентности базисов в ядерных гильбертовых шкалах (определение см. ниже).

Напомним, что в линейном топологическом пространстве E система $\{x_k, k=1,2,\ldots\}$ называется *базисом*, если существует такая система функционалов $\{x'_k, k=1,2,\ldots\}$, что $x'_k(x_i)=0$, $i\neq k$, и $x'_k(x_k)=1$, и для любого $x\in E$ имеет место представление

$$x=\sum_{k=1}^{\infty} x'_k(x)x_k. \tag{1}$$

Базис $\{x_k\}$ называется *безусловным*, если ряд (1) сходится при любой перестановке для всякого $x\in E$.

Два базиса $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ называются *квазиэквивалентными*, если существуют такие нормировка $r_k\neq 0$ и перестановка $\sigma(k)$ натурального ряда, что оператор T, определяемый соотношениями

$$Tx_k=r_k y_{\sigma(k)},\quad k=1,2,\ldots,$$

является изоморфизмом пространства E на себя. Будем говорить, что топологическое линейное пространство E имеет свойство (QE), если в нём есть безусловный базис и два любых безусловных базиса квазиэквивалентны.

Захарюта [9] заметил, что соображения, связанные с интерполяционной операторной теоремой и развитые автором [13], § 5, позволяют дать доказательство свойства (QE) в гильбертовых шкалах без предположения ядерности пространства, но с сохранением монтелевости (совершенства) пространства.

Мы теперь уточняем (§ 2) некоторые утверждения работы [13], § 5, об интерполяционных свойствах гильбертовых шкал, и дополняем их (§ 3) тщательным спектральным анализом двух самосопряжённых (некоммутирующих) операторов, порождающих эквивалентные шкалы. Полностью проявляется теперь комбинаторный характер задачи („найти перестановку σ'' с нужными свойствами), что в разобранных ранее случаях смазывалось, поскольку перестановка σ могла быть любой (в случае гильбертова пространства) или очень естественно возникала, когда порождающий шкалу оператор был ядерным или вполне непрерывным [6], [13], [9] и монотонное убывание его собственных чисел подсказывало нужную перестановку. Согласование (§ 4) спектральных свойств операторов и комбинаторики множеств их собственных векторов — основной момент в доказательстве (§ 5) главной теоремы:

Центр гильбертовой шкалы имеет свойство (QE).

Дано обобщение (в случае конечных гильбертовых шкал) результатов Бессаги [1] о безусловных базисных последовательностях, линейная оболочка которых — дополняемое подпространство (б. д. б. п.); показано, что для любой б. д. б. п. $\{Y_k\}$ существует изоморфизм S всего пространства E на себя и подпоследовательность основного базиса $\{x_k\}$ такие, что

$$Sy_k = r_k x_{h(k)}.$$

Можно предполагать, что интерполяционные методы, лежащие в основе этой работы, позволят передоказать и обобщить результаты Драгилева [8] о свойстве (QE) некоторых пространств более общего характера, чем гильбертовы шкалы. Этому может способствовать общая интерполяционная теорема для гильбертовых пространств, найденная Доногю [5].

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Напомним некоторые факты о *гильбертовых шкалах* ([10], § 9).

1. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, и A — положительно определённый оператор в нём, $A \geqslant 1$, то есть

$$(x, x) \leqslant (Ax, Ax), \tag{2}$$

и $E_\lambda = E_\lambda^A$ — соответствующее ему спектральное разложение единицы. Для любого вещественного α определяется гильбертово пространство H_α, $H_0 = H$, при $\alpha > 0$ H_α = области определения α-степени A, то есть

$$\left\{x \in H : \int_1^\infty \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda x, x) < \infty\right\}$$

со скалярным произведением

$$(x, y)_\alpha = (A^\alpha x, A^\alpha y) = \int_1^\infty \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda x, y), \tag{3}$$

и, для $\alpha < 0$, H_α — пополнение H по норме

$$\|x\|_\alpha = (x, x)_\alpha^{1/2}, \text{ где } (x, y)_\alpha = (A^\alpha x, A^\alpha y)_0.$$

Условие (2) обеспечивает монотонность функций $(x, x)_\alpha$ по α и непрерывность тождественных вложений $H_{\alpha'} \to H_\alpha$, $\alpha' \geqslant \alpha$. Оператор A^α: $H_\alpha \simeq H_0$ осуществляет изометрию H_α и H_0.

Существенную роль в дальнейшем будет играть интерполяционная теорема для гильбертовных шкал (её доказательство см., например, в [10], § 9, теорема 9. I):

Лемма 1. *Пусть H_α и F_β — гильбертовы шкалы, порождённые операторами $A \geqslant 1$ и $B \geqslant 1$ в H и F — соответственно. Пусть L — линейный оператор, непрерывно действующий из H_{α_0} в F_{β_0} и из H_{α_1} в F_{β_1}, $\alpha_0 < \alpha_1$, $\beta_0 < \beta_1$. Тогда он непрерывно действует и из H_α в F_β, где*

$$\frac{\beta-\beta_0}{\beta_1-\beta} = \frac{\alpha-\alpha_0}{\alpha_1-\alpha_0}; \tag{4}$$

более того, $\|L\|_{H_\alpha \to F_\beta}$ — логарифмически выпуклая функция α.

То же самое коротко можно сказать так: коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} H_{\alpha_0} \arrow[d, "L"'] & H_\alpha \arrow[d, dashed] & H_{\alpha_1} \arrow[d, "L"] \\ F_{\beta_0} & F_\beta & F_{\beta_1} \end{tikzcd}$$

допускает стрелку $(\alpha \to \beta)$. Свойство логарифмической выпуклости нормы L мы в дальнейшем не используем.

2. Мы говорим, что пространство Фреше E *допускает представление в виде гильбертовой шкалы*, или E — центр гильбертовой шкалы, если оно изоморфно пересечению

$$\bigcap_{\alpha<\alpha_0} H_\alpha = \lim_{\alpha\to\alpha_0} \operatorname{proj} H_\alpha, \qquad \alpha_0 \leqslant \infty,$$

шкалы *конечной*, если $\alpha_0 < \infty$, и *бесконечной*, если $\alpha_0 = \infty$.

Основные пространства бесконечно дифференцируемых и голоморфных функций допускают такое представление; соответствующие таблицы и библиографические ссылки см. в [13], § 5, стр. 102, и [1], стр. 311.

Предложение 2 (срав. Предложение 15, [13]). *Если E — центр гильбертовой шкалы, то в нём есть безусловный базис.*

Действительно, без ограничения общности можно считать, что оператор A имеет дискретный спектр $\{\lambda_\nu\}$ и полную системы $\{e_\nu, \nu\in\mathfrak{N}\}$ собственных векторов

$$(5) \qquad Ae_\nu = \lambda_\nu e_\nu, \quad \nu\in\mathfrak{N},$$

где $\mathfrak{N}$ — счётное множество индексов. Иначе вместо A мы рассмотрели бы оператор

$$\tilde{A} = \int_0^\infty g(\lambda)\,dE_\lambda, \qquad \text{где } g(\lambda) = 2^k,\ 2^k \leqslant \lambda < 2^{k+1},\ k = 0,1,\ldots$$

Тогда

$$(6) \qquad 1 \leqslant \tilde{A} \leqslant A \leqslant 2\tilde{A}$$

и шкала $\tilde{H}_\alpha$, порождённая оператором $\tilde{A}$, совпадает с H_α. Выберем в каждом инвариантном подпространстве $H_{\Delta_k} = E^{A}_{[2^k,2^{k+1})}H_0$ ортонормированную полную систему $\{e, \nu\in\mathfrak{N}_k\}$, где $|\mathfrak{N}_k| = \dim H_{\Delta^k}$, $\Delta_k = [2^k, 2^{k+1})$.

(Здесь и далее для множества $\mathfrak{A}$ будем через $|\mathfrak{A}|$ обозначать его мощность, конечную или бесконечную; $\dim X$ — минимальная мощность множества, линейная замкнутая оболочка которого совпадает со всем X.)

Тогда $\tilde{A}e_\nu = 2^k e_\nu$, $\nu\in\mathfrak{N}_k$, и система

$$(7) \qquad \{e_\nu, \nu\in\mathfrak{N} = \bigcup_0^\infty \mathfrak{N}_k\}$$

полна в каждом H_α и ортогональна во всех скалярных произведениях

$$(8) \qquad (x, y)_{\tilde{\alpha}} = (\tilde{A}^\alpha x, \tilde{A}^\alpha y)_0.$$

В силу (6) скалярные произведения (8) и (3) эквивалентны при каждом α, и поэтому система (7) является безусловным базисом в каждом H_α и, тем самым, в любом центре этой шкалы. Действительно, для $x\in H_\alpha$

$$x = \int_0^\infty dE_\lambda x = \sum E_{\Delta_k} x = \sum_k \sum_{\nu\in\mathfrak{N}_k} (x, e_\nu)e_\nu = \sum_{\nu\in\mathfrak{N}} (x, e_\nu)e_\nu,$$

и этот ряд сходится безусловно в H_α.

Предложение 2 доказано. Построенный при этом базис (7) с условием (5) будем считать *каноническим*. Любой другой безусловный базис $\{x_\mu, \mu\in\mathfrak{M}\}$ в E будем сравнивать именно с базисом $\{e_\nu\}$.

Положим $\lambda_\nu = \exp a_\nu$, $a_\nu \geqslant 0$;

$$x = \sum_{\nu\in\mathfrak{N}} \xi_\nu e_\nu \in H_\alpha$$

тогда и только тогда, когда

$$\sum_{\nu\in\mathfrak{N}} |\xi_\nu|^2 \exp 2\alpha a_\nu < \infty,$$

и тем самым

$$E = \lim_{\alpha\to\alpha_0} \operatorname{proj} H_\alpha \simeq \bigcap_{\alpha<\alpha_0} l^2(\exp \alpha a_\nu).$$

Именно о таких центрах говорится в гипотезе 3в), [13], стр. 128.

3. Сформулируем в заключение вводного параграфа теорему о различных представителях Ф. Холла-Кёнига (см. [14], гл. 3, стр. 38).

Пусть N и M — два конечных множества, и $S\colon N\to M$ — многозначное отображение, относящее каждому элементу $n\in N$ множество $S(n)\subset M$. Существует ли такое взаимнооднозначное отображение

$$(9) \qquad s\colon N\to M,$$

что $s(n)\in S(n)$ для всех $n\in N$?

Очевидно, для этого необходимо

Условие С. *Для любого $N'\subset N$ выполнено неравенство*

$$\Big|\bigcup_{n\in N'} S(n)\Big| \geqslant |N'|,$$

то есть для всякого $k = 1, \ldots, |N|$ в объединении k подмножеств $S(n)\subset M$ содержится не менее k элементов.

Лемма 3. *Пусть N, M и S — те же, что и выше. Тогда условие* (С) *является достаточным для существования отображения* (9).

Элементы $s(n)$ естественно называть *представителями* множеств $S(n)$.

Следует отметить, что для автора было полезным проведение аналогии между решаемой задачей об эквивалентности базисов и хорошо известной в математической экономике задачей назначения на должности (см. [14], гл. 3). Именно, на канонический базис $\{e_n\}$ можно смотреть как на набор должностей, или штатное расписание, а другой базис $\{x_m\}$ можно рассматривать как систему служащих. Мы должны „наилучшим образом" или „хорошо" распределить служащих x_m на должности e_n так, чтовы все должности были заняты и никто не остался без работы. Эта аналогия подсказала возможность использования теоремы о различных представителях, и, действительно, эту возможность удалось реализовать (§ 4).

2. ПОСТРОЕНИЕ ГИЛЬБЕРТОВОЙ ШКАЛЫ, СВЯЗАННОЙ С БЕЗУСЛОВНЫМ БАЗИСОМ

1. Пусть $\{x_\mu, \mu\in\mathfrak{M}\}$, $|\mathfrak{M}| = \aleph_0$, — безусловный базис в

$$E = \lim_{\alpha\to\alpha_0} \operatorname{proj} H_\alpha$$

и $\{x'_\mu\}$ — биортогональная система функционалов. Если M — подмножество в $\mathfrak{M}$, то опеределим проектор $P_M\colon E\to E$,

$$P_M x = \sum_{\mu\in M} x'_\mu(x)x_\mu,$$

и оператор

$$E_M = P_M - (1-P_M) = P_M - P_{\mathfrak{M}-M}.$$

Так как ряд $\sum_{\mu\in\mathfrak{M}} x'_\mu(x)x_\mu$ сходится для каждого x безусловно, то $\{P_M x, M\subset\mathfrak{M}\}$ — ограниченное множество, и тогда в силу принципа равномерной ограниченности $\{P_M, M\subset\mathfrak{M}\}$ — равномерно ограниченное семейство операторов, а с ним и семейство $\{E_M, M\subset\mathfrak{M}\}$, то есть

$$\forall\, \alpha<\alpha_0\ \exists\, \alpha'(\alpha')<\alpha_0, C\colon\ \|E_M x\|_\alpha \leqslant C\|x\|_{\alpha'}. \tag{10}$$

$\{E_M, M\subset\mathfrak{M}\}$ есть компактная группа, изоморфная $Z_2^{\mathfrak{M}}$. Введём (как и в [3] или [2], Лемма 1) скалярные произведения

$$[x, y]_\alpha = \int_{Z_2^{\mathfrak{M}}} (Ex, Ey)_\alpha\, dE, \tag{11}$$

тогда

$$[x, x]_\alpha \leqslant C_\alpha^2 (x, x)_{\alpha'(\alpha)}. \tag{12}$$

и, в силу (10),

$$\|x\|_\alpha = \|E^{-1}Ex\|_\alpha \leqslant C\|Ex\|_{\alpha'},$$

так что $(x, x)_\alpha \leqslant C^2(Ex, Ex)_{\alpha'}$ и после интегрирования по $Z_2^{\mathfrak{M}}$ имеем

$$(x, x)_\alpha \leqslant C^2[x, x]_{\alpha'}. \tag{13}$$

Итак, система скалярных произведений (11) эквивалентна исходной; в новой системе векторы $\{x_\mu\}$ ортогональны. Действительно,

$$[x_\mu, x_{\mu'}]_\alpha = \int (Ex_\mu, Ex_{\mu'})_\alpha\, dE,$$

и для $\mu\neq\mu'$ по теореме Фубини этот интеграл сводится к сумме четырёх слагаемых, соответствующих четырём двоичным функциям на двухточечном множестве $\{\mu, \mu'\}$:

$$\frac{1}{4}\big((x_\mu, x_{\mu'}) + (-x_\mu, x_{\mu'}) + (x_\mu, -x_{\mu'}) + (-x_\mu, -x_{\mu'})\big) = 0.$$

Аналогично,

$$[x_\mu, x_\mu]_\alpha = \frac{1}{2}\big((x_\mu, x_\mu) + (-x_\mu, -x_\mu)\big) = (x_\mu, x_\mu)_\alpha.$$

Поэтому, в координатной форме произведения (11) записываются так:

$$[x, y]_\alpha = \sum_{\mu\in\mathfrak{M}} x'_\mu(x)\overline{x'_\mu(y)}\,(x_\mu, x_\mu)_\alpha.$$

При усреднении (11) не существенно, что речь идёт о нормах в центре гильбертовой шкалы (ср. [2]). Те же рассуждения показывают, что справедливо (ср. [9], Лемма 1)

Предложение 4. *Пусть E — счётногильбертово пространство с системой норм $\nu_p(x) = (x, x)_p^{1/2}$, $p = 1, 2, \ldots$, и $\{x_\mu, \mu\in\mathfrak{M}\}$ — безусловный базис в нём. Тогда существует эквивалентная система скалярных произведений $[x, x]_p$, $p = 1, 2, \ldots$, в которых векторы $\{x_\mu\}$ взаимно ортогональны; пространство E при этом изоморфно пространству Кёте*

$$l^2\big((x_\mu, x_\mu)_p^{1/2}\big) = \{\xi = (\xi_\mu)\colon \sum |\xi_\mu|^2 (x_\mu, x_\mu)_p < \infty \text{ для всех } p\}.$$

2. Обозначим пополнение E по норме $[x, x]_\alpha^{1/2}$ через $\tilde{G}_\alpha$; это — параметрическая шкала гильбертовых пространств, и нам хотелось бы заменить её на гильбертову. $\tilde{G}_\alpha$ и H_α в силу (12) и (13) перемежаются и $\bigcap_{\alpha<\alpha_0} \tilde{G}_\alpha = E$. Соответствующие перестройки в случае конечного и бесконечного центров немного отличаются друг от друга, и мы в отдельности разберём эти случаи. Подобная перестройка была проведена в [13] при доказательстве Теоремы 11, стр. 99.

(а) Конечный центр $E = \bigcap_{\alpha<\alpha_0} H_\alpha$, $\alpha_0 < \infty$. Как отмечалость в п. 1, § 1, A^{α_0} осуществляет изометрию пространств $H_\sigma \underset{\to}{\simeq} H_{\sigma-\alpha_0}$ при любом σ; поэтому при анализе конечного центра без ограничения общности можно считать $\alpha_0 = 0$.

Единичный шар $S(H_0) = \{x\colon (x, x)_0 \leqslant 1\}$ — ограниченное множество в E, поэтому найдутся постоянные D_n, такие, что

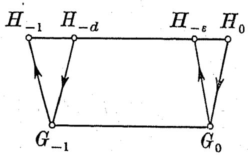
$$\sup_{x\in S(H_0)} [x, x]_{-1/n} \leqslant D_n^2,$$

то есть $S(H_0) \subset D_n S(\tilde{G}_{-1/n})$.

Введём скалярное произведение

$$(14)\qquad [x, y]_0 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} D_n^{-2} [x, y]_{-1/n};$$

оно определено на H_0, так как $[x, x]_0 \leqslant (x, x)_0$, и мажорирует все $[x, x]_\alpha$, $\alpha < 0$, а значит и $(x, x)_\alpha$. Обозначим через G_0 гильбертово пространство — пополнение H_0 по норме $[x, x]_0^{1/2}$, и через G_{-1} — гильбертово пространство $\tilde{G}_{\alpha'(-1)}$; тем самым, имеет место диаграмма



Диаг. 1

При некотором $d > 0$, $H_{-d} \to G_{-1}$, то есть $[x, x]_{\alpha'(-1)} \leqslant M_2^2 (x, x)_{-d}$, и при любом $\varepsilon > 0$, $G_0 \to H_{-\varepsilon}$, то есть $(x, x)_{-\varepsilon} \leqslant D_\varepsilon^2 [x, x]_0$. (Здесь и далее наличие стрелки будет обозначать непрерывность оператора тождественного вложения и соответствующее неравенство для норм.)

Натянем (подробнее см. [10], § 9) на пространства G_{-1} и G_0 гильбертову шкалу, то есть положим

$$[x, x]'_{-1} = [x, x]_{\alpha'(-1)} = [B^{-1}x, B^{-1}x]_0, \qquad x \in G_0,$$

и

$$(15)\qquad [x, x]'_\beta = [B^\beta x, B^\beta x]_0, \qquad x \in G_0,\ -1 \leqslant \beta \leqslant 0,$$

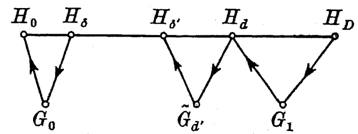
а G_β — пополнение G_0 по скалярному произведению (15).

Из диаг. 1 и интерполяционной теоремы (лемма 1) вытекает эквивалентность в E систем скалярных произведений $(x, x)_\alpha$ и $[x, x]'_\beta$ и возможность представления $E \simeq \bigcap_{\beta<0} G_\beta$ по новой гильбертовой шкале, порождённой оператором B в G_0, причём базис $\{x_\mu, \mu \in \mathfrak{M}\}$ даёт полную систему собственных векторов B, $Bx_\mu = \lambda'_\mu x_\mu$, ортогональную в каждом скклярном произведении (15). Впредь (15) будут основными скалярными произведениями в шкале G_β и $'$ в обозначениях опустим.

(б) Бесконечный центр $E = \bigcap_{\alpha<\infty} H_\alpha$. Схема перестройки примерно та же. Положим

$$G_0 = \tilde{G}_{\alpha'(0)}, \quad \delta = \alpha'(\alpha'(o)), \quad \delta' > \delta, \quad d' = \alpha'(\delta'),$$
$$d = \alpha'(d') \quad \text{и} \quad G_1 = \tilde{G}_{\alpha'(d)}, \quad D = \alpha'(\alpha'(d)).$$

Тогда имеет место диаграмма



Диаг. 2

Натягивая шкалу на пространства G_0 и $\hat{G}_\lambda = \tilde{G}_{\lambda+\alpha'(0)}$, будем обозначать её через G_λ^β, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$; $\hat{G}_\lambda^0 = G_0$ $\hat{G}_\lambda^1 = \hat{G}_\lambda$. Убедимся, что шкалы $\hat{G}_\lambda$, $\lambda < \infty$, и G_1^β, $\beta < \infty$, эквивалентны, то есть

$$(1)\qquad \forall\, \lambda\ \exists \beta\colon\ G_1^\beta \to \hat{G}_\lambda,$$

$$(2)\qquad \forall \beta\ \exists\, \lambda\colon\ \hat{G}_\lambda \to G_1^\beta.$$

Здесь $G_1 = \mathscr{D}(B)$, $[x, x]_1 = [Bx, Bx]_0$ и $G_1^\beta = \mathscr{D}(B^\beta)$, $[x, x]_\beta = [B^\beta x, B^\beta x]_0$, $0 \leqslant \beta < \infty$.

Для любого $a > 0$ по лемме 1

$$\begin{array}{ccccc} G_0 & \leftarrow & \hat{G}_\lambda^\beta & \leftarrow & \hat{G}_{\lambda(a)} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_0 & \leftarrow & H_{\beta a} & \leftarrow & H_a \end{array}$$

где $\lambda(a) = \alpha'(a) - \alpha'(0)$, а α' — функция, возникшая в неравенстве (10), но в то же время

$$\begin{array}{ccccc} H_\delta & \leftarrow & H_{\beta a} & \leftarrow & H_D \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ G_0 & \leftarrow & G_1^\gamma & \leftarrow & G_1, \end{array} \qquad \gamma = \frac{\beta a - \delta}{D - \delta},$$

и тем самым

$$\hat{G}_\lambda^\beta \to G_1^{\frac{\beta a-\delta}{D-\delta}}, \qquad \delta < \beta a < D.$$

С другой стороны,

$$\begin{array}{ccccc} H_\delta & \leftarrow & H_\xi & \leftarrow & H_{\lambda_2(a)} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ G_0 & \leftarrow & \tilde{G}_\lambda^\eta & \leftarrow & G_{\lambda(a)} \end{array}, \qquad \begin{array}{c} \lambda_2(a) = \alpha'\big(\lambda(a)+\alpha'(0)\big), \\ \eta = \dfrac{\xi-\delta}{\lambda_2-\delta}, \end{array}$$

и $G_1^\gamma \to H_{\gamma d}$, так что

$$G_1^\gamma \to G_\lambda^{(\gamma d-\delta)/(\lambda_2-\delta)}.$$

Так как G_1 и $\hat{G}_\lambda$ порождаются коммутирующими операторами (у них общая ортогональная полная система собственных векторов x_μ), то при возведении этих операторов в степень, — любую, а не только $\leqslant 1$, как в неравенстве Гайнца, — неравенства-вложения сохраняются. Поэтому при $\gamma = (d+\delta)/2d$,

$$\hat{G}_1^\gamma \to \hat{G}_\lambda^{(d-\delta)/2(\lambda_2-\delta)} \quad \text{и} \quad G_1^{(d+\delta)(\lambda_2-\delta)/d(d-\delta)} \to \hat{G}_\lambda.$$

и при $\beta a = (D+\delta)/2$ получаем

$$\hat{G}_\lambda^\beta \to G_1^{1/2} \quad \text{и} \quad \hat{G}_\lambda^{\beta(D+\delta)/a} \to G_1^\beta,$$

так что для $\beta = a/(D+\delta)$

$$G_{\lambda(a)} \to G_1^\beta, \qquad G_{\lambda(\beta(D+\delta))} \to G_1^\beta.$$

Эквивалентность параметрической и гильбертовой шкал установлена и для бесконечного центра.

Итак, доказано

Предложение 5. *Пусть E — центр гильбертовой шкалы,* (а) *конечный $\bigcap\limits_{a<0} H_a$, или* (б) *бесконечный $\bigcap\limits_{a<\infty} H_a$, порождённый оператором $A \geqslant 1$ в H_0, и $\{x_\mu, \mu\in\mathfrak{M}\}$ — безусловный базис в E. Тогда можно построить гильбертово пространство G_0 и положительно определённый оператор B, $B\geqslant 1$, в нём так, что*

1° *все x_μ, $\mu\in\mathfrak{M}$ — собственные векторы оператора B;*

2° *система $\{x_\mu, \mu\in\mathfrak{M}\}$ полна и ортогональна в G_0;*

3° *гильбертова шкала G_β, порождённая оператором B эквивалентна исходной, то есть*

(16) $$E \simeq \bigcap_{\beta<0} G_\beta \text{ в случае (а) и } E \simeq \bigcap_{\beta<\infty} G_\beta \text{ в случае (б).}$$

Это утверждение уточняет Теорему 11 и Предложения 15, 16 в § 5 [13]; случай конечной шкалы был так же разобран в [9].

3. СРАВНЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВ ОПЕРАТОРОВ, ПОРОЖДАЮЩИХ ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ГИЛЬБЕРТОВЫ ШКАЛЫ

1. Как и в предыдущем параграфе, некоторые технические детали в анализе конечной и бесконечной шкал будут различаться. Рассмотрим сначала подробно случай конечных шкал.

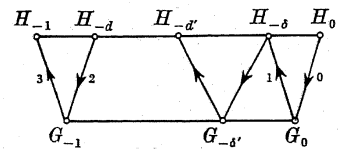
(а) Пусть E допускает представления

(16a) $$E = \bigcap_{a<0} H_a, \qquad (x,y)_a = (A^a x, A^a y)_0,$$

и

$$E = \bigcap_{\beta<0} G_\beta, \qquad [x,y]_\beta = [B^\beta x, B^\beta y]_0,$$

где $(\cdot,\cdot)_0$ и $[\cdot,\cdot]_0$ — скалярные произведения в гильбертовых пространствах H_0 и G_0 соответственно, причём имеет место диаграмма



Диаг. 3

Без ограничения общности можно считать, что нормы M_i ($i = 0, 1, 2, 3$) всех стрелок-вложений $\leqslant 1$. Действительно, операторы A и B можно заменить на tA и sB, что не нарушает представления (16a), но меняет величины норм: $M_0' = M_0 \leqslant 1$ в силу (14); $M_1' = t^{-\delta}M_1$, $M_2' = s^{-1}t^d M_2$, $M_3' = t^{-1}sM_3$, и, если $t = s^{(1+d)/2d}$ и s достаточно велико, то нормы четырёх опорных стрелок в диаг. 3 $\leqslant 1$, а остальных — $\leqslant 1$ по лемме 1. Заметим, что мы выберем

(17) $$\delta = \frac{1}{2}\cdot\frac{d^2}{1+d};$$

это возможно, так как в диаг. 1 $\varepsilon > 0$ может быть любым. Тогда, по лемме 1, $H_{-\delta} \to G_{-\delta'}$, $\delta = \delta'/d$, и $G_{-\delta'} \to H_{-d'}$, $d' = \delta d^{-1}(1+d-\delta)$, при этом

(17a) $$d-d' > d - \frac{\delta}{d}(1+d) = \frac{1}{2}d > 0, \qquad H_{-d'} \to H_{-d}.$$

2. Нам далее будет полезна вспомогательная

Лемма 6. *Пусть существует $T\colon X\to Y$ — непрерывное отображение одного гильбертова пространства в другое, такое, что $Tx = 0$ только для $x = 0$. Тогда $\dim X \leqslant \dim Y$.*

Доказательство. Допустим, $\dim Y < \dim X$. Рассмотрим сопряжённый оператор T^*: $Y \to X$. Так как $\dim T^* Y \leqslant \dim Y < \dim X$, то найдётся $x_0 \neq 0$, $x_0 \perp T^* Y$, то есть для любого $y \in Y$ $(x_0, T^* y)_X = (Tx_0, y)_Y = 0$. Но тогда $Tx_0 = 0$, и противоречие доказывает лемму.

3. Далее мы говорим об операторах $A_1 = A^{-1}$ и $B_1 = B^{-1}$ и полагаем

$$P_u = E^{A_1}_{(-\infty, u]}, \quad P'_u = 1 - P_u, \quad P_{uv} = P_v - P_u,$$

$$Q_v = E^{B_1}_{(-\infty, u]} \text{ и т. п.}, \quad \sigma^D(x, \lambda) = (E^D_\lambda x, x).$$

Лемма 7. *Если* $x \in P_b H_0$, *то*

$$\|Q'_r x\|_{G_0} \leqslant \frac{b^{d-\delta}}{r} \|x\|_{G_0}. \tag{18}$$

Доказательство. По свойствам спектрального разложения

$$r^2 \|Q'_r x\|^2_{G_0} = r^2 \int_r^1 d\delta^{B_1}(x, \lambda) \leqslant \int_0^1 \lambda^2 d\delta^{B_1}(x, \lambda) = [B_1 x, B_1 x] \leqslant$$

$$\leqslant (A_1^d x, A_1^d x) \leqslant b^{2(d-\delta)} (A^\delta x, A^\delta x) \leqslant b^{2(d-\delta)} [x, x],$$

и лемма доказана.

По таким же оценкам получим: если $u \in E^{B_1}_c G_0$, то

$$\|P'_a u\|_{H_0} \leqslant \frac{c}{a} \|u\|_{H_0}$$

Положим $R = 10 + 20/d$ и $f(x) = R^{-1} x^R$.

Лемма 8. *Пусть* $x \in P_{ab} H_0$ *и* $Q_{cr} x = 0$, *где* $c = f(a)$, $b = f(r)$. *Тогда* $x = 0$.

Доказательство. Вместо формальных ссылок на лемму 7 мы повторим некоторые подсчёты для смещённых значений параметров. Положим

$$x = Q_c x + Q'_r x = u + z;$$

тогда

$$r^{2(1-\delta')} \|Q'_r x\|^2_{G_{-\delta'}} = r^{2(1-\delta')} \int^1 \lambda^{2\delta'} d\delta^{B_1}(x, \lambda) \leqslant \int_0^1 \lambda^2 d\delta^{B_1}(x, \lambda) =$$

$$= [B_1 x, B_1 x] \leqslant (A_1^d x, A_1^d x) \leqslant$$

$$\leqslant b^{2(d-d')} (A_1^{d'} x, A_1^{d'} x) \leqslant b^{2(d-d')} [x, x]_{G_{-\delta'}}$$

и тем самым

$$\|z\|_{G_{-\delta'}} \leqslant \frac{b^{d-d'}}{r^{1-\delta'}} \|x\|_{G_{-\delta'}}.$$

Поэтому

$$\|z\|_{H_{-\delta}} \leqslant \|Z\|_{G_0} \leqslant r^{-\delta'} \|Z\|_{G_{-\delta'}} \leqslant \frac{b^{d-d'}}{r} \|x\|_{G_{-\delta'}} \leqslant \frac{b^{d-d'}}{r} \|x\|_{H_{-\delta}} \tag{19}$$

Аналогичные оценки для $u \in Q_c G_0$ дают

$$a^{2(1-\delta)} \|P'_a u\|^2_{H_\delta} = a^{2(1-\delta)} \int_a^1 \lambda^{2\delta} d\sigma^{A_1}(u, \lambda) \leqslant \int_0^1 \lambda^2 d\delta^{A_1}(u, \lambda) =$$

$$= (A_1 u, A_1 u) \leqslant [B_1 u, B_1 u] \leqslant c^{2(1-\delta')} [B_1^{\delta'} u, B_1^{\delta'} u] \leqslant$$

$$\leqslant c^{2(1-\delta')} (A_1^\delta u, A_1^\delta u),$$

так что

$$\|P'_a u\|_{H_{-\delta}} \leqslant \frac{c^{1-\delta'}}{a^{1-\delta}} \|u\|_{H_{-\delta}} \leqslant 2 \frac{c^{1-\delta'}}{a^{1-\delta}} \|x\|_{H_{-\delta}}.$$

В последнем неравенстве мы воспользовались тем, что $u = x - Z$ и в силу (19)

$$\|u\|_{H_{-\delta}} \leqslant \|x\|_{H_{-\delta}} + \|z\|_{H_{-\delta}} \leqslant \left(1 + \frac{b^{d-d'}}{r}\right) \|x\|_{H_{-\delta}},$$

а $b^{d-d'} < r$ по выбору постоянной R и по условиям на b, r. Далее, так как $\|P'_a\|_{H_{-\delta}} = 1$, то $(\|\cdot\| = \|\cdot\|_{H_{-\delta}})$

$$\|x\| = \|P'_a x\| \leqslant \|P'_a u\| + \|P'_a z\| \leqslant \|P'_a u\| + \|z\| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{b^{d-d'}}{r} + 2 \frac{c^{1-\delta'}}{a^{1-\delta}}\right) \|x\|,$$

поскольку по выбору R и условиям на a, b, c, r

$$2 \frac{c^{1-\delta'}}{a^{1-\delta}} + \frac{b^{d-d'}}{r} < 1. \tag{20}$$

Итак, $x = 0$, и лемма доказана.

4. Предложение 9. *Пусть* H_α *и* G_β — *те же, что выше, гильбертовы шкалы, и* $\bigcap_{\alpha < \alpha_0} H_\alpha = \bigcap_{\beta < \alpha_0} G_\beta$, $\alpha_0 = 0$ *или* $+\infty$.

Тогда существует такая постоянная R, *что*

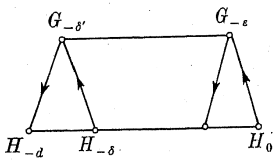
$$\dim E^B_{g^{-1}(a), g(b)} \leqslant \dim E^A_{ab} \leqslant \dim E^B_{g(a), g^{-1}(b)}, \tag{21}$$

где $g(t) = (\varrho t)^\varrho$, $\varrho = R^{-1}$.

Доказательство. По лемме 8 оператор $T = Q_{cr}$: $P_{ab} H_0 = X \to Y = Q_{cr} G_0$ в нуль переводит только нуль и, по лемме 6,

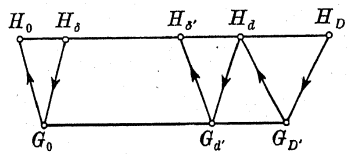
$\dim E_{ab}^{A_1} \leqslant \dim E_{cr}^{B_1}$. Так как $E_{ab}^{A_1} = E_{b^{-1}a^{-1}}^{A}$, то правое неравенство в (21) доказано.

В силу полной симметрии шкал H и G в условиях предложения верно и левое неравенство в (21). Точнее, имеет место диаграмма



и дополняя её, как и выше (в леммах 7 и 8), по интерполяции с изменёнными показателями, мы придём к нужному неравенству. Итак, (21) доказано в случае $a_0 = 0$.

Случай $a_0 = \infty$ рассматривается аналогично.



Диаг. 4

На основе диаг. 4 (срав. диаг. 2) получаются такие же неравенства как в леммах 7 и 8. Заметим лишь, что в случае $a_0 = 0$ стрелки внутри трапеции получались из интерполяции, и выбором малого δ (17) мы добивались неравенства $d' < d$, которое и обеспечивало малость коэффициентов в неравенствах (19) и (20). Теперь из-за не управляемого нами роста функции $a'(a)$ и возможного завала правых стрелок, то есть $a'(a)/a \to \infty$, внутренние тоже могли бы заваливаться, но мы их строим не по интерполяции, а исходя из эквивалентности шкал H и G. При этом заменой операторов, порождающих шкалы, на кратные им мы не можем добиться того, что нормы всех стрелок $\leqslant 1$, но это лишь увеличит постоянную R, так как аналогом (20) будет неравенство

$$K_1 b^{\gamma_1} r^{-\gamma_2} + K_2 c^{\gamma_3} a^{-\gamma_4} < 1, \quad 1 \leqslant c < a < b < r, \tag{20a}$$

где $\gamma_i > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, — показатели, рационально зависящие от индексов в диаг. 4. Тем самым, предложение 9 доказано.

5. Основные трудности в проведенном в этом параграфе анализе вызваны необходимостью следить за каждым участком спектра оператора. Если же A^{-1} и B^{-1} вполне непрерывны, то E_λ^A и E_λ^B конечномерны, и

$$\dim E_{(a,b]}^A = \dim E_{(-\infty,b]}^A - \dim E_{(-\infty,a]}^A,$$

так что достаточно ограничиться анализом целочисленной функции $\dim E_\lambda^A = \dim E_{(-\infty,\lambda]}^A$ или обратной к ней s_n^{-1}, где s_n — s-числа оператора A^{-1} ([4], гл. 2, § 1). Это можно сделать сравнительно просто на основании геометрических свойств s-чисел (срав. [9], лемма 2 и неравенства (6) и (7)) вполне непрерывного оператора, что даёт непосредственное доказательство следующего частного случая Предложения 9:

Предложение 9а. *Пусть в условиях Предложения 9 оператор A^{-1} (B^{-1}) вполне непрерывен. Тогда B^{-1} (A^{-1}) тоже вполне непрерывен, и существует такая постоянная R, что*

$$\frac{1}{R}\left(s_n(B^{-1})\right)^R \leqslant s_n(A^{-1}) \leqslant R\left(s_n(B^{-1})\right)^{1/R}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{21a}$$

Теперь перейдём к построению перестановки базиса.

4. ПОСТРОЕНИЕ ПЕРЕСТАНОВКИ БЕЗУСЛОВНОГО БАЗИСА

В этом параграфе мы будем пользоваться как результатами, так и обозначениями §§ 1-3. Основным в $E = \bigcap_{a<a_0} H_a$, $a_0 = 0$ или ∞, считаем построенный в Предложении 2 базис $\{e_\nu, \nu \in \mathfrak{N}\}$; он ортогонален во всех H_a и нормирован в H_0, $(e_\nu, e_\nu)_0 = 1$. Кроме того,

$$Ae_\nu = \lambda_\nu e_\nu, \tag{5}$$

так что $\dim E_{ab}^A$ есть не что иное, как число тех индексов ν, для которых $a < \lambda_\nu \leqslant b$.

Базис $\{x_\mu, \mu \in \mathfrak{M}\}$ будем далее считать нормированным в G_0; точнее, заменяем его в случае необходимости на $r_\mu x_\mu$, где $r_\mu = [x_\mu, x_\mu]_0^{-1/2}$. Это первый шаг в построении оператора T: $Te_\nu = r_{\sigma(\nu)} x_{\sigma(\nu)}$, — осуществляющего изоморфизм E на себя.

Напомним, что $Bx_\mu = \lambda'_\mu x_\mu$, $\mu \in \mathfrak{M}$.

Теперь будем строить σ: $\mathfrak{N} \to \mathfrak{M}$ — необходимое взаимнооднозначное соответствие счётных множеств индексов базисов $\{e_\nu\}$ и $\{x_\mu\}$.

Положим $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_{k+1} = R\gamma_k^R$, $k \geqslant 1$, R из Предложения 9, и

$$\mathfrak{N}_k = \{\nu \in \mathfrak{N}\colon \gamma_k < \lambda_\nu \leqslant \gamma_{k+1}\}, \quad \mathfrak{M}_k = \{\mu \in \mathfrak{M}\colon \gamma_k < \lambda'_\mu \leqslant \gamma_{k+1}\}.$$

В силу Предложения 9

$$\dim E^B_{\gamma_{k+1},\gamma_{k+m-1}} \leqslant \dim E^A_{\gamma_k\gamma_{k+m}} \leqslant \dim E^B_{\gamma_{k-1}\gamma_{k+m+1}}$$

или, что то же,

(22) $$\Big|\bigcup_{i=1}^{m-1} \mathfrak{M}_{k+i}\Big| \leqslant \Big|\bigcup_{i=0}^{m} \mathfrak{N}_{k+i}\Big| \leqslant \Big|\bigcup_{i=-1}^{m+1}\mathfrak{M}_{k+i}\Big|$$

для любых $k=1,2,\ldots$ и $m=0,1,\ldots$

Основную комбинаторную лемму сразу докажем для множеств любой мощности.

Лемма 10. *Пусть $\mathfrak{N}=\bigcup_{k=-\infty}^{\infty}\mathfrak{N}_k$ и $\mathfrak{M}=\bigcup_{k=-\infty}^{\infty}\mathfrak{M}_k$ — дизъюнктные разбиения множеств $\mathfrak N$ и $\mathfrak M$, и для них выполнены условия (22) при любом целом k. Тогда существует взаимнооднозначное соответствие $\sigma\colon \mathfrak N \xrightarrow{\sim} \mathfrak M$, такое, что*

(23) $$\sigma(\mathfrak N_k)\subset \mathfrak M_{k-1}\cup\mathfrak M_k\cup\mathfrak M_{k+1},\qquad k\in\boldsymbol Z.$$

Доказательство. Сначала построим взаимнооднозначные отображения в (into) $\varrho\colon \mathfrak N\to\mathfrak M$ и $\tau\colon \mathfrak M\to\mathfrak N$, так, что

(23a) $$\varrho(\mathfrak N_k)\subset\mathfrak M_{k-1}\cup\mathfrak M_k\cup\mathfrak M_{k+1}\quad\text{и}\quad\tau(\mathfrak M_k)\subset\mathfrak N_{k-1}\cup\mathfrak N_k\cup\mathfrak N_{k+1},$$

а затем, используя конструкцию доказательства теоремы Кантора-Бернштейна об эквивалентности множеств (см., например, [15], гл. I, § 6), построим σ.

Каждое из множеств $\mathfrak M_k$ конечно или бесконечно. Если $|\mathfrak M_k|<\infty$, положим

(24a) $$\mathfrak M_k^1=\mathfrak M_k^0=\mathfrak M_k^{-1}=\mathfrak M_k;$$

если же $|\mathfrak M_k|=\infty$, то разобьём $\mathfrak M_k$ на три непересекающихся множества $\mathfrak M_k^1$, $\mathfrak M_k^0$, $\mathfrak M_k^{-1}$ одной и той же мощности

(24б) $$|\mathfrak M_k^\varepsilon|=|\mathfrak M_k|,\qquad \varepsilon=0,\pm1.$$

Определим теперь многозначное отображение $R\colon\mathfrak N\to\mathfrak M$, полагая

(25a) $$R(\nu)=\bigcup_{\varepsilon=0,\pm1}\mathfrak M^\varepsilon_{k-\varepsilon},\qquad \nu\in\mathfrak N_k,$$

если все три слагаемых справа конечны, и

(25б) $R(\nu)$ = объединению тех из трёх этих множеств, что бесконечны, в противном случае.

Тогда множество целых чисел $\boldsymbol Z$ разбивается на два подмножества

$$K=\{k\in\boldsymbol Z\colon |R(\mathfrak N_k)|<\infty\}\quad\text{и}\quad\bar K=\{k\in\boldsymbol Z\colon |R(\mathfrak N_k)|=\infty\}.$$

В силу (24) и (25), если $k\in\bar K$, то, $R(\mathfrak N_k)\cap R(\mathfrak N_l)=\emptyset$ для любого $l\ne k$. Условие (22) показывает, что в любом случае

$$|R(\mathfrak N_k)| = \Big|\sum_{\varepsilon=-1}^{+1}\mathfrak M^\varepsilon_{k-\varepsilon}\Big| = \Big|\bigcup_{\varepsilon=-1}^{+1}\mathfrak M_{k+\varepsilon}\Big|\geqslant|\mathfrak N_k|;$$

поэтому для $k\in\bar K$ существует взаимнооднозначное отображение

$$\varrho_k\colon \mathfrak N_k\to\mathfrak M^1_{k-1}\cup\mathfrak M^0_k\cup\mathfrak M^{-1}_{k+1}\subset\mathfrak M_{k-1}\cup\mathfrak M_k\cup\mathfrak M_{k+1},$$

такое, что

(26) $$\varrho_k(\nu)\cap R(\mathfrak N_l)=\emptyset\quad\text{для любых } \nu\in\mathfrak N_k \text{ и } l\ne k.$$

Для $\tilde{\mathfrak N}=\bigcup_{k\in K}\mathfrak N_k$ все $R(\nu)$, $\nu\in\tilde{\mathfrak N}$, суть конечные множества, и к этой системе применима Лемма 3. Действительно, проверим, что для любого $N\subset\tilde{\mathfrak N}$, $|N|<\infty$, выполнено условие

(27) $$|R(N)|\geqslant|N|.$$

Положим

$$K(N)=\{k\in\boldsymbol Z\colon \mathfrak N_k\cap N\ne\emptyset\}\subset K$$

и

(28) $$\tilde N=\bigcup_{i\in K(N)}\mathfrak N_i.$$

Так как $R(\nu)=R(\mathfrak N_k)$, если $\nu\in\mathfrak N_k$, то $R(\tilde N)=R(N)$, $|\tilde N|\geqslant|N|$, и тем самым, достаточно (27) проверить лишь для множеств вида (28), то есть $N=\bigcup_{i\in L}\mathfrak N_i$, где L — некоторое конечное подмножество в K. Более того, если $\{j-1,j+1\}\subset L$, то $\mathfrak M_{j+\varepsilon}$, $\varepsilon=0,\pm1$, конечны,

$$R(\mathfrak N_j)=\mathfrak M_{j-1}\cup\mathfrak M_j\cup\mathfrak M_{j+1}\subset R(\mathfrak N_{j-1})\cup R(\mathfrak N_{j+1}),$$

и можно считать, что $j\in L$. Итак, L можно считать состоящим из конечного числа отрезков $L_j=[l_j,l_j+p_j]$, $l_j+p_j<l_{j+1}$, причём $l_{j+1}-(l_j+p_j)>2$. Но тогда в силу (22) имеем

(29) $$\Big|R\Big(\bigcup_{i\in L_j}\mathfrak N_i\Big)\Big|=\Big|\bigcup_{i=l_j-1}^{j+p_j+1}\mathfrak M_i\Big|\geqslant\Big|\bigcup_{i\in L_j}\mathfrak N_i\Big|,$$

а в виду неравенства $l_{j+1}-(l_j+p_j)>2$ множества $R(\bigcup_{i\in L_j}\mathfrak N_i)$ при разных j не пересекаются, так что складывая неравенства (29) при всех j

получим неравенство (27). Тогда по Лемме 3 существует взаимнооднозначное отображение $\tilde{\varrho}\colon \tilde{\mathfrak{N}} \to \mathfrak{M}$, такое, что $\tilde{\varrho}(\nu) \in R(\nu)$, $\nu \in \tilde{\mathfrak{N}}$, а в силу (26) $\tilde{\varrho}(\nu) \neq \varrho_k(\mu)$ для всяких $\nu \in \tilde{\mathfrak{N}}$ и $\mu \in \mathfrak{N}_k$, $k \in \bar{K}$. Поэтому единое отображение $\varrho\colon \mathfrak{N} \to \mathfrak{M}$, $\varrho|\mathfrak{N}_k = \varrho_k$, $k \in \bar{K}$ и $\varrho|\tilde{\mathfrak{N}} = \tilde{\varrho}$, будет взаимнооднозначным; оно, по построению ϱ_k и $\tilde{\varrho}$, удовлетворяет условию (23a).

Аналогично строится отображение $\tau\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ со свойством (23a).

Для завершения доказательства Леммы 10 положим (см. [15], стр. 12-13) $\mathfrak{N}^0 = \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}^1 = \tau(\mathfrak{M})$ и $\mathfrak{N}^{i+2l} = (\tau\varrho)^l \mathfrak{N}^i$, $i = 0,1$. Тогда $\mathfrak{N}^{k+1} \leqslant \leqslant \mathfrak{N}^k$, $k = 0,1\ldots$, и

$$\mathfrak{N} = \bigcup_{k=0}^{\infty} (\mathfrak{N}^k \setminus \mathfrak{N}^{k+1}) \cup \Big(\bigcap_{0}^{\infty} \mathfrak{N}^k\Big) = \overline{\mathfrak{N}} \cup \overline{\overline{\mathfrak{N}}} \cup \mathfrak{N}_\infty,$$

где

$$\overline{\mathfrak{N}} = \bigcup_{l=0}^{\infty} (\mathfrak{N}^{2l} \setminus \mathfrak{N}^{2l+1}), \qquad \overline{\overline{\mathfrak{N}}} = \bigcup_{p=0}^{\infty} (\mathfrak{N}^{2l+1} \setminus \mathfrak{N}^{2l+2}), \qquad \mathfrak{N}_\infty = \bigcap_{0}^{\infty} \mathfrak{N}^k.$$

Определим σ, полагая $\sigma|\overline{\mathfrak{N}} = \varrho|\overline{\mathfrak{N}}$ и $\sigma|\overline{\overline{\mathfrak{N}}} \cup \overline{\overline{\mathfrak{N}}}_\infty = \tau^{-1}|\overline{\overline{\mathfrak{N}}} \cup \mathfrak{N}_\infty$. Так построенное отображение $\sigma\colon \mathfrak{N} \to \mathfrak{M}$ будет взаимнооднозначным соответствием множеств $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$, причём, в силу условий (23a) на отображения ϱ и τ, выполнено условие (23) для σ. Лемма 10 доказана.

Далее она применяется к системе индексов $\mathfrak{N} = \bigcup \mathfrak{N}_k$ и $\mathfrak{M} = \bigcup \mathfrak{M}_k$ базисов $\{e_\nu\}$ и $\{x_\mu\}$ и их разбиениям, указанным перед Леммой 10. В этом случае $\mathfrak{N}_k = \mathfrak{M}_k = \emptyset$ при $k \leqslant 0$.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО КВАЗИЭКВИВАЛЕНТНОСТИ БАЗИСОВ

После установленных выше фактов для доказательства основной теоремы остаётся провести сравнение пространств коэффициентов в разложениях векторов E по базисам (e) и (x). Это — общий приём и общее место во всех работах о квазиэквивалентности базисов.

Как отмечалось в конце §1, $x \in H_\alpha$ тогда и только тогда, когда

$$x = \sum_{\nu \in \mathfrak{N}} \xi_\nu e_\nu \quad \text{и} \quad \sum |\xi_\nu|^2 |\lambda_\nu|^{2\alpha} < \infty. \tag{30}$$

По тем же соображениям

$$u = \sum_{\mu \in \mathfrak{M}} \eta_\mu x_\mu \in G_\beta$$

тогда и только тогда, когда

$$\sum |\eta_\mu|^2 |\lambda'_\mu|^{2\beta} < \infty. \tag{30a}$$

В силу условий (23) верно и вложение

$$\sigma^{-1}(\mathfrak{M}_k) \subset \bigcup_{|i| \leqslant 1} \mathfrak{N}_{k+i}.$$

Напомним, что $\gamma_{k+i} = R\gamma_k^R$. Если $\nu \in \mathfrak{N}_k$, т.е. $\gamma_k < \lambda_\nu \leqslant \lambda_{k+1}$, то

$$\sigma(\nu) \in \bigcup_{|i| \leqslant 1} \mathfrak{M}_{k+i},$$

т. е. $\gamma_{k-1} \leqslant \lambda'_{\sigma(\nu)} \leqslant \gamma_{k+2}$, и при $C = R^{R+1}$

$$\lambda'_{\sigma(\nu)} \leqslant \gamma_{k+2} \leqslant C\gamma_k^{R^2} < C\lambda_\nu^{R^2},$$

и

$$\lambda_\nu \leqslant \gamma_{k+1} \leqslant C\gamma_{k-1}^R \leqslant C(\lambda'_{\sigma(\nu)})^{R^2}.$$

Тем самым, для собственных значений λ, λ' операторов A и B выполнены неравенства

$$\frac{1}{C}\lambda_\nu^{1/R^2} \leqslant \lambda'_{\sigma(\nu)} \leqslant C\lambda_\nu^{R^2}, \tag{31}$$

аналогичные неравенствам (21a), уже разобранным в случае вполне непрерывных операторов.

Из соотношений (30) и (31) вытекает, что оператор

$$T\colon E \to E, \qquad E = \bigcap_{\alpha < \alpha_0} H_\alpha = \bigcap_{\beta < \alpha_0} G_\beta,$$

определённый по формулам $Te_\nu = x_{\sigma(\nu)}$, $\nu \in \mathfrak{N}$, является изоморфизмом E на себя. Действительно, если $x = \sum \xi_\nu e_\nu$, то $Tx = \sum \xi_\nu x_{\sigma(\nu)}$, и при $\beta > 0$

$$\|Tx\|_{G_\beta}^2 = \sum |\xi_\nu|^2 |\lambda'_{\sigma(\nu)}|^{2\beta} \leqslant C^2 \sum |\xi_\nu|^2 |\lambda_\nu|^{4R^2\beta} = C^2 \|x\|_{H_{R^2\beta}}$$

а при $\beta < 0$

$$\|Tx\|_{G_\beta}^2 \leqslant C^2 \|x\|_{H_{\beta/R^2}}.$$

Аналогично, для любого $u \in E$

$$\|T^{-1}u\|_{H_\alpha}^2 \leqslant \begin{cases} C^2 \|u\|_{G_{R^2\alpha}}, & \alpha > 0, \\ C^2 \|u\|_{G_{\alpha/R^2}}, & \alpha < 0. \end{cases}$$

Так как каждая система норм H_α и G_β является фундаментальной в E ($\alpha, \beta < 0$ в случае конечной шкалы, и α, $\beta > 0$ для бесконечной), то эти оценки устанавливают непрерывность операторов T и T^{-1} в E. Это завершает доказательство теоремы:

Теорема 0. *Центр гильбертовой шкалы обладает свойством* (QE).

icm©

6. НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ И ВОПРОСОВ

1. Выше считалось, что пространство E сепарабельно, т. е. гильбертово пространство H_0 сепарабельно. Конечно, это — основной случай в анализе, тем более, что часто операторы A^{-1} оказываются вполне непрерывными. Но не мешает заметить, что в проведенном доказательстве сепарабельность существенно не использовалась. Даже в Лемме 10 множества $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$ и их составляющие могли иметь любую мощность, а в Лемме 6 (и Предложении 9) могли быть любые размерности. Для полной ясности сейчас надо лишь напомнить общее понятие безусловного базиса (Лорч [11]).

Определение 11. Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое множество индексов $\{\nu\}$, и $\{(e_\nu', e_\nu),\ \nu\in\mathfrak{N}\}$ — биортогональная система в E, то есть

$$e_\nu'(e_\mu) = 1, \quad \nu = \mu \text{ и } = 0, \nu \neq \mu.$$

Система $\{e_\nu, \nu\in\mathfrak{N}\}$ называется *безусловным базисом* в E, если для любого $x\in E$ имеет место разложение

$$x = \sum_{\nu\in\mathfrak{N}} e_\nu'(x)\, e_\nu,$$

где под сходимостью ряда понимается следующее: для любых $\varepsilon > 0$ и полунормы p в E найдётся конечное подмножество $N\subset\mathfrak{N}$, такое, что для всех $N'\subset\mathfrak{N}$, $|N'|<\infty$ и $N\subset N'$, выполнено неравенство

$$p\Big(x - \sum_{\nu\in N'} e_\nu'(x)\, e_\nu\Big) < \varepsilon.$$

Для каждого $x\in E$ лишь для счётного подмножества $\mathfrak{N}_x\subset\mathfrak{N}$ индексов $e_\nu'(x)\neq 0$, и поэтому можно повторить и оценки § 5. Таким образом Теорема 0 верна и для шкал E (построенных над гильбертовым пространством H_0) любой размерности, а не только $\aleph_0$.

2. То, что даже в сепарабельном случае речь идёт о безусловных базисах, существенно. Уже давно Бабенко [16] построил пример небезусловного базиса в $H\simeq L^2[0,2\pi]$ и, тем самым, пример базиса, не эквивалентного ортонормированному. Если же пространство E ядерно (в случае шкал это означает, что A^{-1} вполне непрерывен и для конечной шкалы $\forall\tau>0$: $\sum s_n^\tau(A^{-1})<\infty$, а для бесконечной $\exists T>0$: $\sum s_n^T(A^{-1})<\infty$) то как показали Дынин и автор ([17]; [13], § 4), всякий базис в E является безусловным, и поэтому для ядерных E в теореме 0 оговорку о „безусловности" базиса можно опустить. Именно такая теорема и доказывалась автором в [13], § 6. Но ядерные пространства и есть самый широкий класс пространств, где понятия „базис" и „безусловный базис" совпадают. Точнее, как показал

Войтинский [18], в любом счётногильбертовом пространстве E с безусловным базисом, если оно не ядерно, существует небезусловный базис.

3. В работе Драгилева [7] и в настоящей статье указаны два класса счётногильбертовных пространств, имеющих свойство (QE). Пересекаются эти классы по совокупности ядерных гильбертовых шкал. Оставляя в стороне общий вопрос о существовании (безусловного) базиса, отметим, что не решена

Задача 12. Пусть $\mathscr{F}$ — класс всех сепарабельных пространств Фреше, имеющих безусловный базис, а $\mathscr{H}$ — класс сепарабельных счётногильбертовых пространств с безусловным базисом. Описать в $\mathscr{F}$ и $\mathscr{H}$ все пространства со свойством (QE).

Заметим, что в классе сепарабельных банаховых пространств и подобный вопрос недавно решён Линденштрауссом, Пелчинским и Циппиным [19] - [21]. Именно, в [19] показано (теорема 6.1 и следствие 1, 297), что в l_1 и c_0 все безусловные нормированные базисы эквивалентны, а в [20], Теорема 1, установлено, что сепарабельное банахово пространство со свойством (QE) есть l_2, l_1 или c_0. Пример Пелчинского [21] даёт безусловный базис в $l^p, p\neq 1, 2, \infty$, не эквивалентный каноническому. Поэтому в задаче 12 для класса $\mathscr{F}$ хотя бы ясно, что (QE) есть не у всех пространств из $\mathscr{F}$. Но для $\mathscr{H}$ в задаче 12 нет даже такого утешительного примера, хотя надежд на полное решение вопроса в случае $\mathscr{H}$, естественно, больше, чем для класса $\mathscr{F}$.

Более подробное обсуждение вопросов, относящихся к Задаче 12, проведено в докладе [25] автора на Варшавском Симпозиуме по ядерным пространствам и идеалам опереторов, июнь 1969.

4. Рассматриваемые задачи тесно связаны с анализом булевских алгебр проекторов в банаховом пространстве X (см. [20] и [22]). Для нас выше существенным было сравнение (§ 3) булевских алгебр E_Δ^A и E_Δ^B, порождённых двумя самосопряжёнными операторами A и B. Утверждение Леммы 8 можно считать теоремой типа Палея-Винера. Более общо, пусть $P(\Delta)$ и $Q(\sigma)$ — два булевских представления алгебры измеримых по Лебегу множеств в алгебре ограниченных операторов в X; пара неотрицательных функций $p(\Delta)$, $q(\sigma)$ даёт утверждение типа Палея-Винера, если $x\in X$, $\|P(\Delta)x\|\leqslant p(\Delta)$, $\|Q(\sigma)x\|\leqslant q(\sigma)$, $\forall \Delta, \sigma \Rightarrow x = 0$.

В Лемме 8, $p(\Delta) = 0$, если $\Delta\cap[a, b] = \emptyset$, и $q(\delta) = 0$, если $\sigma\subset[c, r]$.

Элемент P булевской алгебры $\mathscr{P}$ назовём *безгранично делимым*, если для любого натурального n существуют дизъюнктные $P_i\in\mathscr{P}$ $(i = 1, \ldots, n)$, т. е. $P_i\cap P_j = 0, i\neq j$, такие, что $P = \sum_1^n P_i$.

Задача 13. Пусть $\mathscr{P}$ и $\mathscr{Q}$ — две ограниченные максимальные алгебры проекторов в X, содержащие безгранично делимые элементы. Дать условия на X, $\mathscr{P}$, $\mathscr{Q}$, обеспечивающие выполнение следующего условия:

(∗) для любого $\varepsilon > 0$ найдутся безгранично делимые элементы $P_\varepsilon \in \mathscr{P}$ и $Q_\varepsilon \in \mathscr{Q}$, такие, что $\|P_\varepsilon Q_\varepsilon\| < \varepsilon$.

Такого рода утверждение существенно, как это видно из работы Нёйбауэра [24], при анализе линейной группы $GL(X)$ банахова пространства X.

Именно оно в случае

$$X = l^p,\ 1 \leqslant p < \infty,\ P_M x = \sum_{k \in M} \xi_k e_k,\ M \subset \boldsymbol{Z};\quad Q = A^{-1}PA,$$

где A — фиксированный автоморфизм $A\colon l^p \to l^p$, является основным аналитическим моментом в доказательстве Нёйбауэра [24] теоремы Кюйпера о стягиваемости $GL(l^2)$ и её аналога для l^p, $1 \leqslant p < \infty$.

Проверка условия (∗) в случае $X = L^p[0,1]$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $(P_\Delta x)(t) = \varkappa_\Delta(t)x(t)$, $Q(\sigma) = A^{-1}P_\sigma A$, $\Delta, \sigma \subset [0,1]$, где $A\colon X \to X$ — произвольный фиксированный автоморфизм, дало бы утверждение о стягиваемости $GL(L^p)$ (¹). Для $p = 1, \infty$ это сделано Семёновым, Эдельштейном и автором [26].

Отметим, что комбинирование результатов [26] и [22], Теорема 10, даёт

Предложение 13а. *Пусть $X = L^1(M,\mu)$ или $L^\infty(M,\mu)$, где (M,μ) — некоторое пространство с конечной мерой. Тогда две любые ограниченные максимальные алгебры $\mathscr{P}$ и $\mathscr{Q}$ проекторов в X удовлетворяют условию* (∗).

5. Перестройка гильбертовой шкалы, проведенная в § 2 с помощью компактной группы $\{E_M, M \subset \mathfrak{M}\}$ возможна и на основе представления любой компактной группы G. Новые скалярные произведения

$$[x, y]_\alpha = \int_G \big(E(g)x, E(g)y\big)_\alpha dg \tag{11a}$$

(¹) Осенью 1969 г. Ч. Маккарти и автор доказали на этом же пути стягиваемость $GL(L^p[0,1])$, $1 < p < \infty$, анализируя другую алгебру проекторов P, а именно, для целых $k \geqslant 0$ $(P_k x)(t) = \sum_{2^{k-1} \leqslant j < 2^k} x_j \exp 2\pi ijt$, где (x_j) — коэффициенты Фурье функции $x \in L^p$, и $P = \{P_M = \sum_{k \in M} P_k\colon M \subset Z^t\}$, где M подмножества натурального ряда.

порождают эквивалентную систему норм, и в случае конечного центра повторение рассмотрений § 2 даёт

Предложение 5а. *Пусть $E = \bigcap_{\alpha<0} H_\alpha$ — конечный центр гильбертовой шкалы, порождённой оператором $A \geqslant 1$ в H_0, и $E(g)$ — представление компактной группы G в E. Тогда можно построить гильбертово пространство F_0 и строго положительный оператор B в нём так, что*

(а) *$E(g)$ — унитарные операторы в F_0, $g \in G$;*

(б) *$E(g)$ коммутирует с B;*

(в) *гильбертова шкала F_β, порождённая оператором B, эквивалентна исходной, то есть $E = \bigcap_{\beta<0} F_\beta$.*

Бесконечный центр здесь остался неразобранным (срав. Теор. 11 в [13]). Для случая группы $\boldsymbol{Z}_2^{\mathfrak{M}}$ в § 2 существенным облегчением было то, что неприводимые составляющие представления оказывались автоматически одномерными (они порождались элементами безусловного базиса $\{x_\mu\}$) и все операторы, определяющие скалярные произведения в разных $\hat{G}_\lambda$, коммутировали. Это замечание показывает, что справедливо

Предложение 14. *Пусть $E = \bigcap_{\alpha<0} H_\alpha$ — конечная гильбертова шкала, и X — дополняемое подпространство в E с проектором P, то есть $P|X = 1_X$, $PE = X$. Тогда*

(а) *X и $X^\perp = \operatorname{Ker} P$ изоморфны конечным гильбертовым шкалам;*

(б) *в X и в $X^\perp$ есть безусловные базисы $\{x_\mu^0, \mu \in \mathfrak{M}_1\}$ и $\{y_\mu^0, \mu \in \mathfrak{M}_2\}$;*

(в) *для всякого безусловного базиса $\{x_\mu\}$ в X существует изоморфизм S всего E на себя, такой, что $Sx_\mu = r_\mu e_{\sigma(\mu)}$, где $\sigma\colon \mathfrak{M}_1 \to \mathfrak{N}$ и $r_\mu \neq 0$ — некоторое взаимнооднозначное отображение.*

Действительно, если положить $G = \{\pm P \pm (1-P)\}$ то (б) и (в) Предложения 5а показывают, что верно (а), причём шкалы X и $X^\perp$ будут порождаться в PF_0 и $(1-P)F_0$ операторами PBP и $(1-P)B(1-P)$ соответственно.

Из утверждения (а) и Предложения 2 вытекает (б).

Если теперь $\{x_\mu, \mu \in \mathfrak{M}_1\}$ — безусловный базис в X, то $\{\bar{x}_\mu, \mu \in \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2\}$, где $\bar{x}_\mu = x_\mu$, $\mu \in \mathfrak{M}_1$, и $\bar{x}_\mu = y_\mu^0$, $\mu \in \mathfrak{M}_2$, — безусловный базис во всём пространстве E и по основной Теореме 0 существует автоморфизм $S\colon E \to E$, такой, что $S\bar{x}_\mu = r_\mu e_{\sigma(\mu)}$. Это и доказывает (в).

Предложение 14в усиливает результат Бессаги [1], теорема 2.2, но только для конечных гильбертовых шкал. К сожалению, остался не выясненным

Вопрос 15. Верно ли, что дополняемое подпространство в центре бесконечной гильбертовой шкалы само изоморфно бесконечной гильбертовой шкале?

6. Выше речь шла о центрах гильбертовых шкал, то есть о проективных пределах $E \simeq \operatorname{lim\,proj}_{\alpha\uparrow\alpha_0} H_\alpha$. Но основная теорема 0 верна и для *коцентров* (см. [12], Теорема 8), т. е. для индуктивных пределов $E' = \operatorname{lim\,ind}_{\alpha\downarrow\alpha_0} H_\alpha$, $\alpha_0 \geqslant -\infty$. В этом можно убедиться как исходя из соображений двойственности, так и повторяя с незначительными модификациями доказательство теоремы.

7. Проведенные построения (§§ 2-4) позволяют привести примеры неизоморфных пар метрических (и сопряжённых к ним) пространств — не банаховых и не совершенных. В банаховом случае вопросы изоморфизма и неизоморфизма решаются на основе различных геометрических соображений (С. Банах, М. Кадец, Г. Хенкин и др.). Для совершенных же $\mathscr{F}$-пространств главным и почти единственным инструментом являются аппроксимативные размерности Φ и Γ А. Колмогорова и А. Пелчинского (подробнее см. [13], §§ 2-3). Но если E не совершенное, то есть в нём есть ограниченное некомпактное множество, то $\Phi(E) = \emptyset$ и $\Gamma(E) = \emptyset$.

Предложение 16. *Пусть $A \geqslant 1$, $B \geqslant 1$ — неограниченные операторы в гильбертовых пространствах H_0 и G_0 соответственно, и H_α, G_β — гильбертовы шкалы, ими порождённые. Тогда пространства $E = \bigcap_{\alpha<0} H_\alpha$ и $F = \bigcap_{\alpha<\infty} G_\alpha$ неизоморфны.*

Доказательство. Пусть $\{e_\nu, \nu \in \mathfrak{N}\}$ и $\{f_\mu, \mu \in \mathfrak{M}\}$ — безусловные базисы в E и F соответственно, построенные в Предложении 2. Без ограничения общности можно считать выполненными условия типа (5). Если E и F изоморфны, то есть существует $U\colon E \to F$, непрерывный и имеющий непрерывный обратный $U^{-1}\colon F \to E$, то $\{f'_\nu = Ue_\nu\}$ — безусловный базис в F. Тогда по Теореме 0 существует автоморфизм $T\colon F \to F$, такой, что $Tf'_\nu = r_\nu f_{\sigma(\nu)}$, где $r_\nu \neq 0$, а $\sigma\colon \mathfrak{N} \to \mathfrak{M}$ — взаимнооднозначное соответствие множеств индексов. Тогда $S = TU\colon E \to F$ — тоже изоморфизм, и S базис переводит в базис: $Se_\nu = r_\nu f_{\sigma(\nu)}$. Выберем последовательность $\{\nu_k\} \subset \mathfrak{N}$ так, что λ_{ν_k} очень быстро стремится к бесконечности, например, $\lambda_{\nu_k} \geqslant 2^k$. Рассмотрим подпространства $\tilde{E}$ (и $\tilde{H}$) и $\tilde{F}$ (и $\tilde{G}$), натянутые соответственно на системы $\{e_{\nu_k}\}$ и $\{f_{\sigma(\nu_k)}\}$. По построению S даёт изоморфизм $\tilde{E}$ и $\tilde{F}$, но $\tilde{E}$ — центр конечной ядерной гильбертовой шкалы, а $\tilde{F}$ — центр бесконечной ядерной гильбертовой шкалы, и они не могут быть изоморфны, так имеют

непременно разные аппроксимативные размерности $\Gamma(\tilde{E})$ и $\Gamma(\tilde{F})$ (см. [12], Теорема 5). Предложение 16 доказано.

Если выбрать A и B так, что A^{-1} и B^{-1} не вполне непрерывны, то получаются примеры неизоморфных несовершенных пространств; при этом пространства H_0 и G_0 и соответсвующие центры можно сделать имеющими любую размерность. Но неравенство (21) Предложения 9 позволяет дать примеры одноимённых неизоморфных центров.

Пример 17. Пусть $H_0 = G_0 = l^2(\mathfrak{N})$, где $\mathfrak{N} = \bigcup_0^\infty \mathfrak{N}_k$, множества $\mathfrak{N}_k$ все бесконечны и друг с другом не пересекаются. Пусть $A = (a_\nu)$ — оператор-мультипликатор, то есть $Ae_\nu = a_\nu e_\nu$, $\nu \in \mathfrak{N}$. Положим также $B \simeq (b_\nu)$, и $a_\nu = 2^{2^{k^2}}$, $\nu \in \mathfrak{N}_k$ и $b_\nu = 2^{2^{(2k)^2}}$, $\nu \in \mathfrak{N}_k$. Тогда пространства

$$E = \bigcap_{\alpha<0} H_\alpha,\ F = \bigcap_{\beta<0} G_\beta \quad \text{и} \quad E^\infty = \bigcap_{\alpha<\infty} H_\alpha,\ F^\infty = \bigcap_{\beta<\infty} G_\beta$$

попарно не изоморфны.

Действительно, $E \not\simeq E^\infty$ или F^∞ и $F \not\simeq E^\infty$ или F^∞ в силу Предложения 16. Если же $E \simeq F$ или $E^\infty \simeq F^\infty$, то по Теореме 0 и в силу Предложения 9, неравенство (21), для операторов A и B должна найтись такая постоянная $R > 1$, что

$$\dim E^A_{cr} \leqslant \dim E^B_{g^{-1}(c),g(r)},\quad g(u) = Ru^R \tag{32}$$

для любых $c, r > 1$.

Положим $c_k = 2^{2^{(2k+1)^2}} - 1$ и $r_k = c_k + 2$; тогда $\dim E^A_{c_k r_k} = |\mathfrak{N}_{2k+1}|$. Но при любом $R > 1$ и $k > 1 + \log R$

$$g^{-1}(c_k) > R^{-1/R} 2^{R^{-1}\cdot 2^{(2k+1)^2}} > 2^{2^{(2k)^2}} \quad \text{и} \quad g(r_k) = R\cdot 2^{R\cdot 2^{(2k+1)^2}+1} < 2^{2^{(2(k+1))^2}},$$

т. е. отрезок $[g^{-1}(c_k), g(r_k)]$ точек спектра оператора B не содержит, и

$$\dim E^B_{g^{-1}(c_k),g(r_k)} = 0.$$

Это противоречит неравенству (32), и неизоморфизм E и F и E^∞ и F^∞ доказан.

По тем же причинам попарно неизоморфны пространства

$$E' = \bigcup_{\alpha>0} H_\alpha,\ F' = \bigcup_{\beta>0} G_\beta,\ E_\infty = \bigcup_{\alpha>-\infty} H_\alpha \text{ и } F_\infty = \bigcup_{\beta>-\infty} G_\beta.$$

Примеры этого пункта основаны на синтезе тех соображений, какие в заметке [12] давали примеры 2 и 3.

Примечания при корректуре:

1. Теорема, названная во Введении теоремой Лорча-Гельфанда, была доказана ещё в 1934 г. Кёте и Теплицем, [27] см. Теорему 8 (Satz 8) на стр. 217.

2. Частичный ответ на Вопрос 15 даёт

Предложение 15а. *Пусть* $E = \bigcap_{a<\infty} H_a$ — *бесконечный центр гильбертовой шкалы, и* X — *дополняемое в* E *подпространство с безусловным Базисом* $(x_\mu,\ \mu \in \mathfrak{M})$. *Тогда* X *изоморфно бесконечному центру некоторой гильбертовой шкалы.*

Если E ядерно, то это — частный случай Теоремы 2.2 из [1] (срав. также утверждения 3.1-3.4 в § 3, [1]). В общем случае для доказательства надо рассмотреть группу

$$G = \left\{\overline{\varepsilon_0(1-P)+\sum_{\mu\in\mathfrak{M}}\varepsilon_\mu x'_\mu(P\cdot)x_\mu}:\ \varepsilon_0,\varepsilon_\mu = \pm 1,\ \mu\in\mathfrak{M}\right\}$$

и по существу повторить рассуждения § 2.2б, относя их лишь к шкале гильбертовых пространств, в которых X плотно.

Цитированная литература

[1] C. Bessaga, *Some remarks on Dragilev theorem*, Studia Math. 31 (1968), стр. 307-318.

[2] W. Wojtyński, *On bases in certain countable-Hilbert spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. math., 14 : 12 (1966), стр. 681-684.

[3] И. М. Гельфанд, *Замечание к работе Н. К. Бари...*, Учён. Записки МГУ, 4, вып. 148 (1951), стр. 224-225.

[4] И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве*, Москва 1965.

[5] W. F. Donoghue, *The interpolation of quadratic forms*, Acta Math. 118 (1967), стр. 251-270.

[6] М. М. Драгилев, *О регулярной сходимости базисных разложений аналитических функций*, Научн. Докл. Высш. Шк, сер. физ. мат. наук, 4 (1958), стр. 27-32.

[7] — *Каноническая форма базиса пространства аналитических функций*, Успехи Матем. Наук 15: 2 (92), (1960), стр. 181-188.

[8] — *О правильных базисах в ядерных пространствах*, Матем. Сборн. 68 (110): 2 (1965), стр. 153-173.

[9] В. П. Захарюта, *О квазиэквивалентности базисов в конечных центрах гильбертовых шкал*, Докл. АН СССР, 180:4 (1968), стр. 786-788.

[10] С. Г. Крейн и Ю. И. Петунин, *Шкалы банаховых пространств*, Успехи Матем. Наук 21: 2 (1966), стр. 89-168.

[11] E. R. Lorch, *Bicotinuous linear transformation in certain vector spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 45 (1939), стр. 564-569.

[12] Б. С. Митягин, *Ядерные шкалы Рисса*, Докл. АН СССР, 137: 3 (1961), стр. 519-522.

[13] — *Аппроксимативная размерность и базисы в ядерных пространствах*, Успехи математ. наук 16: 4 (100) (1961), стр. 63-132.

[14] M. Hall, *A survey of combinatorial analysis*, 1958 (русский перевод: М. Холл, *Комбинаторный анализ*, 1963).

[15] Г. Е. Шилов, *Математический анализ*, Москва 1961.

[16] К. И. Бабенко, *О сопряжённых функциях*, Докл. АН СССР, 62: 2 (1948), стр. 157-160.

[17] A. Dynin and B. Mitiagin, *Criterion for nuclearity in terms of approximative dimension*, Bull. Acad. Polon. Sci., ser. math. 8: 8 (1960), стр. 535-540.

[18] W. Wojtyński, *On conditional bases in non-nuclear Fréchet spaces*, Studia Math. 35 (1970), стр. 77-96.

[19] J. Lindenstrauss and A. Pełczyński, *Absolutely summing operators in* $\mathcal{L}_p$*-spaces and their applications*, там же 29 (1968), стр. 275-326.

[20] J. Lindenstrauss and M. Zippin, *Banach spaces with a unique unconditional basis*, Journ. Funct. Anal. 3 (1969), стр. 115-125.

[21] A. Pełczyński, *Projections in certain Banach spaces*, Studia Math. 19 (1960), стр. 209-228.

[22] C. A. MacCarthy and L. Tzafriri, *Projections in* L_1 *and* L_∞*-spaces*, Pac. J. Math. 26 (1968), стр. 529-546.

[23] N. H. Kuiper, *The homotopy type of the unitary group of Hilbert space*, Topology 3 (1965), стр. 19-30. (русский перевод: Дополнение IV в переводе книги М. Атьи, *Лекции по К-теории*, 1967, стр. 241-260.

[24] G. Neubauer, *Der Homotopietyp der Automorphismengruppe in den Räumen* l_p *und* c_0, Math Ann. 174 (1968), стр. 33-40.

[25] B. Mitjagin, *Fréchet spaces with a unique unconditional basis*, Studia Math. 38 (1970), стр. 23-34.

[26] I. Edelstein, B. Mitjagin and E. Semenov, *The linear groups of* C *and* L^1 *are contractible*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. math. astr. et phys., 18 (1970), стр. 27-32.

[27] G. Köthe, O. Toeplitz, *Lineare Räume mit unendlich vielen Koordinaten und Ringe unendlicher Matrizen*, J. Reine Angew. Math. 171 (1934), стр. 251-270.

Reçu par la Rédaction le 10. 7. 1969