STUDIA MATHEMATICA, T. XXXVII. (1971)

Sur les opérateurs bornés dans les espaces localement convexes

par

P. USS (Warszawa)

Le but de cette note est l'examen des propriétés des opérateurs bornés définis dans un espace localement convexe; en particulier, nous y essayons de construire une théorie spectrale des opérateurs bornés.

Les résultats les plus importants sont les suivants:

Pour qu'un opérateur soit borné, il faut et il suffit qu'il admette une factorisation par un espace normé.

L'espace $B(E)$ des opérateurs bornés d'un espace E qui n'est pas normé forme un idéal bilatère propre de l'algèbre $L(E)$ de tous les opérateurs continus.

Le spectre de tout opérateur borné dans un espace complet est compact.

Si l'espace E est tonnelé, semi-complet, le spectre d'un opérateur borné appartenant à $L(E)$ est compact et sa résolvante est une fonction holomorphe. En outre, on obtient une formule pour norme spectrale d'un opérateur borné.

Les résultats concernant le spectre et la résolvante sont justes aussi pour des opérateurs quasi-bornés. Une fonction holomorphe d'un opérateur quasi-borné l'est également. L'application $f(\lambda)\to f(u)$ de l'algèbre des fonctions holomorphes sur le spectre d'un opérateur quasi-borné dans l'algèbre des opérateurs quasi-bornés est un homomorphisme fort continu.

Dans cette note il ne sera question que d'espaces localement convexes séparés sur le corps C des nombres complexes. Les espaces E' et $L(E,F)$ seront considérés dans la topologie forte, sauf mention expresse du contraire.

1. Opérateurs bornés. Soient E, F des espaces localement convexes et t un opérateur linéaire de E dans F. L'opérateur t est dit *borné* lorsqu'il existe un voisinage U dans E, dont l'image $t(U)$ est un ensemble borné dans F [1].

---

[1] Il existe d'autres définitions d'un opérateur borné. P. ex. d'après Robertson [9] un opérateur est borné lorsque l'image de tout ensemble borné est borné.

Il est évident que tout opérateur borné est continu.

On désigne par $|\cdot|_U$ la semi-norme définie par un voisinage U de 0 absolument convexe.

Une conséquence immédiate de la définition est le

1.1. LEMME. *Pour qu'un opérateur $t \in L(E, F)$ soit borné, il faut et il suffit qu'il existe dans E une semi-norme $|\cdot|_U$ telle qu'à chaque semi-norme $|\cdot|_V$ dans F corresponde un nombre $M_V > 0$ tel que $|t(x)|_V \leqslant M_V|x|_U$ pour tout $x \in E$.*

On dit alors que l'opérateur t est *borné avec la semi-norme* $|\cdot|_U$.

L'inégalité précédente peut être remplacée par

$$|t(x)|_V \leqslant |t|_{U,V}|x|_U, \tag{1.2}$$

où

$$|t|_{U,V} = \sup_{|x|_U \leqslant 1} |t(x)|_V.$$

Pour un opérateur borné $t \in L(E)$ nous employerons la notation

$$|t| = \inf |t|_{U,U}, \tag{1.3}$$

où U parcourt la famille de tous les voisinages dont l'image par t est bornée.

Il est facile de voir que si un opérateur $t \in L(E)$ est borné, l'opérateur t^n l'est également quel que soit n naturel.

1.4. LEMME. *Si un opérateur $t \in L(E)$ est borné, $|t^n| \leqslant |t|^n$ pour tout n naturel.*

Démonstration. Soient n un nombre naturel, a un nombre arbitraire tel que $a > |t|^n$. Alors $|t| < \sqrt[n]{a}$. Compte tenu de (1.3) et (1.2) il existe un voisinage U tel que $|t|_{U,U} < \sqrt[n]{a}$ et $|t(x)|_U \leqslant |t|_{U,U}|x|_U$ pour tout $x \in E$. Il en résulte que $|t(x)|_U \leqslant \sqrt[n]{a}|x|_U$, donc $|t^n(x)|_U \leqslant a|x|_U$ quel que soit $x \in E$. On en conclut que $|t^n| \leqslant a$, d'où $|t^n| \leqslant |t|^n$.

Exemples. 1. Soit $E = C(R)$ muni de la topologie définie par la suite des semi-normes:

$$|x|_k = \sup_{s \in [-k,k]} |x(s)|, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Soit $y(s)$ une fonction appartenant à $C(R)$ à support compact. Il est facile de voir que l'opérateur $t(x) = xy$ est borné.

2. Soit encore $E = C(R)$ muni de la même topologie. Soit

$$t(x)(s) = \begin{cases} x(s) & \text{pour } s \in [-a, a], \\ x(a) & \text{pour } s > a, \\ x(-a) & \text{pour } s < -a, \end{cases}$$

où a est un nombre réel fixé. L'opérateur t est évidemment borné.

3. Soit

$$E = L^\omega(R) = \{x(s): \int_{-\infty}^{+\infty} |x(s)|^p ds < \infty, \text{ pour chaque } p \geqslant 1\}$$

muni de la topologie définie par la suite des normes:

$$|x|_k = (\int_{-\infty}^{+\infty} |x(s)|^k ds)^{1/k}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Soit y un élément fixé de $L^\omega(R)$ et

$$t(x)(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau - s)x(s)ds \qquad \text{pour } \tau \in R.$$

On sait [3] que les conditions $x \in L^1(R)$, $y \in L^p(R)$ entraînent $t(x) \in L^p(R)$ et $|t(x)|_p \leqslant |y|_p|x|_1$. Comme $y \in L^\omega(R)$, on a $|t(x)|_k \leqslant |y|_k|x|_1$ pour tout k. Cela signifie que l'opérateur t est borné.

On peut démontrer que les opérateurs dans tous les trois exemples ne sont pas en général compacts.

1.5. THÉORÈME. *Si un opérateur $t \in L(E, F)$ est borné, son transposé t' l'est aussi* (²).

Démonstration. Soit U un voisinage dans E, dont l'image $t(U) = B$ est bornée dans F. Les polaires U^0 et B^0 forment un ensemble borné dans E' et un voisinage dans F' respectivement. On sait que $B^0 = (t')^{-1}(U^0)$, ce qui entraîne $t'(B^0) \subset U^0$. Cela signifie que l'opérateur t' est borné.

1.6. THÉORÈME. *Si un espace E est tel que l'application canonique $E \to E''$ est un isomorphisme, pour qu'un opérateur $t \in L(E, F)$ soit borné, il faut et il suffit que son transposé soit borné.*

Démonstration. En tenant compte de 1.5, il ne reste à prouver que la suffisance de cette condition. Si $t \in L(E, F)$ et si t' est borné, l'opérateur $t'' \in L(E'', F'')$ est borné en vertu de 1.5. La restriction de t'' à l'espace E est l'opérateur t. On sait que la topologie initiale d'un espace est moins fine que la topologie induite de son bidual [9]. Il en résult que l'intersection d'un ensemble borné dans F'' avec F est un ensemble borné dans F. Comme l'application canonique $E \to E''$ est un isomorphisme, l'intersection d'un voisinage dans E'' avec E est un voisinage dans E. Donc l'opérateur t est borné.

La conclusion du théorème 1.6 est juste si l'on prend pour E un espace p. ex. tonnelé ou bornologique quelconque [9].

(²) Raikoff a prouvé [8] que si un espace E est tel que tout ensemble borné dans E est précompact et si l'opérateur $t \in L(E, F)$ est borné, son transposé t' est compact.

On désigne par E'_U le sous-espace dans E' de toutes les fonctionnelles continues avec la semi-norme $|\cdot|_U$. Donc, pour que $x'\in E'_U$, il faut et il suffit que

$$|x'|_U = \sup_{|x|_U\leqslant 1} |\langle x, x'\rangle| < \infty.$$

1.7. Théorème. *Pour qu'un opérateur $t\in L(E, F)$ soit borné avec la semi-norme $|\cdot|_U$, il faut et il suffit que $t'(F')\subset E'_U$.*

Démonstration. Soit U un voisinage dans E, dont l'image B par t est bornée. Alors $t'(B^0)\subset U^0$. B^0 étant un voisinage absorbe F', tandis que E'_U est un sous-espace de E' engendré par U^0. Donc $t'(F')\subset E'_U$. Inversement; si $t'(F')\subset E'_U$, $|t'(x')|_U < \infty$ pour tout $x'\in E'$. Il en résulte que

$$\sup_{|x|_U\leqslant 1} |\langle t(x), x'\rangle| = \sup_{|x|_U\leqslant 1} |\langle x, t'(x')\rangle| = |t'(x')|_U < \infty.$$

Par conséquent, l'ensemble $t(U)$ est faiblement borné, c.-à-d. borné [1]. Donc l'opérateur t est borné avec la semi-norme $|\cdot|_U$.

1.8. Corollaire. *Soit E un espace satisfaisant à la condition du théorème 1.6 et $t\in L(E, F)$. Pour que l'opérateur t' soit borné il faut et il suffit qu'il existe dans E une semi-norme $|\cdot|_U$ telle que $t'(F')\subset E'_U$.*

2. Espace des opérateurs bornés. Nous désignons par $B(E, F)$ ($B(E)$) l'ensemble de tous les opérateurs bornés qui appartiennent à $L(E, F)$ (resp. $L(E)$). On peut facilement démontrer les propriétés suivantes de $B(E, F)$:

2.1. Lemme. (a) *$B(E, F)$ est un sous-espace linéaire de $L(E, F)$.*

(b) *Si l'un des espaces E, F est normé, $B(E, F) = L(E, F)$.*

(c) *Pour que $B(E) = L(E)$, il faut et il suffit que l'espace E soit normé.*

(d) *Si $t\in L(E, F)$, $u\in L(F, G)$ et si l'un de ces opérateurs est borné, $ut\in B(E, G)$.*

On sait [1] que l'application $(t, u)\to ut$ du produit $L(E, F)\times L(F, G)$ dans $L(E, G)$ est séparément continue, ce qui montre que l'espace $L(E)$ est une algèbre topologique.

De 2.1(c) et (d) on obtient:

2.2. Corollaire. *Si un espace E n'est pas normé, l'espace $B(E)$ est un idéal bilatère propre de l'algèbre $L(E)$.*

2.3. Corollaire. *Si un espace E n'est pas normé, aucun opérateur de $B(E)$ n'admet dans $L(E)$ un opérateur inverse.*

En général, l'idéal $B(E)$ n'est pas fermé, ce que montre l'exemple suivant.

Soit

$$t_n(x)(s) = \begin{cases} x(s) & \text{pour } s\in[-n, n],\\ x(n) & \text{pour } s > n,\\ x(-n) & \text{pour } s < -n\end{cases} \qquad (n = 1,2,\ldots).$$

C'est une suite d'opérateurs bornés de l'exemple 2, définis dans l'espace $C(R)$. Quels que soient la semi-norme $|\cdot|_k$ et l'ensemble borné $B\subset C(R)$ on a

$$|t_n - I|_{B,k} = \sup_{x\in B} |t_n(x) - x|_k = \sup_{x\in B}\sup_{s\in[-k,k]} |t_n(x)(s) - x(s)| = 0$$

pour $n\geqslant k$. Donc la suite t_n des opérateurs bornés converge vers l'opérateur I, qui évidemment n'est pas borné. Par conséquent, l'espace $B(C(R))$ n'est pas fermé dans $L(C(R))$. De plus $B(C(R))$ est dense dans $L(C(R))$. En effet, la condition $t_n\to I$ entraîne $ut_n\to u$ pour tout $u\in L(C(R))$, car $L(C(R))$ est une algèbre topologique. Chacun des opérateurs ut_n est borné d'après 2.2, d'où on conclut que l'espace $B(C(R))$ est dense dans $L(C(R))$.

2.4. Théorème. *Pour qu'un opérateur soit borné, il faut et il suffit qu'il admette une factorisation par un espace normé.*

Démonstration. La suffisance de cette condition résulte de 2.1, (b) et (d). Soient $t\in B(E, F)$ et $|\cdot|_U$ la semi-norme avec laquelle l'opérateur t est borné. Soit $N_U = \{x\in E\colon |x|_U = 0\}$, $E_U = E/N_U$.

L'espace quotient E_U a pour éléments les ensembles $X = x + N_U$ pour tout $x\in E$. Donc E_U est normé avec la norme $|X| = |x|_U$ pour $x\in X$. La condition $|x|_U = 0$ entraîne $t(x) = 0$ d'après 1.1, car E est séparé. Donc il existe un opérateur v défini dans E_U tel que $v(X) = t(x)$ pour $x\in X$. D'après 1.1, $v\in L(E_U, F)$. Soit u l'application canonique de E dans E_U. Alors $t = vu$, c.-à-d. l'opérateur t est factorisé par l'espace normé E_U.

Nous employerons les notations suivantes: $\hat{E}$ — le complété de l'espace E; $\hat{t}$ — le prolongement de l'opérateur $t\in L(E, F)$ sur $\hat{E}$.

2.5. Corollaire. *Un espace F étant complet, pour qu'un opérateur $t\in B(E, F)$, il faut et il suffit qu'il admette une factorisation par un espace de Banach.*

Démonstration. En effet, l'opérateur $v\in L(E_U, F)$ peut alors être prolongé à l'opérateur $\hat{v}\in L(\hat{E}_U, F)$.

Jusqu'ici nous avons considéré l'espace $B(E, F)$ muni de la topologie forte induite de $L(E, F)$. Maintenant nous allons construire une autre topologie de cet espace. Soit U un voisinage arbitraire fixé dans E. Nous désignons par $B(E, F)_U$ ($B(E)_U$) le sous-espace de $B(E, F)$ ($B(E)$) composé de tous les opérateurs bornés avec la semi-norme $|\cdot|_U$. Il résulte de 2.4 que tout opérateur $t\in B(E, F)_U$ est factorisé par l'espace E_U. L'égalité $t = vu$ constitue un isomorphisme des espaces $B(E, F)_U$ et $L(E_U, F)$.

Nous allons identifier les opérateurs t et v, qui se correspondent, donc $B(E,F)_U = L(E_U, F)$. On munit $B(E,F)_U$ de la topologie forte de $L(E_U, F)$. Cette topologie est définie par les semi-normes

$$|t|_{U,V} = \sup_{x\in U} |t(x)|_V,$$

où V est un voisinage arbitraire dans F. Il est évident que $B(E,F)$ est la réunion de tous ses sous-espaces $B(E,F)_U$, lorsque U parcourt un système fondamental de voisinages dans E. Donc l'espace $B(E,F)$ peut être considéré comme la limite inductive des espaces $B(E,F)_U$. On désigne cette topologie par $\mathcal{T}$.

2.6. Théorème. *La topologie $\mathcal{T}$ de $B(E,F)$ est plus fine que la topologie forte induite de $L(E,F)$.*

Démonstration. Soit $t\in B(E,F)_U$. Pour toute semi-norme $|\cdot|_{A,V}$ de la topologie forte et pour tout voisinage U dans E on a

$$|t|_{A,V} = \sup_{x\in A} |t(x)|_V \leqslant \varrho \sup_{x\in U} |t(x)|_V = \varrho |t|_{U,V},$$

où

$$\varrho = \sup_{x\in A} |x|_U.$$

Il en résulte que dans chaque espace $B(E,F)_U$ toute seminorme de la topologie forte est $\mathcal{T}$-continue. Donc la topologie forte induit dans chaque espace $B(E,F)_U$ une topologie moins fine que la topologie initiale. Il en résulte [1] que $\mathcal{T}$ est plus fine que la topologie forte induite de $L(E,F)$.

3. Spectre d'un opérateur borné. Pour un opérateur $t\in L(E)$ on admet la notation

$$\varrho(t) = \{\lambda\in C\colon\ (\lambda I - t)^{-1}\in L(E)\},$$

où C désigne l'espace des nombres complexes. Le spectre de l'opérateur t est l'ensemble $\sigma(t) = C\setminus\varrho(t)$.

On admet la classification suivante des points du spectre:

Spectre discret: $\sigma_p(t) = \{\lambda\in C\colon\ (\lambda I - t)$ n'est pas bijectif$\}$.

Spectre résiduel: $\sigma_r(t) = \{\lambda\in C\colon\ \lambda\notin\sigma_p(t),\ \overline{(\lambda I - t)(E)} \neq E\}$.

Spectre continu: $\sigma_c(t) = \{\lambda\in C\colon\ \lambda\notin\sigma_p(t)\cup\sigma_r(t),\ (\lambda I - t)^{-1}$ n'est pas continu$\}$ [3].

Nous noterons: $\hat\sigma(t) = \sigma_p(t)\cup\sigma_r(t)\cup\sigma_c(t)$.

Il résulte de la définition que la condition nécessaire et suffisante

[3] On admet habituellement cette classification lorsque E est un espace de Banach; p. ex. [5]. D'après Dunford et Schwartz [3], $\sigma_c(t) = \{\lambda\in C\colon\ \lambda\notin\sigma_p(t)\cup\sigma_r(t),\ \overline{(\lambda I - t)(E)} \neq E\}$. Si E est un espace de Banach ces définitions sont équivalentes.

pour que $\lambda\in\sigma(t)\setminus\hat\sigma(t)$ est que l'opérateur $(\lambda I - t)$ soit un isomorphisme de E dans un sous-espace propre dense dans E.

L'exemple suivant montre que la classification précédente n'est pas en général complète, c.-à-d. que l'ensemble $\sigma(t)\setminus\hat\sigma(t)$ peut être non-vide, même dans le cas d'un espace normé.

Soit E l'espace de tous les polynômes définis dans l'intervalle $[0,1]$ muni de la topologie induite de $C(0,1)$. Soient $t(x)(s) = sx(s)$ et $\lambda > 1$. Alors l'opérateur $(\lambda I - t)$ est un isomorphisme. Ses valeurs forment l'ensemble de tous les polynômes divisibles par $(\lambda - s)$, qui est dense dans E. Donc $\lambda\notin\hat\sigma(t)$ et en même temps $\lambda\in\sigma(t)$, parce que l'opérateur $(\lambda I - t)^{-1}$ n'est pas défini dans l'espace E tout entier.

Mais une telle situation n'est possible que dans le cas d'un espace qui n'est pas complet.

3.1. Théorème. *Si un espace E est complet et si $t\in L(E)$, $\hat\sigma(t) = \sigma(t)$.*

Démonstration. L'inclusion $\hat\sigma(t)\subset\sigma(t)$ est évidente. Si $\lambda\notin\hat\sigma(t)$, l'opérateur $(\lambda I - t)$ est un isomorphisme. Comme E est complet, $(\lambda I - t)(E)$ l'est également. Par conséquent, l'espace $(\lambda I - t)(E)$ est fermé dans E. D'autre part, cet espace est dense dans E, d'où on conclut que $(\lambda I - t)(E) = E$, c.-à-d. $\lambda\notin\sigma(t)$. Donc $\sigma(t)\subset\hat\sigma(t)$.

3.2. Lemme. *Si $t\in L(E)$, $\hat\sigma(t) = \sigma(\hat t)$.*

Démonstration. Pour que $\lambda\notin\hat\sigma(t)$, il faut et il suffit que $(\lambda I - t)$ soit un isomorphisme de E sur un sous-espace dense dans E. Il est facile de voir que cette condition équivaut à ce que l'opérateur $\widehat{(\lambda I - t)} = \lambda I - \hat t$ soit un isomorphisme de $\hat E$ sur $\hat E$, c.-à-d. que $\lambda\notin\sigma(\hat t)$.

3.3. Lemme. *Si un espace E n'est pas normé et si $t\in B(E)$, $0\in\sigma(t)$.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de 2.3.

3.4. Théorème. *Si $t\in B(E)$, l'ensemble $\hat\sigma(t)$ est borné:*

$$\sup_{\lambda\in\hat\sigma(t)} |\lambda| \leqslant \varliminf \sqrt[n]{|t^n|}.$$

Démonstration. Soit $|\cdot|_U$ la semi-norme avec laquelle l'opérateur t est borné. Soit $\lambda\neq 0$, $\lambda\in\sigma_p(t)\cup\sigma_c(t)$. Il existe alors une suite généralisée x_α dans E telle que

$$(\lambda I - t)(x_\alpha)\to 0, \tag{3.5}$$

$$x_\alpha \nrightarrow 0. \tag{3.6}$$

Nous allons démontrer que $|x_\alpha|_U\nrightarrow 0$. En effet, l'inégalité

$$|\lambda x_\alpha|_V \leqslant |(\lambda I - t)(x_\alpha)|_V + |t(x_\alpha)|_V \tag{3.7}$$

est légitime pour toute semi-norme $|\cdot|_V$.

La condition $|x_a|_U \to 0$ entraîne $t(x_a) \to 0$ en vertu de 1.1. Comme $\lambda \neq 0$, il résulte de (3.5) et (3.7) que $x_a \to 0$, contrairement à (3.6). Donc $|x_a|_U \nrightarrow 0$.

En prenant au besoin une sous-suite de x_a et en la multipliant par une constante, on peut admettre que

$$|x_a|_U \geqslant 1. \tag{3.8}$$

En posant, dans (3.7), $V = U$ on obtient d'après (1.2)

$$|\lambda|\,|x_a|_U \leqslant |(\lambda I-t)(x_a)|_U + |t(x_a)|_U \leqslant |(\lambda I-t)(x_a)|_U + |t|_{U,U}|x_a|_U.$$

Il en résulte en vertu de (3.5) et (3.8) que $|\lambda| \leqslant |t|_{U,U}$. La dernière inégalité est juste pour tout voisinage dont l'image est bornée. Donc, en tenant compte de (1.3), on a $|\lambda| \leqslant |t|$.

Soit $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \sigma_r(t)$. Alors l'espace $(\lambda I-t)(E)$ n'est pas dense dans E, d'où on conclut, en vertu du théorème de Hahn-Banach, qu'il existe une fonctionnelle $x' \neq 0$ telle que, pour tout $x \in E$, $\langle(\lambda I-t)(x), x'\rangle = 0$. Donc

$$\langle\lambda x, x'\rangle = \langle t(x), x'\rangle. \tag{3.9}$$

Par conséquent, $t'(x') = \lambda x'$. Compte tenu de 1.7, cette condition entraîne $x' \in E'_U$, car $\lambda \neq 0$. Il en résulte en vertu de (3.9) que

$$|\lambda|\,|\langle x, x'\rangle| = |\langle t(x), x'\rangle| \leqslant |x'|_U|t(x)|_U \leqslant |x'|_U|t|_{U,U}|x|_U.$$

Donc

$$|\lambda| \sup_{|x|_U\leqslant 1} |\langle x, x'\rangle| \leqslant |x'|_U|t|_{U,U},$$

ce qui entraîne $|\lambda| \leqslant |t|_{U,U}$, d'où on déduit $|\lambda| \leqslant |t|$.

On vient d'établir que l'ensemble $\hat{\sigma}(t)$ est contenu dans le cercle

$$|\lambda| \leqslant |t|. \tag{3.10}$$

Nous allons démontrer que la condition $\lambda \in \hat{\sigma}(t)$ entraîne $\lambda^n \in \hat{\sigma}(t^n)$ quel que soit n naturel. Supposons, au contraire, que

$$\lambda^n \notin \hat{\sigma}(t^n). \tag{3.11}$$

De la décomposition

$$(\lambda^n I - t^n) = (\lambda I-t)P_n(t) = P_n(t)(\lambda I-t), \tag{3.12}$$

où P_n est un polynôme, il résulte que l'opérateur $(\lambda I-t)$ est bijectif, donc $\lambda \notin \sigma_p(t)$. Si $\lambda \in \sigma_r(t)$, de (3.12) on obtient

$$\overline{(\lambda^n I-t^n)(E)} = \overline{(\lambda I-t)P_n(t)(E)} \subset (\lambda I-t)(E).$$

Donc $\overline{(\lambda^n I-t^n)(E)} \subset \overline{(\lambda I-t)(E)} \neq E$, ce qui entraîne $\lambda^n \in \hat{\sigma}(t^n)$ contrairement à (3.11). Si $\lambda \in \sigma_c(t)$, l'opérateur $(\lambda I-t)^{-1}$ n'est pas continu, tandis que $(\lambda^n I-t^n)$ est un isomorphisme d'après (3.11). Donc en vertu de (3.12) l'opérateur

$$P_n(t) = (\lambda^n I-t^n)(\lambda I-t)^{-1}$$

n'est pas continu, ce qui est impossible.

Si donc $\lambda \in \hat{\sigma}(t)$, $\lambda^n \in \hat{\sigma}(t^n)$, d'où, en tenant compte de (3.10) on conclut que $|\lambda|^n \leqslant |t^n|$ quels que soient n et $\lambda \in \hat{\sigma}(t)$. Donc

$$\sup_{\lambda \in \hat{\sigma}(t)}|\lambda| \leqslant \underline{\lim}\sqrt[n]{|t^n|} \; (^4).$$

3.13. Corollaire. *Le spectre d'un opérateur borné t dans un espace complet est borné:*

$$\sup_{\lambda \in \sigma(t)}|\lambda| \leqslant \underline{\lim}\sqrt[n]{|t^n|}.$$

Au chapitre 4 nous verrons, moyennant d'autres hypothèses sur l'espace E, que la suite $\sqrt[n]{|t^n|}$ converge vers $\sup\limits_{\lambda \in \sigma(t)}|\lambda|$.

Le corollaire 3.13 peut être généralisé à une classe d'opérateurs un peu plus large que $B(E)$. Dans la suite de ce chapitre on admet que l'espace E n'est pas normé.

Un opérateur $u \in L(E)$ s'appelle *quasi-borné*, s'il est de la forme $u = aI+t$, où a est un nombre complexe et t un opérateur borné. L'ensemble de tous les opérateurs quasi-bornés, qui appartiennent à $L(E)$ sera désigné par $I(E)$. Il est facile de prouver que $I(E)$ et $B(E)$ sont des sous-espaces linéaires respectivement de $L(E)$ et $I(E)$.

3.14. Lemme. *L'espace $I(E)$ est une sous-algèbre unifère de l'algèbre $L(E)$ contenant avec tout élément régulier (dans $L(E)$) u son élément inverse u^{-1}.*

Démonstration. Il est facile de démontrer que l'élément unité de $I(E)$ est l'identité I et que les conditions $u_1 \in I(E)$, $u_2 \in I(E)$ entraînent $u_1u_2 \in I(E)$. Donc $I(E)$ est une algèbre unifère. Supposons que $u = aI+$ $+t \in I(E)$, $u^{-1} \in L(E)$. Donc $a \neq 0$ en vertu de 3.3. Alors

$$u^{-1} = \frac{I}{a} - \frac{tu^{-1}}{a}. \tag{3.15}$$

En effet, l'égalité $ut = tu$ entraîne $u^{-1}t = tu^{-1}$.

Il en résulte que

$$u\left(\frac{I}{a} - \frac{tu^{-1}}{a}\right) = \frac{u}{a} - \frac{utu^{-1}}{a} = \frac{u-t}{a} = I,$$

$$\left(\frac{I}{a} - \frac{tu^{-1}}{a}\right)u = \frac{u}{a} - \frac{tu^{-1}u}{a} = \frac{u-t}{a} = I.$$

(4) D'après 1.4 ce résultat est meilleur que (3.10).

Compte tenu de 2.2, on a $tu^{-1}/a \in B(E)$, donc, en vertu de (3.15), $u^{-1} \in I(E)$.

3.16. THÉORÈME. (a) *Si* $u = aI + t \in I(E)$, $\sigma(u) = a + \sigma(t)$.

(b) *Le spectre d'un opérateur quasi-borné dans un espace complet est borné.*

Démonstration. Ce sont des conséquences immédiates de (3.13) et de l'égalité $\lambda I - u = (\lambda - a)I - t$.

3.17. THÉORÈME. *Le spectre d'un opérateur borné dans un espace complet est fermé* ([5]).

Démonstration. Supposons, au contraire, que l'ensemble $\sigma(t)$ ne soit pas fermé. Il existe alors une suite de nombres complexes λ_n telle que $\lambda_n \in \sigma(t)$ pour tout n, $\lambda_n \to \lambda$, $\lambda \in \varrho(t)$. D'après 3.14 l'opérateur $(\lambda I - t)^{-1}$ est quasi-borné, donc en vertu de 3.16(b) son spectre est borné. D'autre part $\lambda_n \neq \lambda$ et les opératerus $(\lambda I - t)^{-1}$ et $(\lambda_n I - t)$ sont permutables. Donc de l'égalité

$$\left(\frac{I}{\lambda - \lambda_n} - (\lambda I - t)^{-1}\right) = \frac{(\lambda I - t)^{-1}(\lambda_n I - t)}{\lambda - \lambda_n}$$

on déduit que l'existence de l'opérateur inverse de

$$\left(\frac{I}{\lambda - \lambda_n} - (\lambda I - t)^{-1}\right)$$

entraîne l'existence de $(\lambda_n I - t)^{-1}$. Par conséquent,

$$\frac{1}{\lambda - \lambda_n} \in \sigma\big((\lambda I - t)^{-1}\big)$$

pour tout n, puisque $\lambda_n \in \sigma(t)$. Cela signifie que le spectre de l'opérateur $(\lambda I - t)^{-1}$ n'est pas borné. La contradiction ainsi obtenue prouve que l'ensemble $\sigma(t)$ est fermé.

3.18. COROLLAIRE. *Le spectre d'un opérateur quasi-borné dans un espace complet est fermé.*

Démonstration. C'est une conséquence de 3.16(a) et 3.17.

3.19. THÉORÈME. *Si* $t \in B(E)$, *l'ensemble* $\hat{\sigma}(t)$ *est fermé.*

Démonstration. On sait que $E' = \hat{E}'$ [9]. On peut démontrer que $t' = \hat{t}'$ pour $t \in L(E)$. Si l'opérateur t est borné, en vertu de 1.7 $\hat{t}$ est borné avec la même semi-norme. Il en résulte, en tenant compte de 3.2 et 3.17, que l'ensemble $\hat{\sigma}(t)$ est fermé.

Nous venons de prouver la compacité du spectre d'un opérateur borné et quasi-borné dans un espace complet. Au chapitre suivant nous obtiendrons le même résultat en admettant d'autres hypothèses sur E.

([5]) Leray a prouvé [7] que le spectre d'un opérateur compact dans un espace localement convexe arbitraire est un ensemble fini ou une suite convergente vers 0.

4. Fonction holomorphe d'un opérateur. Dans ce chapitre nous admettons que l'espace E est tonnelé semi-complet. On peut prouver que dans ce cas l'espace $L(E)$ est semi-complet. Nous allons considérer une fonction $f(\lambda)$ de l'argument complexe λ à valeurs dans $L(E)$. Il est évident que $f(\lambda)$ étant une fonction opératorielle, $f(\lambda)(x)$ et $\langle f(\lambda)(x), x'\rangle$ sont respectivement des fonctions vectorielle et scalaire de λ quels que soient $x \in E$, $x' \in E'$.

Dans la suite nous entendrons par $f(\lambda)$ une fonction opératorielle sauf mention expresse du contraire. On définit la limite, la continuité, l'intégrale de Riemann-Stieltjes et la dérivée d'une fonction opératorielle de même que pour une fonction scalaire.

Nous énonçons sans démonstration les propriétés de l'intégrale dont nous aurons besoin dans la suite.

4.1. LEMME. *Si une fonction $f(\lambda)$ est continue sur une courbe de Jordan C:*

(a) *$f(\lambda)$ est intégrable sur C.*

(b) *Pour toute semi-norme $|\cdot|_{B,V}$ dans $L(E)$ la fonction réelle $|f(\lambda)|_{B,V}$ est intégrable sur C et*

$$\Big|\int_C f(\lambda)\,d\lambda\Big|_{B,V} \leqslant \int_C |f(\lambda)|_{B,V}|d\lambda|.$$

4.2. LEMME. *Si une fonction $f(\lambda)$ est intégrable sur une courbe C:*

(a) *Quels que soient $x \in E$, $x' \in E'$ les fonctions $f(\lambda)(x)$ et $\langle f(\lambda)(x), x'\rangle$ sont intégrables sur C et*

$$\int_C f(\lambda)\,d\lambda(x) = \int_C f(\lambda)(x)\,d\lambda,$$

$$\Big\langle \int_C f(\lambda)\,d\lambda(x), x'\Big\rangle = \int_C \langle f(\lambda)(x), x'\rangle\,d\lambda.$$

(b) *Pour tout $t \in L(E)$*

$$t\int_C f(\lambda)\,d\lambda = \int_C tf(\lambda)\,d\lambda, \qquad \int_C f(\lambda)\,d\lambda t = \int_C f(\lambda)t\,d\lambda.$$

Une fonction $f(\lambda)$ s'appelle *holomorphe* sur un ensemble ouvert D si sa dérivée existe en tout point de D. Une fonction $f(\lambda)$ s'appelle *faiblement holomorphe* sur D si la fonction scalaire $\langle f(\lambda)(x), x'\rangle$ est holomorphe sur D quels que soient $x \in E$, $x' \in E'$.

4.3. THÉORÈME ([6]). *Pour qu'une fonction $f(\lambda)$ soit holomorphe sur un ensemble D, il faut et il suffit qu'elle soit faiblement holomorphe sur D.*

([6]) C'est une généralisation du théorème de Hille, qui l'a prouvé dans le cas où E est un espace de Banach [4].

Démonstration. Il suffit évidemment d'établir la suffisance.

Soit $g(\lambda)$ une fonction scalaire holomorphe sur D et λ_0 un point fixé de D. Il existe alors un nombre $r > 0$ tel que la fonction $g(\lambda)$ est holomorphe sur le cercle $|\lambda-\lambda_0| \leqslant r$. Soit

$$G(\zeta) = \frac{g(\lambda_0+\zeta)-g(\lambda_0)}{\zeta} - g'(\lambda_0). \tag{4.4}$$

La fonction $G(\zeta)$ est holomorphe sur l'ensemble $D-\lambda_0$, donc holomorphe et bornée sur le cercle $|\zeta| < r$. En outre, $G(0) = 0$. Il en résulte, en vertu du lemme de Schwartz, qu'il existe une constante M telle que $|\zeta| < r$ entraîne $|G(\zeta)| \leqslant M|\zeta|$. Donc si $|a| < r$, $|b| < r$, alors $|G(a)| \leqslant M|a|$, $|G(b)| \leqslant M|b|$ et par suite

$$|G(a)-G(b)| \leqslant M(|a|+|b|).$$

Par conséquent, d'après (4.4), les conditions $0 < |a| < r$, $0 < |b| < r$ entraînent l'inégalité

$$\frac{1}{|a|+|b|}\left|\frac{g(\lambda_0+a)-g(\lambda_0)}{a} - \frac{g(\lambda_0+b)-g(\lambda_0)}{b}\right| \leqslant M. \tag{4.5}$$

Supposons qu'une fonction (opératorielle) $f(\lambda)$ soit faiblement holomorphe sur D. Cela signifie que la fonction scalaire $\langle f(\lambda)(x), x'\rangle$ est holomorphe sur D quels que soient $x \in E$, $x' \in E'$. Posons, dans (4.5), $g(\lambda) = \langle f(\lambda)(x), x'\rangle$. Alors pour tout $x \in E$ et pour tout $x' \in E'$ il existe un $M > 0$ tel que les inégalités $0 < |a| < r$, $0 < |b| < r$ entraînent l'inégalité

$$\frac{1}{|a|+|b|}\left|\left\langle\left(\frac{f(\lambda_0+a)-f(\lambda_0)}{a} - \frac{f(\lambda_0+b)-f(\lambda_0)}{b}\right)(x), x'\right\rangle\right| \leqslant M.$$

Soit

$$T = \left\{t \in L(E)\colon t = \frac{1}{|a|+|b|}\left(\frac{f(\lambda_0+a)-f(\lambda_0)}{a} - \frac{f(\lambda_0+b)-f(\lambda_0)}{b}\right), 0 < |a| < r, 0 < |b| < r\right\}.$$

Il résulte de la dernière inégalité que pour chaque $x \in E$ l'ensemble $\bigcup_{t \in T} t(x)$ est faiblement borné, donc borné, d'où on déduit, en vertu du théorème de Banach-Steinhaus, que l'ensemble T est équicontinu. Posons

$$t(\zeta) = \frac{f(\lambda_0+\zeta)-f(\lambda_0)}{\zeta}$$

pour tout ζ tel que $0 < |\zeta| < r$. Soit $W_{A,V}$ un voisinage arbitraire dans $L(E)$. De l'équicontinuité de T il résulte l'existence d'un voisinage U dans E tel que $t(U) \subset V$ pour tout $t \in T$. Comme A est borné, il existe un nombre $\varrho > 0$ tel que $A \subset \varrho U$.

Il résulte de la définition de $t(\zeta)$ et de T que les conditions

$$0 < |a| < r, \quad 0 < |b| < r, \quad |a|+|b| < \frac{1}{\varrho} \tag{4.6}$$

entraînent

$$\frac{t(a)-t(b)}{|a|+|b|} \in T.$$

Alors

$$\big(t(a)-t(b)\big)(A) \subset \big(t(a)-t(b)\big)(\varrho U) \subset \frac{t(a)-t(b)}{|a|+|b|}(U) \subset V.$$

Cela signifie que, si les nombres a et b satisfont aux conditions (4.6),

$$t(a)-t(b) \in W_{A,V}. \tag{4.7}$$

Si $a_n \to 0$, $a_n \neq 0$ pour tout n, les nombres a_n et a_m satisfont aux conditions (4.6) pour n, m suffisamment grands. Il en résulte, d'après (4.7) que la suite

$$t(a_n) = \frac{f(\lambda_0+a_n)-f(\lambda_0)}{a_n}$$

satisfait à la condition de Cauchy. L'espace $L(E)$ est semi-complet, donc il existe un opérateur $f'(\lambda_0) \in L(E)$ tel que

$$f'(\lambda_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(\lambda_0+a_n)-f(\lambda_0)}{a_n}. \tag{4.8}$$

Soit b_n une autre suite telle que $b_n \to 0$, $b_n \neq 0$ pour tout n. Alors les nombres a_n et b_n satisfont aux conditions (4.6) pour n suffisamment grand. Donc de l'inégalité

$$|t(b_n)-f'(\lambda_0)|_{A,V} \leqslant |t(b_n)-t(a_n)|_{A,V}+|t(a_n)-f'(\lambda_0)|_{A,V}$$

il résulte, en vertu de (4.7) et (4.8), que la limite (4.8) ne dépend pas du choix de la suite a_n. Par conséquent, la dérivée de la fonction $f(\lambda)$ au point λ_0 existe. Cela signifie que cette fonction est holomorphe sur l'ensemble D, ce qui achève la démonstration.

4.9. COROLLAIRE. *Toute fonction faiblement holomorphe sur un ensemble y est continue.*

En vertu du théorème 4.3 nous identifierons les notions de fonction holomorphe et de fonction faiblement holomorphe.

4.10. LEMME. *Si $t \in B(E)_U$ et $\lambda \in \varrho(t)$, les semi-normes $|\cdot|_U$ et $|(\lambda I - t)(\cdot)|_U$ sont équivalentes.*

Démonstration. Il suffit de se restreindre au cas où l'espace E n'est pas normé. Supposons que $|x|_U \to 0$. Alors il résulte de l'inégalité

$$|(\lambda I - t)(x)|_U \leqslant |\lambda|\,|x|_U + |t(x)|_U \leqslant (|\lambda| + |t|_{U,U})\,|x|_U$$

que $|(\lambda I - t)(x)|_U \to 0$.

Réciproquement, si $|(\lambda I - t)(x)|_U \to 0$ en vertu de 1.1 on a $t(\lambda I - t)(x) \to 0$. Donc $(\lambda I - t)t(x) \to 0$, car les opérateurs t et $(\lambda I - t)$ sont permutables. On en conclut que $t(x) \to 0$, car $\lambda \in \varrho(t)$. Donc l'inégalité $|\lambda x|_U \leqslant |(\lambda I - t)(x)|_U + |t(x)|_U$ entraîne $|x|_U \to 0$, car $\lambda \neq 0$ en vertu de 3.3.

4.11. Corollaire. *Si $t \in B(E)_U$ et $\lambda \in \varrho(t)$,*

$$|R(\lambda, t)|_U = \sup_{|x|_U \leqslant 1} |R(\lambda, t)(x)|_U < \infty,$$

où $R(\lambda, t)$ désigne la résolvante $(\lambda I - t)^{-1}$ de l'opérateur t.

4.12. Théorème. *La résolvante $R(\lambda, t)$ d'un opérateur borné est une fonction holomorphe sur l'ensemble $\varrho(t)$.*

Démonstration. On peut évidemment admettre que E n'est pas un espace de Banach. Soient λ un point arbitraire fixé de $\varrho(t)$ et $|\cdot|_U$ la semi-norme avec laquelle l'opérateur t est borné. En vertu de (3.15) on a

$$R(\lambda, t) = \frac{I}{\lambda} + \frac{tR(\lambda, t)}{\lambda}. \tag{4.13}$$

Soit μ un nombre complexe arbitraire. Le développement formel de la fonction $R(\lambda + \mu, t)$ en série est de la forme

$$R(\lambda + \mu, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\mu)^n R(\lambda, t)^{n+1}.$$

Donc

$$tR(\lambda + \mu, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\mu)^n tR(\lambda, t)^{n+1}. \tag{4.14}$$

Quels que soient $x \in E$, $x' \in E'$ nous avons l'inégalité

$$\begin{aligned} |\langle tR(\lambda, t)^{n+1}(x), x'\rangle| &\leqslant |x'|_V |tR(\lambda, t)^{n+1}|(x)|_V \\ &\leqslant |x'|_V |t|_{U,V} |R(\lambda, t)^{n+1}(x)|_U \\ &\leqslant |x'|_V |t|_{U,V} |R(\lambda, t)|_U^{n+1} |x|_U, \end{aligned}$$

où $|\cdot|_V$ est la semi-norme avec laquelle la fonctionnelle x' est continue. Il en résulte en vertu de 4.3 et (4.14) que la fonction $tR(\lambda + \mu, t)$ est holomorphe sur le cercle $|\mu| < |R(\lambda, t)|_U^{-1}$. Par conséquent, $tR(\lambda, t)$ est holomorphe sur $\varrho(t)$, d'où on déduit d'après (4.13) que la fonction $R(\lambda, t)$ l'est également, car $\lambda \neq 0$.

4.15. Corollaire. *Le spectre d'un opérateur borné est fermé.*

4.16. Théorème. *Le spectre d'un opérateur borné t est borné:*

$$\sup_{\lambda \in \sigma(t)} |\lambda| = \lim \sqrt[n]{|t^n|}.$$

Démonstration. Le développement formel de la fonction $R(\lambda, t)$ en série de Laurent est de la forme

$$R(\lambda, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\lambda^{n+1}}. \tag{4.17}$$

Nous allons démontrer que si $|\lambda| > |t|$, cette série est convergente. Soit λ un nombre complexe tel que $|\lambda| > |t|$. Il existe alors un nombre r tel que $|\lambda| > r > |t|$. Donc en vertu de (1.3) il existe un voisinage U, dont l'image est bornée et tel que, pour tout $x \in E$, $|t(x)|_U \leqslant r|x|_U$. Par conséquent, pour chaque semi-norme $|\cdot|_{B,V}$ dans $L(E)$ nous avons l'inégalité:

$$\begin{aligned} \left|\frac{t^n}{\lambda^{n+1}}\right|_{B,V} &= \frac{1}{|\lambda|^{n+1}} \sup_{x \in B} |t^n(x)|_V \leqslant \frac{|t|_{U,V}}{|\lambda|^{n+1}} \sup_{x \in B} |t^{n-1}(x)|_U \\ &\leqslant \frac{|t|_{U,V} r^{n-1}}{|\lambda|^{n+1}} \sup_{x \in B} |x|_U. \end{aligned}$$

L'ensemble B est borné et $r < |\lambda|$, donc la série (4.17) est convergente et sa somme $R(\lambda, t)$ appartient à $L(E)$, car $L(E)$ est semi-complet.

Donc si $\lambda \in \sigma(t)$, on a

$$|\lambda| \leqslant |t|. \tag{4.18}$$

De la décomposition $(\lambda^n I - t^n) = (\lambda I - t)P_n(t) = P_n(t)(\lambda I - t)$ où P_n est un polynôme, on conclut que la condition $\lambda \in \sigma(t)$ entraîne $\lambda^n \in \sigma(t^n)$. En effet, si $(\lambda^n I - t^n)^{-1} \in L(E)$, $(\lambda I - t)^{-1} = P_n(t)(\lambda^n I - t^n)^{-1} \in L(E)$. L'opérateur t^n est évidemment borné, donc, d'après (4.18), $|\lambda|^n \leqslant |t^n|$ pour tout n et par conséquent

$$\sup_{\lambda \in \sigma(t)} |\lambda| \leqslant \underline{\lim} \sqrt[n]{|t^n|}. \tag{4.19}$$

Soit λ_0 un nombre arbitraire tel que $|\lambda_0| > \sup_{\lambda \in \sigma(t)} |\lambda|$. Compte tenu de 4.12, la fonction $R(\lambda, t)$ est holomorphe au point λ_0 donc en vertu de (4.17) la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle t^n(x), x'\rangle}{\lambda_0^{n+1}}$$

est convergente quels que soient $x \in E$, $x' \in E'$. Il en résulte que pour chaque $x \in E$ l'ensemble $\bigcup_n (t^n(x)/\lambda_0^{n+1})$ est faiblement borné, donc borné dans E. Par conséquent, en vertu du théorème de Banach-Steinhaus, l'ensemble $\bigcup_n (t^n/\lambda_0^{n+1})$ est équicontinu, donc borné dans $L(E)$. Cela signifie que pour chaque semi-norme $|\cdot|_{B,V}$

$$\sup_n \left| \frac{t^n}{\lambda_0^{n+1}} \right|_{B,V} < \infty. \tag{4.20}$$

Soit U un voisinage dans E dont l'image $t(U) = A$ est bornée. Alors $t^n \in B(E)_U$ pour tout $n > 0$. Il en résulte en vertu de (4.20) et (1.3) qu'il existe une constante M tel que

$$\left| \frac{t^n}{\lambda_0^n} \right| \leqslant \frac{|t^n|_{U,U}}{|\lambda_0|^n} = \sup_{x \in U} \left| \frac{t^n(x)}{\lambda_0^n} \right|_U = \sup_{x \in A} \left| \frac{t^{n-1}(x)}{\lambda_0^n} \right|_U = \left| \frac{t^{n-1}}{\lambda_0^n} \right|_{A,U} \leqslant M.$$

Donc $|t^n| \leqslant M|\lambda_0|^n$ quel que soit $n > 0$. Par conséquent, $\overline{\lim} \sqrt[n]{|t^n|} \leqslant |\lambda_0|$. Cette inégalité est vraie pour tous les nombres λ_0 tels que $|\lambda_0| > \sup_{\lambda \in \sigma(t)} |\lambda|$, donc

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|t^n|} \leqslant \sup_{\lambda \in \sigma(t)} |\lambda|.$$

Il en résulte d'après (4.19) que la suite $\sqrt[n]{|t^n|}$ est convergente et

$$\sup_{\lambda \in \sigma(t)} |\lambda| = \lim \sqrt[n]{|t^n|}.$$

Le nombre $\sup_{\lambda \in \sigma(t)} |\lambda|$ s'appelle *norme spectrale* de l'opérateur t.

Dans la suite nous admettons que E n'est pas un espace de Banach.

4.21. THÉORÈME. *Le spectre d'un opérateur quasi-borné est compact.*

Démonstration. C'est une conséquence de 3.16 (a), 4.15 et 4.16.

4.22. THÉORÈME. *La résolvante d'un opérateur quasi-borné u est une fonction holomorphe sur l'ensemble $\varrho(u)$.*

Démonstration. Soit $u = aI + t \in I(E)$. Alors il résulte de 4.12 et de l'égalité $R(\lambda, u) = R(\lambda - a, t)$ que la fonction $R(\lambda, u)$ est holomorphe sur $\varrho(u)$.

On désigne par $I(E)_U$ le sous-espace de $I(E)$ composé de tous les opérateurs de la forme $u = aI + t$, où $t \in B(E)_U$.

4.23. THÉORÈME. *Soient $u = aI + t \in I(E)_U$ et $f(\lambda)$ une fonction scalaire holomorphe sur un voisinage D du spectre $\sigma(u)$.*

Si B est un ensemble ouvert borné contenant $\sigma(u)$ dont l'adhérence est contenue dans D et dont la frontière C se compose d'un nombre fini de courbes de Jordan,

$$f(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\lambda) R(\lambda, u)\, d\lambda \in I(E)_U.$$

En outre, $f(u) = f(a)I + tv$, où l'opérateur $v \in L(E)$ est permutable avec t.

Démonstration. En vertu de (3.15) pour tout $\lambda \in C$

$$R(\lambda, u) = \frac{I}{\lambda - a} + \frac{tR(\lambda, u)}{\lambda - a}.$$

Donc

$$f(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\lambda)}{\lambda - a} I\, d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\lambda)}{\lambda - a} tR(\lambda, u)\, d\lambda. \tag{4.24}$$

Soit

$$v = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\lambda)}{\lambda - a} R(\lambda, u)\, d\lambda.$$

L'existence de cette intégrale résulte de 4.22, 4.9, 4.1(a) et de la condition $\lambda \neq a$ sur C. Donc $v \in L(E)$. Par conséquent, les deux intégrales dans (4.24) existent en vertu de 4.2(b) et d'après la formule de Cauchy pour les fonctions scalaires $f(u) = f(a)I + tv$. En vertu de 4.2(b) l'égalité $tR(\lambda, u) = R(\lambda, u)t$ entraîne $tv = vt$. Comme $t \in B(E)_U$, $vt \in B(E)_U$ et par conséquent $f(u) \in I(E)_U$. En appliquant le théorème de Cauchy à la fonction $\langle f(\lambda) R(\lambda, u)(x), x' \rangle$, où $x \in E$, $x' \in E'$, on constate, en vertu de 4.2(a), que l'opérateur $f(u)$ ne dépend que de la fonction $f(\lambda)$, ce qui achève la démonstration.

4.25. COROLLAIRE. *Si $u = aI + t \in I(E)$, pour que l'opérateur $f(u)$ soit borné, il faut et il suffit que $f(a) = 0$.*

Soit $A(D)$ l'espace de toutes les fonctions scalaires holomorphes sur un ensemble compact D. C'est la limite inductive des espaces de Banach $B(H)$ de toutes les fonctions holomorphes sur H, continues sur $\overline{H}$ avec la norme

$$|f| = \sup_{\lambda \in H} |f(\lambda)|,$$

où H parcourt la famille de tous les ensembles ouverts contenant D [6]. Il est facile de prouver que $A(D)$ est une algèbre topologique commutative avec la multiplication définie habituellement.

4.26. THÉORÈME. *Si $u \in I(E)_U$, l'application $f(\lambda) \to f(u)$ de l'algèbre $A(\sigma(u))$ dans la sous-algèbre $I(E)_U$ de l'algèbre $I(E)$ est un homomorphisme continu dans le quel les fonctions $f(\lambda) = \lambda$, $f(\lambda) = 1$ et les opérateurs $f(u) = u$, $f(u) = I$ se correspondent respectivement.*

Démonstration. Il est évident que cette application est linéaire. Si $f, g \in A(\sigma(u))$, $fg(u) = f(u)g(u) = g(u)f(u)$. La démonstration de ce fait est la même que dans le cas d'un espace de Banach [2]. L'application $f(\lambda) \to f(u)$ est donc un homomorphisme algébrique.

Nous allons démontrer qu'il est continu. On constate facilement que l'inclusion $H \subset G$ entraîne $B(G) \subset B(H)$ et que l'application canonique $B(G) \to B(H)$ est continue dans les topologies normées de ces espaces. D'autre part, l'ensemble $\sigma(u)$ est compact, donc, en vertu du théorème de Borel, chaque ensemble ouvert contenant $\sigma(u)$ contient un ensemble satisfaisant aux hypothèses du théorème 4.23 sur l'ensemble B. Il en résulte [10] que l'espace $A(\sigma(u))$ est la limite inductive de tous les espaces $B(H)$, où H parcourt la famille de tous les ensembles de la propriété mentionnée plus haut. Soit H_0 un unsemble fixé ayant cette propriété. Supposons que $f_n \in B(H_0)$ pour chaque n et $f_n \to 0$ pour la topologie normée. Cela signifie que

$$\sup_{\lambda \in C} |f_n(\lambda)| \to 0, \tag{4.27}$$

où C est la frontière de H_0.

Pour chaque semi-norme $|\cdot|_{D,V}$ en vertu de 4.1(b) nous avons

$$|f_n(u)|_{D,V} \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_C |f_n(\lambda)|\,|R(\lambda, u)|_{D,V} |d\lambda|. \tag{4.28}$$

De la continuité de $R(\lambda, u)$ sur C et de l'inégalité

$$\big||R(\lambda, u)|_{D,V} - |R(\lambda', u)|_{D,V}\big| \leqslant |R(\lambda, u) - R(\lambda', u)|_{D,V}$$

il résulte que la fonction $|R(\lambda, u)|_{D,V}$ est continue sur C. Donc les conditions (4.27) et (4.28) entraînent $f_n(u) \to 0$. Par conséquent, l'homomorphisme $f(\nu) \to f(u)$ est continu sur chacun des sous-espaces $B(H)$ de $A(\sigma(U))$, d'où on conclut qu'il est continu [9].

Soit $f(\lambda) = \lambda$. Alors

$$f(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \lambda R(\lambda, u)\, d\lambda. \tag{4.29}$$

Si $u = aI + t$, $R(\lambda, u) = R(\lambda - a, t)$. Donc en vertu de (4.17)

$$R(\lambda, u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(\lambda - a)^{n+1}}$$

pour tout λ tel que $|\lambda - a| > |t|$.

La fonction $f(\lambda) = \lambda$ est holomorphe dans le plan tout entier, donc dans (4.29) on peut prendre pour C un rond $|\lambda - a| = r > |t|$. Alors en développant en série la fonction intégrée dans (4.29) nous avons

$$\begin{aligned} f(u) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda t^n}{(\lambda - a)^{n+1}} \Big) d\lambda \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{2\pi i} \int_C \frac{\lambda\, d\lambda}{(\lambda - a)^{n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{2\pi i} \int_C \frac{d\lambda}{(\lambda - a)^n} + a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{2\pi i} \int_C \frac{d\lambda}{(\lambda - a)^{n+1}} \\ &= t + aI = u. \end{aligned}$$

D'une façon analogue on prouve que la fonction $f(\lambda) = 1$ et l'opérateur $f(u) = I$ se correspondent.

4.30. THÉORÈME. *Si $u \in I(E)$, $f \in A(\sigma(u))$, on a $\sigma(f(u)) = f(\sigma(u))$.*

La démonstration est la même que dans le cas d'un espace de Banach [2].

PROBLEMES IRRESOLUS

1. Tout opérateur $t \in B(E)$ a-t-il un sous-espace invariant?
2. A quelles conditions doivent satisfaire les espaces E et F pour que l'espace $B(E, F)$ soit dense dans $L(E, F)$?
3. L'espace $B(E,F)$ est-il complet pour la topologie $\mathcal{T}$?
4. Existe-t-il dans l'algèbre $L(E)$ un idéal plus grand que $B(E)$?
5. Si chaque opérateur appartenant à $L(E)$ a un spectre borné, E est-il nécessairement un espace de Banach?

Travaux cités

[1] N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques*, Paris 1966.
[2] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear operators. I. General theory*, New York 1958.
[3] — *Linear operators. II. Spectral theory*, New York 1963.
[4] E. Hille, *Notes of linear transformations*, Ann. of Math. 2(40) (1939), p. 1-47.

[5] — and R. S. Phillips, *Functional analysis and semi-groups*, Providence 1957.

[6] G. Köthe, *Dualität in der Funktionentheorie*, J. Reine Angew. Math. 191 (1953), p. 30-50.

[7] J. Leray, *Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme complètement continu d'un espace vectoriel à voisinages convexes*, Acta Sc. Math. Szeged 12 (1950), p. 177-186.

[8] Д. А. Райков, *О вполне непрерывности сопряженного оператора*, ДАН СССР 119. 3 (1958), p. 446-449.

[9] A. Robertson and W. Robertson, *Topological vector spaces*, Cambridge 1964.

[10] J. Sebastiao e Silva, *Su certe classi di spazi locamente convessi importanti per le applicazioni*, Rend. Math. Appl. 14 (1955), p. 388-410.

Reçu par la Rédaction le 21. 10. 1969

STUDIA MATHEMATICA, T. XXXVII. (1971)

Extreme points in tensor products and a theorem of de Leeuw

by

J. A. JOHNSON (Stilliwater)

In this paper we show how an idea due to de Leeuw (see [2], lemma 3.3) can be adapted to vector-valued measures to yield a result concerning extreme points of the dual ball of a tensor product of Banach spaces (Theorem 1.1). In Section 2 we give an elementary non-measure-theoretic proof of de Leeuw's lemma which yields a stronger result than the original statement. This idea is then applied to obtain results on exposed points of the dual ball of a tensor product of Banach spaces.

1. We will denote the dual of a normed space E by E', the unit ball of E by U_E, and the set of extreme points of a convex set K by ext (K).

If E and F are normed spaces, then $E\otimes F$ denotes their (algebraic) tensor product, $E\otimes_\alpha F$ denotes $E\otimes F$ endowed with a crossnorm α (see [7]) and $E\tilde{\otimes}_\alpha F$ the completion of $E\otimes_\alpha F$.

We will restrict our attention to the crossnorm λ (see [7]) for the following reason: every extreme point of $U_{E\oplus\alpha F}$ is of the form $x'\otimes y'$, $x'\in E'$, $y'\in F'$, if and only if $\alpha=\lambda$. This follows from the definition of λ and the K^2-M^3-R theorem (see [1], p. 80).

If S is a compact Hausdorff space and E a Banach space, we let $C_E(S)$ denote the E-valued continuous functions on S with sup-norm and $C(S)$ denote the scalar-valued continuous functions. If $f\in C(S)$ and $x\in E$, $f\cdot x\colon s\to f(s)x$ defines a function in $C_E(S)$. If F is considered as a subspace of $C(S)$, then $E\otimes_\lambda F$ is isometrically embedded in $C_E(S)$ by the canonical linear mapping which sends $x\otimes f$ to $f\cdot x$.

X will denote a subspace of $C_E(S)$, and for $s\in S$, let $\Phi_s\colon X\to E$ be defined by $\Phi_s(f)=f(s)$. For each $x'\in E'$, the composition $x'\circ\Phi_s$ of x' and Φ_s is in X'.

LEMMA 1.1. $\{x'\circ\Phi_s : x'\in U_{E'},\ s\in S\}$ is weak* compact in $U_{X'}$.

Proof. If E' and X' are given their weak* topologies then the mapping $(x', s)\to x'\circ\Phi_s$ is continuous from $U'_{E'}\times S$ into X', q. e. d.

LEMMA 1.2. *Every extreme point of $U_{X'}$ is of the form $x'\circ\Phi_s$, where $x'\in U_{E'}$ and $s\in S$.*