STUDIA MATHEMATICA, T. XXXIX. (1971)

Approximation von Fixpunkten

von

JOCHEN REINERMANN (Aachen)

Wir formulieren zunächst einige Prinzipien, welche in der Fixpunkttheorie immer wieder verwendet werden, ganz allgemein für uniforme Räume.

DEFINITION 1. Sei $(X, \mathscr{U})$ ein uniformer Raum, $X \neq \emptyset$ und $f\colon X \to X$. Ein gerichtetes System $\{x_i\}_{i\in I} \in X^I$, [1] $I \neq \emptyset$, heißt *asymptotisch-f-regulär* (a.f.r.), genau dann, wenn

$$(*) \qquad \bigwedge_{U\in\mathscr{U}} \bigvee_{i\in I} \bigwedge_{j\in I} \big(j \geqslant i \Rightarrow \big(f(x_j), x_j\big) \in U\big).$$

Bemerkung 1. (1) In einem topologischen linearen Raum (ausgestattet mit seiner kanonischen uniformen Struktur) ist $\{x_i\}_{i\in I}$ a.f.r., genau dann, wenn $\lim\limits_{I} \{f(x_i) - x_i\} = 0$ zutrifft.

(2) Um $(*)$ sicherzustellen, genügt es, $(*)$ für eine Basis $\mathfrak{B}$ anstelle von $\mathscr{U}$ zu garantieren.

LEMMA 1 (Existenz von Fixpunkten).

Voraussetzung. *$(E, \mathscr{U})$ separierter uniformer Raum, $X \subset E$, $x \in X$, $f\colon X \to X$ stetig (Teilraumtopologie), $\{x_i\}_{i\in I} \in X^I$ a.f.r., x Berührpunkt von $\{x_i\}_{i\in I}$.*

Behauptung. $f(x) = x$.

Beweis. Sei $U \in \mathscr{U}$. Man wähle ein symmetrisches $V \in \mathscr{U}$ mit $V^3 \subset U$ und — gemäß $(*)$ — $i \in I$ mit $\big(f(x_j), x_j\big) \in V$ für $j \geqslant i$. Die Stetigkeit von f in x impliziert die Existenz eines $W \in \mathscr{U}$, $W \subset V$, so daß $(z, x) \in W$ die Relation $\big(f(z), f(x)\big) \in V$ nach sich zieht. Sei $j_0 \geqslant i$ und $(x_{j_0}, x) \in W$. Dann ist also $\big(f(x_{j_0}), f(x)\big) \in V$.

Zusammen ergibt sich $\big(f(x), x\big) \in V^3 \subset U$, d.h. $\big(f(x), x\big) \in \bigcap\limits_{U\in\mathscr{U}} U = \Delta$ (Hausdorff), d.h. $f(x) = x$, q.e.d.

SATZ 1 (Fixpunkte und konvergente a.f.r. Systeme).

---

[1] Für $I := \mathbf{N}$ sagen wir „a.f.r. Folge".

icm©

Voraussetzung. $(E, \mathscr{U})$ *separierter uniformer Raum*, $X \subset E$, $X \neq \emptyset$, X *abgeschlossen*, $f\colon X \to X$, $\{x_i\}_{i\in I} \in X^I$ *a.f.r. System mit* (i) f *stetig*, (ii) f *hat höchstens einen Fixpunkt*, (iii) $f(X)$ *relativ* $|I|$*-kompakt* (²).

Behauptung (a) f *hat genau einen Fixpunkt* x;

(b) $$x = \lim_I \{x_i\}.$$

Beweis. Wegen $f(x_i) \in f(X)$ hat das gerichtete System $\{f(x_i)\}_{i\in I}$ einen Berührpunkt $x \in X$, welcher wegen (*) auch Berührpunkt von $\{x_i\}_{i\in I}$ ist. Nach Lemma 1 ist nun bereits $f(x) = x$, also (a) bewiesen. Wäre nicht $x = \lim_I \{x_i\}$, so gäbe es $V \in \mathscr{U}$ und eine konfinale Teilmenge $I' \subset I$ mit $(x_i, x) \notin V$ für $i \in I'$. Das über I' (induzierte Ordnung) gerichtete System $\{x_i\}_{i\in I'}$, besitzt nun wegen (iii) selbst einen Berührpunkt $y \in X$, für den nach Lemma 1, $f(y) = y$ zutrifft; (ii) erfordert $y = x$, weshalb ein $i_0 \in I'$ mit $(x_{i_0}, x) = (x_{i_0}, y) \in V$ existiert. Das aber steht im Widerspruch zu „$\bigwedge_{i\in I'} (x_i, x) \notin V$", q.e.d.

Bemerkung 2. (1) Für $I\colon = \mathbf{N}$, $x_0 \in X$, $x_n\colon = f^n(x_0)$, $n \in \mathbf{N}$ (Picard-Folge) und einen linearen normierten Raum mit dessen kanonischer uniformer Struktur (als metrischer Raum, siehe Bemerkung 3) lautet Satz 1 so:

Satz 1′ (Fixpunkte und Konvergenz von Picard-Folgen).

Voraussetzung. $(E, \|\ \|)$ *linearer normierter Raum*, $X \subset E$, $x_0 \in X$, X *abgeschlossen*, $f\colon X \to X$ *stetig*, $f(X)$ *relativ kompakt und* $\lim_{n\to\infty} \{f^{n+1}(x_0) - f^n(x_0)\} = 0$, f *hat höchstens einen Fixpunkt.*

Behauptung. f *hat genau einen Fixpunkt* x, *und es gilt* $\lim_{n\to\infty} \{f^n(x_0)\} = x$.

(2) Es gibt eine Anwendung von Satz 1′ in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen (siehe [6]).

(3) Es seien alle Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt, $f\colon X \to X$ gleichmäßig stetig und $k \in \mathbf{N}$. Dann gilt

(**) $$\bigwedge_{U\in\mathscr{U}} \bigvee_{i\in I} \bigwedge_{j\in I} \big(j \geqslant i \Rightarrow (f^k(x_j), x_j) \in U\big).$$

Beweis. Unmittelbar durch Induktion über k.

Für ein gleichmäßig stetiges f kann Satz 1 leicht verschärft werden, indem nur angenommen wird „Sei $f^k(X)$ relativ $|I|$-kompakt für ein $k \in \mathbf{N}$". Ist jedoch $\{x_i\}_{i\in I}$ die Picard-Folge eines stetigen f, also $I\colon = \mathbf{N}$, $x_n\colon = f^n(x_0)$, $x_0 \in X$, so kann Satz 1 bereits unter dieser abgeschwächten Bedingung, also ohne die Annahme der gleichmäßigen Stetigkeit bewiesen werden.

(²) d.h. jedes gerichtete System $\{x_i\}_{i\in K}$ mit $|K| \leqslant |I|$ hat einen Berührpunkt in E.

Definition 2. Es sei $(X, \mathscr{U})$ ein uniformer Raum, $\mathfrak{B}$ eine Basis für $\mathscr{U}$, $x \in X$. Ein gerichtetes System $\{x_i\}_{i\in I} \in X^I$, $I \neq \emptyset$, heißt $(\mathfrak{B}, x)$*-monoton*, genau dann, wenn

(***) $$\bigwedge_{V\in\mathfrak{B}} \bigwedge_{i,j\in I} \Big(\big((x_i, x) \in V \wedge j \geqslant i\big) \Rightarrow (x_j, x) \in V\Big).$$

Bemerkung 3. Im Falle eines metrischen Raumes (X, ϱ) und dessen kanonischer uniformer Struktur $\mathscr{U}_\varrho$, erzeugt durch $\mathfrak{B}\colon = \{V_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, $V_\varepsilon\colon = \{(x, y) \mid x, y \in X \wedge \varrho(x, y) \leqslant \varepsilon\}$, kann man leicht verifizieren, daß „$(\mathfrak{B}, x)$-monoton" mit „$\varrho(x_j, x) \leqslant \varrho(x_i, x)$ für $i \leqslant j$" äquivalent ist; $\{x_i\}_{i\in I}$ heißt kurz x*-monoton.*

Definition 3. Es sei $(X, \mathscr{U})$ ein uniformer Raum, $\mathfrak{B}$ eine Basis für $\mathscr{U}$, $X \neq \emptyset$, $f\colon X \to X$. f heißt $\mathfrak{B}$*-kontrahierend*, genau dann, wenn

(****) $$\bigwedge_{V} \big(V \in \mathfrak{B} \Rightarrow (f\times f)(V) \subset V\big)\ (^3).$$

Bemerkung 4. (1) für einen metrischen Raum (X, ϱ) mit dessen kanonischer Basis $\mathfrak{B}$ (siehe Bemerkung 3) und ein $f\colon X \to X$ ist „$\mathfrak{B}$-kontrahierend" äquivalent mit „$\varrho\big(f(x), f(y)\big) \leqslant \varrho(x, y)$ für $x, y \in X$".

(2) Es sei $(X, \mathscr{U})$ ein uniformer Raum, $\mathfrak{B}$ eine Basis für $\mathscr{U}$; $x_0, x \in X$, $f\colon X \to X$ $\mathfrak{B}$-kontrahierend, $f(x) = x$. Dann ist $\{x_n\}\colon = \{f^n(x_0)\}$ $(\mathfrak{B}, x)$-monoton.

(3) Für weitere Illustrierungen zu „$(\mathfrak{B}, x)$-monoton" siehe [7], [8] und [11].

Eine einfache Folgerung aus Lemma 1 ist

Satz 2 (Fixpunkte und Konvergenz von $(\mathfrak{B}, x)$-monotonen a.f.r. Systemen).

Voraussetzung. $(X, \mathscr{U})$ *separierter uniformer Raum*, $x \in X$, $\mathfrak{B}$ *Basis für* $\mathscr{U}$, $f\colon X \to X$, $\{x_i\}_{i\in I} \in X^I$ *a.f.r. und* $(\mathfrak{B}, x)$*-monoton*, $\{x_i\}_{i\in I'}$ *konfinales Teilsystem von* $\{x_i\}_{i\in I}$ *und* x *Berührpunkt von* $\{x_i\}_{i\in I'}$.

Behauptung. $f(x) = x$ *und* $x = \lim_I \{x_i\}$.

Beweis Nach Lemma 1 ist $f(x) = x$. Sei $V \in \mathfrak{B}$. Wir wählen $i_0 \in I'$ mit $(x_{i_0}, x) \in V$. Für $i \in I$ und $i \geqslant i_0$ ist dann $(x_i, x) \in V$ wegen (***), d.h. $x = \lim_I \{x_i\}$, q.e.d.

Satz 3 (Approximation von Fixpunkten durch schwach konvergente x-monotone Folgen).

Voraussetzung. $(E, \|\ \|)$ *reeller reflexiver* (B)*-Raum mit*

(T) *Zu* $M \subset E$, $M \neq \emptyset$, M *beschränkt, und* $\eta > 0$ *gibt es* $\eta_1 > 0$, *so daß gilt: Zu* $y_1, y_2 \in M$ *mit* $\|y_1 - y_2\| \geqslant \eta$ *gibt es* $u \in E^*$ *und* $c \in \mathbf{R}$ *mit*

(³) $(f\times f)(x, y)\colon = (f(x), f(y))$.

(a) $(u\langle y_1\rangle - c)(u\langle y_2\rangle - c) < 0$ (4),

(b) *für* $x \in M$ *mit* $(u\langle x\rangle - c)(u\langle y_1\rangle - c) < 0$ *findet*

$$\|x - y_1\| \geqslant \|x - y_2\| + \eta_1$$

statt;

$X \subset E$, $X \neq \emptyset$, $f\colon X \to X$, $\operatorname{Fix}(f)\colon = \{x \mid x \in X \wedge f(x) = x\}$, $\{x_n\} \in X^N$ *beschränkt, und es gilt*

(i) $\operatorname{Fix}(f) \neq \emptyset$.

(ii) *Alle schwachen Berührpunkte von* $\{x_n\}$ *liegen in* $\operatorname{Fix}(f)$.

(iii) *Für* $y \in \operatorname{Fix}(f)$ *fällt* $\{\|x_n - y\|\}$ *monoton.*

Behauptung. $\{x_n\}$ *konvergiert schwach gegen einen Fixpunkt von* f.

Bemerkung 5. Für einen reellen Hilbert-Raum $(E, (,))$ gilt (T). Mit $M \subset E$, $M \neq \emptyset$, M beschränkt und $\eta > 0$ erfüllt nämlich

$$\eta_1\colon = \frac{\eta}{12L}, \qquad L\colon = \sup_{x \in M} \|x\| + 1,$$

sämtliche Forderungen. Zu $y_1, y_2 \in M$ mit $\|y_1 - y_2\| \geqslant \eta$ kann man $u \in E^*$ bzw. $c \in \boldsymbol{R}$ durch $u\langle x\rangle\colon = (x, y_1 - y_2)$ bzw. $c\colon = u\langle \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_1\rangle$ definieren (siehe [7]).

Beweis von Satz 3. Wir definieren

$$\varphi\colon \operatorname{Fix}(f) \to \boldsymbol{R} \quad \text{durch } \varphi(y)\colon = \inf_{n \in N} \|x_n - y\|,$$

$$\varphi_0 \in \boldsymbol{R} \quad \text{durch } \varphi_0\colon = \inf_{y \in \operatorname{Fix}(f)} \varphi(y),$$

wählen $\{y_k\} \in \operatorname{Fix}^N(f)$ mit $\lim_{k\to\infty} \{\varphi(y_k)\} = \varphi_0$, formulieren Aussagen

$$(\mathrm{B}_1) \qquad \bigvee_{y^* \in \operatorname{Fix}(f)} (\mathfrak{T}_s\text{-}\lim_{n\to\infty} \{x_n\} = y^* \wedge \lim_{k\to\infty} \{y_k\} = y^*) \ (5);$$

$$(\mathrm{B}_2) \qquad \bigvee_{y^{**} \in \operatorname{Fix}(f)} \ \bigvee_{\eta > 0} (y^{**} \text{ ist } \mathfrak{T}_s\text{-Berührpunkt von } \{x_n\} \wedge \|y_k - y^{**}\| \geqslant \eta \text{ für unendlich viele } k \in \boldsymbol{N})$$

und zeigen zunächst: $\neg(B_1) \Rightarrow (B_2)$. Sei hierzu $y \in \operatorname{Fix}(f)$ $\mathfrak{T}_s$-Berührpunkt von $\{x_n\}$ (ein solcher existiert wegen der Beschränktheit von $\{x_n\}$ und der Reflexivität von $(E, \|\ \|)$). Nach Voraussetzung gilt nun entweder

$$(1)\colon \neg(\mathfrak{T}_s\text{-}\lim_{n\to\infty}\{x_n\} = y) \quad \text{oder} \quad (2)\colon \neg(\lim_{k\to\infty}\{y_k\} = y).$$

Gilt (2), so findet $\|y_k - y\| \geqslant \eta$ für geeignetes (genügend kleines) $\eta > 0$ und unendlich viele $k \in \boldsymbol{N}$ statt, so daß mit $y^{**}\colon = y$ und einem solchen η

(4) d.h. y_1, y_2 „liegen auf verschiedenen Seiten" der durch u und c gegebenen Hyperebene.

(5) $\mathfrak{T}_s$ bezeichnet hier und fortan die schwache Topologie von E.

(B_2) wahr ist. Gilt aber (1), so existiert ein $\mathfrak{T}_s$-Berührpunkt $\tilde{y} \in \operatorname{Fix}(f)$ von $\{x_n\}$ mit $\tilde{y} \neq y$ (Beschränktheit von $\{x_n\}$, Reflexivität von $(E, \|\ \|)$ und (ii)). Mit $\tilde{y}$ anstelle von y gilt dann (2), so daß mit $y^{**}\colon = \tilde{y}$ und η — wie oben dargelegt — (B_2) ebenfalls erfüllt ist. Wir führen nun (B_2) zum Widerspruch (womit nach dem oben Gezeigten (B_1) und um so mehr die Behauptung des Satzes bewiesen ist). Sei hierzu $y^{**} \in \operatorname{Fix}(f)$, $\eta > 0$ gemäß (B_2) gewählt. Wir definieren $M\colon = \bigcup_{n \in N} \{x_n\} \cup \bigcup_{k \in N} \{y_k\} \cup \{y^{**}\}$ und behaupten: M ist beschränkt. Für $\bigcup_{n \in N} \{x_n\}$ trifft nach Voraussetzung dies zu; sei $\|x_n\| \leqslant L_1$ $(L_1 \in \boldsymbol{R}, n \in \boldsymbol{N})$. Für $\{y^{**}\}$ ist das trivial. Für $\{y_k\}$ haben wir zunächst die Existenz eines $L_2 \in \boldsymbol{R}$ mit $0 \leqslant \varphi(y_k) \leqslant L_2$ für $k \in \boldsymbol{N}$. Zu $k \in \boldsymbol{N}$ bestimmen wir nun $n_k \in \boldsymbol{N}$ mit $\|x_{n_k} - y_k\| \leqslant L_2 + 1$. Dann folgt $\|y_k\| \leqslant \|y_k - x_{n_k}\| + \|x_{n_k}\| \leqslant L_2 + 1 + L_1$.

Insgesamt erhält man also wegen

$$\operatorname{Diam}(M)\colon = \sup_{i,j,k,l,m,n,r,t} \{\|x_i - x_j\|, \|y_k - y_l\|, \|x_m - y_n\|, \|x_r - y^{**}\|, \|y_t - y^{**}\|\}$$

$\operatorname{Diam}(M) < \infty$, wie behauptet. Zu M, η wird nun η_1 gemäß (T) und dann $\varepsilon \in \boldsymbol{R}$ mit $0 < \varepsilon < \eta_1$ gewählt. Wir bestimmen $k_0 \in \boldsymbol{N}$ mit $\|y_{k_0} - y^{**}\| \geqslant \eta$ und $\varphi(y_{k_0}) < \varphi_0 + \varepsilon$ sowie $n_0 \in \boldsymbol{N}$ mit $\|x_{n_0} - y_{k_0}\| < \varphi_0 + \varepsilon$. Zu $y_1\colon = y_{k_0}$, $y_2\colon = y^{**}$ wählen wir $u \in E^*$, $c \in \boldsymbol{R}$ gemäß (T). O.B.d.A. sei $u\langle y^{**}\rangle - c > 0$. Wegen $u \in E^*$ ist die durch $H^0\colon = \{x \mid x \in E \wedge u\langle x\rangle > c\}$ definierte Teilmenge von E eine $\mathfrak{T}_s$-offene Umgebung von y^{**}. Also gibt es $n_1 \in \boldsymbol{N}$ mit $n_1 \geqslant n_0$ und $x_{n_1} \in H^0$ (Berührpunkteigenschaft). Mit (T) und (iii) folgt

$$\|x_{n_1} - y^{**}\| + \eta_1 \leqslant \|x_{n_1} - y_{k_0}\| \leqslant \|x_{n_0} - y_{k_0}\| < \varphi_0 + \varepsilon,$$

was mit

$$\varepsilon_1\colon = \eta_1 - \varepsilon > 0, \qquad \|x_{n_1} - y^{**}\| < \varphi_0 - \varepsilon_1,$$

d.h. $\varphi_0 = \inf_{n \in N} \|x_n - y^{**}\| < \varphi_0$ und damit einen Widerspruch ergibt, q.e.d.

Spezialfälle von Satz 1 finden sich in [7] und [11].

Voraussetzung (ii) von Satz 3 ist Gegenstand der folgenden Aussage:

Satz 4 (Schwache Berührpunkte von a.f.r. Folgen im Hilbert-Raum sind Fixpunkte von f).

Voraussetzung. $(E, (,))$ *Hilbert-Raum*, $X \subset E$, $x \in X$, $f\colon X \to X$ *kontrahierend*, $\{x_n\} \in X^N$ *beschränkte a.f.r. Folge*, x $\mathfrak{T}_s$-*Berührpunkt von* $\{x_n\}$.

Behauptung. $f(x) = x$.

Beweis. Wir wählen Teilfolge $\{k_n\}$ von $\boldsymbol{N}$ mit $\mathfrak{T}_s\text{-}\lim_{n\to\infty}\{x_{k_n}\} = x$ (vgl. [4], S. 315, (5)). Dann ist wegen

$$\begin{aligned}\|x_{k_n} - f(x)\|^2 &= \|(x_{k_n} - x) + (x - f(x))\|^2 \\ &= \|x_{k_n} - x\|^2 + \|x - f(x)\|^2 + 2\operatorname{Re}(x_{k_n} - x, x - f(x))\end{aligned}$$

und

$$\lim_{n\to\infty}\{(x_{k_n}-x,\, x-f(x))\} = 0 \qquad \text{(schwache Konvergenz)},$$

$$(*)\qquad \|x-f(x)\|^2 = \overline{\lim_{n\to\infty}}\{\|x_{k_n}-f(x)\|^2-\|x_{k_n}-x\|^2\}$$

einerseits und wegen

$$\|x_{k_n}-f(x)\| \leqslant \|f(x_{k_n})-x_{k_n}\|+\|f(x_{k_n})-f(x)\| \leqslant \|f(x_{k_n})-x_{k_n}\|+\|x_{k_n}-x\|$$

sowie

$$\lim_{n\to\infty}\{f(x_{k_n})-x_{k_n}\} = 0 \qquad (\text{a.}f.\text{r. Folge})$$

erhält man

$$(**)\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\{\|x_{k_n}-f(x)\|-\|x_{k_n}-x\|\} \leqslant 0$$

andererseits. Wegen der Existenz eines $L\in\boldsymbol{R}$ mit $\|x_n\|\leqslant L$ für $n\in\boldsymbol{N}$ folgt weiter mit

$$\|x_{k_n}-f(x)\|^2-\|x_{k_n}-x\|^2 = (\|x_{k_n}-f(x)\|+\|x_{k_n}-x\|)\cdot(\|x_{k_n}-f(x)\|-\|x_{k_n}-x\|)$$

und

$$0 \leqslant \|x_{k_n}-f(x)\|+\|x_{k_n}-x\| \leqslant 2L+\|f(x)\|+\|x\|$$

aus $(*)$ und $(**)$: $\|x-f(x)\|^2\leqslant 0$, d.h. $f(x) = x$, q.e.d. Eine erste Realisierung von Satz 3 ist (vgl. [5]):

Satz 5 (Schwache Konvergenz von Picard-Folgen gegen einen Fixpunkt).

Voraussetzung. $(E, (,))$ *reeller Hilbert-Raum*, $X\subset E$; x, $x_0\in X$, X *schwach abgeschlossen*, $f\colon X\to X$ *kontrahierend*, $f(x) = x$,

$$\lim_{n\to\infty}\{f^{n+1}(x_0)-f^n(x_0)\} = 0.$$

Behauptung. *Es gibt* $z\in X$ *mit* $f(z) = z$ *und* $\mathfrak{T}_s\text{-}\lim_{n\to\infty}\{f^n(x_0)\} = z$.

Beweis. Wir realisieren sämtliche Voraussetzungen von Satz 3. Nach Bemerkung 5 ist (T) erfüllt. Wegen $x\in\mathrm{Fix}(f)$ gilt dasselbe für (i). Wegen $f(x) = x$ ist

$$\|f^n(x_0)\| \leqslant \|f^n(x_0)-f^n(x)\|+\|f^n(x)\| \leqslant \|x_0-x\|+\|x\|,$$

d.h. $\{f^n(x_0)\}$ beschränkt.

Die Festsetzung $x_n\colon = f^n(x_0)$, $n\in\boldsymbol{N}$, zeigt, daß $\lim_{n\to\infty}\{f(x_n)-x_n\} = 0$, also $\{x_n\}$ a.f.r. Folge ist. Ist $y\in X$ $\mathfrak{T}_s$-Berührpunkt von $\{x_n\}$, so ist nach Satz 4 $f(y) = y$, d.h. (ii) ist erfüllt. Schließlich ist mit $y\in\mathrm{Fix}(f)$

$$\|x_n-y\| \leqslant \|f^n(x_0)-f^n(y)\| \leqslant \|f^{n-1}(x_0)-f^{n-1}(y)\| \leqslant \|x_{n-1}-y\|,$$

also $\{\|x_n-y\|\}$ monoton fallend, d.h. (iii) erfüllt. Die Aussage von Satz 3 ergibt die Behauptung des in Rede stehenden Satzes.

Im folgenden betrachten wir ein spezielles Iterationsverfahren (vgl. [12]). Wir beginnen mit

Lemma 2 (Gestörte Picard-Iteration).

Voraussetzung. $(E, \|\ \|)$ *linearer normierter Raum*, $X\subset E$, 0, $x_0\in X$, X *konvex*, $f\colon X\to X$ *kontrahierend*; $\{c_n\}\in(0,1)^{\boldsymbol{Z}^+}$, $\{c_n\}$ *monoton fallende Nullfolge*, $\sum c_n$ *divergent*; $\{x_n\}\in X^{\boldsymbol{N}}$ *definiert durch* $x_{n+1}\colon = (1-c_n)f(x_n)$, $n\in\boldsymbol{Z}^+$, $\{x_n\}$ *beschränkt*.

Behauptung. $\{x_n\}$ *ist a.f.r.*

Beweis. Wir setzen $L\colon = \sup_{x\in X}\|x\|+1$ und für $n\in\boldsymbol{Z}^+$ $b_n\colon = \|x_{n+1}-x_n\|$. Dann gilt

$$(*)\qquad b_n \leqslant b_0\cdot\prod_{\nu=1}^{n}(1-c_\nu)+L\cdot\sum_{\nu=1}^{n}\prod_{\mu=\nu+1}^{n}(1-c_\mu)\,(c_{\nu-1}-c_\nu),$$

wie man durch Induktion leicht sieht.

Wir zeigen nun: $\lim_{n\to\infty}\{b_n\} = 0$. Sei $\varepsilon>0$. Wir wählen $m_0\in\boldsymbol{Z}^+$ mit $c_{m_0}<\varepsilon/3L$ sowie $n_0\in\boldsymbol{N}$ mit $n_0>m_0$ und

$$\prod_{\mu=\nu+1}^{n}(1-c_\mu)<\frac{\varepsilon}{3c_0L}\quad(\nu = 1, 2, \ldots, m_0)\quad\text{und}\quad b_0\cdot\prod_{\nu=1}^{n}(1-c_\nu)<\frac{\varepsilon}{3}\quad\text{für } n\geqslant n_0$$

(möglich, weil

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu = \infty\quad\text{mit}\quad\lim_{n\to\infty}\Big\{\sum_{\nu=k}^{n}(1-c_\nu)\Big\} = 0\quad\text{für } k\in\boldsymbol{Z}^+$$

äquivalent ist). Für $n\geqslant n_0$ ist dann wegen $(*)$

$$\begin{aligned}
b_n &\leqslant \prod_{\nu=1}^{n}(1-c_\nu)b_0+L\cdot\sum_{\nu=1}^{m_0}\prod_{\mu=\nu+1}^{n}(1-c_\mu)(c_{\nu-1}-c_\nu)+\\
&\qquad +L\cdot\sum_{\nu=m_0+1}^{n}\prod_{\mu=\nu+1}^{n}(1-c_\mu)(c_{\nu-1}-c_\nu)\\
&\leqslant\frac{\varepsilon}{3}+L\frac{\varepsilon}{3c_0L}\cdot\sum_{\nu=1}^{m_0}(c_{\nu-1}-c_\nu)+L\cdot\sum_{\nu=m_0+1}^{n}(c_{\nu-1}-c_\nu)\\
&\leqslant\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3c_0}(c_0-c_{m_0})+L(c_{m_0}-c_n)\leqslant\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}\,\frac{c_0}{c_0}+L\cdot c_{m_0}\\
&\leqslant\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Wegen der für $n\in\boldsymbol{N}$ gültigen Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|f(x_n)-x_n\| &= \|f(x_n)-(1-c_{n-1})f(x_{n-1})\| = \|f(x_n)-f(x_{n-1})+c_{n-1}f(x_{n-1})\|\\
&\leqslant\|x_n-x_{n-1}\|+c_{n-1}\|f(x_{n-1})\|\leqslant b_{n-1}+c_{n-1}L
\end{aligned}$$

folgt nun wegen $\lim_{n\to\infty}\{b_n\} = 0$ und $\lim_{n\to\infty}\{c_n\} = 0$, daß auch

$$(**) \qquad \lim_{n\to\infty}\{f(x_n)-x_n\} = 0$$

stattfindet, q.e.d.

Eine einfache Folgerung aus Satz 4 und Lemma 2 ist (vgl. [2]).

Satz 6 (Existenz von Fixpunkten bei kontrahierenden Abbildungen im Hilbert-Raum).

Voraussetzung. *E Hilbert-Raum, $X \subset E$, $X \neq \emptyset$; X abgeschlossen, beschränkt, konvex; $f\colon X \to X$ kontrahierend.*

Behauptung. *f besitzt einen Fixpunkt.*

Beweis. O.B.d.A. $0 \in X$ (durch Translation stets erreichbar). Mit $x_0 \in X$ und $c_n \equiv 1/(n+1)$ definieren wir $\{x_n\} \in X^{\boldsymbol{N}}$ durch

$$x_{n+1}\colon = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot f(x_n), \qquad n \in \boldsymbol{Z}^+.$$

Nach Lemma 2 ist $\{x_n\}$ a.f.r. Wegen der Beschränktheit von $\{x_n\}$ und der schwachen Kompaktheit von X gibt es $y \in X$, welches $\mathfrak{T}_s$-Berührpunkt von $\{x_n\}$ ist. Nach Satz 4 ist $f(y) = y$, q.e.d.

Konstruktiver als Satz 6 ist

Satz 7 (Eindeutig bestimmter Fixpunkt und schwache Konvergenz einer a.f.r. Folge gegen einen solchen).

Voraussetzung. *E Hilbert-Raum, $X \subset E$, $X \neq \emptyset$, X schwach abgeschlossen, $f\colon X \to X$ kontrahierend, f hat höchstens einen Fixpunkt, $\{x_n\} \in X^{\boldsymbol{N}}$ beschränkte a.f.r. Folge.*

Behauptung. *Es gibt genau ein $x \in X$ mit $f(x) = x$, und überdies ist*

$$x = \mathfrak{T}_s\text{-}\lim_{n\to\infty}\{x_n\}.$$

Beweis. Sei $x \in X$ $\mathfrak{T}_s$-Berührpunkt von $\{x_n\}$ (ein solcher existiert wegen der Beschränktheit von $\{x_n\}$ und der Reflexivität von E). Wegen Satz 4 ist $f(x) = x$. Wäre nicht $(\mathfrak{T}_s\text{-}\lim_{n\to\infty}\{x_n\} = x)$, so gäbe es $y \in X$ mit $y \neq x$ und y ist $\mathfrak{T}_s$-Berührpunkt von $\{x_n\}$. Nach Satz 4 ist wieder $f(y) = y$, also nach Voraussetzung $y = x$, Widerspruch, q.e.d.

Satz 7 gestattet eine erste Variante eines in [12] angegebenen Resultats:

Satz 8 (Eindeutig bestimmter Fixpunkt und schwache Konvergenz der gestörten Picard-Iteration gegen einen solchen).

Voraussetzung. *$(E, (,))$ Hilbert-Raum, $X \subset E$, $0, x_0 \in X$; X abgeschlossen, beschränkt, konvex; $f\colon X \to X$ kontrahierend, $\{c_n\} \in (0,1)^{\boldsymbol{Z}^+}$, $\{c_n\}$ monoton fallende Nullfolge, Σc_n divergent, $\{x_n\} \in X^{\boldsymbol{N}}$ definiert durch*

$$x_{n+1}\colon = (1-c_n)f(x_n), \qquad n \in \boldsymbol{Z}^+,$$

f besitzt höchstens einen Fixpunkt.

Behauptung. *f besitzt genau einen Fixpunkt x, und es gilt*

$$x = \mathfrak{T}_s\text{-}\lim_{n\to\infty}\{x_n\}.$$

Beweis. $\{x_n\}$ ist nach Voraussetzung beschränkt und wegen Lemma 2 a.f.r. X ist als kompakte Teilmenge in dem Hausdorff-Raum $(E, \mathfrak{T}_s)$ um so mehr schwach abgeschlossen, q.e.d.

Bemerkung 6. (1) Um Satz 7 anwenden zu können, genügt es ersichtlich, vorauszusetzen: $\{x_n\}$ beschränkt, X schwach abgeschlossen, X 0-sternig [6].

(2) Aus Satz 8 entnimmt man: Bei eindeutig bestimmtem Fixpunkt ist „Konvergenz der gestörten Picard-Iteration" eine vom Anfangswert $x_0 \in X$ unabhängige Aussage. Das gilt allgemein: Für $x_0, x_0' \in X$ und die zugeordneten (mit derselben Folge $\{c_n\}$ gebildeten) gestörten Picard-Iterationen $\{x_n\}$, $\{x_n'\}$ gilt nämlich

$$\|x_n - x_n'\| \leqslant \prod_{\nu=0}^{n-1}(1-c_\nu)\,\|x_0 - x_0'\|,$$

also, $\{x_n\}$ konvergent $\Leftrightarrow$ $\{x_n'\}$ konvergent, und im Falle der Konvergenz gilt $\lim_{n\to\infty}\{x_n\} = \lim_{n\to\infty}\{x_n'\}$.

Höchstens ein Fixpunkt gestattet also die iterative Berechnung durch ein vorgelegtes Verfahren $x_{n+1}\colon = (1-c_n)f(x_n)$.

Im Falle $E\colon = \boldsymbol{R}$ kann man Satz 8 eine aussagenkräftigere Variante an die Seite stellen. Es gilt nämlich

Satz 9 (Abschätzung der Fixpunktanzahl nach unten).

Voraussetzung. *$X \subset \boldsymbol{R}$, $0, x_0 \in X$, X konvex und abgeschlossen, $f\colon X \to X$ kontrahierend, $\{c_n\} \in (0,1)^{\boldsymbol{Z}^+}$, $\{c_n\}$ monoton fallende Nullfolge, $\sum c_n$ divergent, $\{x_n\} \in X^{\boldsymbol{N}}$ definiert durch*

$$x_{n+1}\colon = (1-c_n)f(x_n), \qquad n \in \boldsymbol{Z}^+,\ \{x_n\}$$

beschränkt.

Behauptung. *Für $x \in [\underline{\lim}\{x_n\}, \overline{\lim}\{x_n\}]$ ist $f(x) = x$.*

Beweis. Mit $\{x_n\}$ ist wegen

$$|f(x_n)| \leqslant |f(x_0)| + |f(x_0) - f(x_n)| \leqslant |f(x_0)| + |x_0 - x_n| \leqslant |x_0| + |f(x_0)| + |x_n|$$

auch $\{f(x_n)\}$ beschränkt, so daß aus

$$|x_{n+1} - x_n| \leqslant |f(x_n) - x_n| + c_n|f(x_n)|$$

in Verbindung mit Lemma 2

$$\lim_{n\to\infty}\{x_{n+1} - x_n\} = 0$$

---

[6] d.h. mit $x \in X$ und $\lambda \in [0, 1]$ ist $\lambda x \in X$.

folgt (das kann man auch direkt dem Beweis von Lemma 2 entnehmen). Also ist jedes $x \in [\underline{\lim}\{x_n\}, \overline{\lim}\{x_n\}]$ Berührpunkt von $\{x_n\}$ (und also auch schwacher Berührpunkt von $\{x_n\}$). Satz 4 liefert die Behauptung.

Bemerkung 7. In einem strikt-konvexen linearen normierten Raum ist $\mathrm{Fix}(f)$ konvex, falls X konvex und $f\colon X \to X$ kontrahierend ist (vgl. [11]). Daraus folgt:

(a) In einem strikt-konvexen Raum E, $X \subset E$, $f\colon X \to X$ kontrahierend, gilt (i) $\mathrm{Fix}(f) = \emptyset$ oder (ii) $\mathrm{Fix}(f)$ einpunktig oder (iii) $\mathrm{Fix}(f)$ überabzählbar.

(b) $E\colon = \boldsymbol{R}$; $a, b \in \boldsymbol{R}$; $f\colon [a, b] \to [a, b]$ kontrahierend, $f(a) = a$, $f(b) = b$ impliziert $f = \mathrm{Id}$.

Die Möglichkeit, daß die Beschränktheit eines Iterationsverfahrens allein die Existenz eines Fixpunkts sicherstellt (vgl. Satz 6), besteht sehr allgemein. Es gilt nämlich

Satz 10 (Beschränktheit von Toeplitz-Iterationen und Existenz von Fixpunkten).

Voraussetzung. *$(E, \|\ \|)$ gleichmäßig konvexer Banach-Raum, $X \subset E$, $x_0 \in X$, X abgeschlossen, X konvex, $f\colon X \to X$ kontrahierend, $T\colon = (t_{n\nu})_{n,\nu \in Z^+}$ spaltenfinite Toeplitz-Matrix mit*

$$\text{(i)} \bigwedge_{n,\nu \in \boldsymbol{Z}^+} t_{n\nu} \geqslant 0, \qquad \text{(ii)} \bigwedge_{n,\nu \in \boldsymbol{Z}^+} \nu > n \Rightarrow t_{n\nu} = 0,$$

$$\text{(iii)} \bigwedge_{n \in \boldsymbol{Z}^+} \sum_{\nu=0}^{n} t_{n\nu} = 1,$$

$$\{x_n\} \in X^N \text{ definiert durch } x_{n+1}\colon = \sum_{\nu=0}^{n} t_{n\nu} f(x_\nu), \qquad n \in \boldsymbol{Z}^+.$$

Behauptung. *$\{x_n\}$ beschränkt $\Leftrightarrow$ f besitzt Fixpunkt.*

Beweis. „$\Leftarrow$": Sei $y_0 \in X$ und $f(y_0) = y_0$. Es sei $n \in \boldsymbol{N}$ und $\max\limits_{\nu=1,\ldots,n} \|x_\nu - y_0\| \leqslant \|x_0 - y_0\|$ bereits bewiesen (für $n\colon = 1$ trifft das wegen $\|x_1 - y_0\| \leqslant \|f(x_0) - f(y_0)\| \leqslant \|x_0 - y_0\|$ wirklich zu), so folgt für $n+1$:

$$\|x_{n+1} - y_0\| \leqslant \Big\|\sum_{\nu=0}^{n} t_{n\nu} f(x_\nu) - y_0\Big\| \leqslant \Big\|\sum_{\nu=0}^{n} t_{n\nu}\big(f(x_\nu) - f(y^0)\big)\Big\|$$
$$\leqslant \sum_{\nu=0}^{n} t_{n\nu}\|f(x_\nu) - f(y_0)\| \leqslant \sum_{\nu=0}^{n} t_{n\nu}\|x_\nu - y_0\| \leqslant \sum_{\nu=0}^{n} t_{n\nu}\|x_0 - y_0\|$$
$$\leqslant \|x_0 - y_0\|, \quad \text{also auch} \max_{\nu=1,\ldots,n+1} \|x_\nu - y_0\| \leqslant \|x_0 - y_0\|;$$

m.a.W. $\sup\limits_{n \in \boldsymbol{N}} \|x_n - y_0\| \leqslant \|x_0 - y_0\|$, woraus nun mit

$$\|x_n\| \leqslant \|x_n - y_0\| + \|y_0\| \leqslant \|x_0 - y_0\| + \|y_0\|$$

die Beschränktheit von $\{x_n\}$ folgt. Man bemerkt, daß dieser Teil des Beweises von der Spaltenfinitheit von T keinen Gebrauch macht.

„$\Rightarrow$": Wir setzen

$$d\colon = \sup_{(n,m) \in \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}} \|x_n - x_m\|, \bar{K}_j\colon = \{z \mid z \in E \wedge \|z - x_j\| \leqslant d\},\ j \in \boldsymbol{N},$$

$$X_l\colon = \bigcap_{j \geqslant l} X \cap \bar{K}_j, \qquad l \in \boldsymbol{N},$$

und stellen fest:

(1) $\bigwedge\limits_{l \in \boldsymbol{N}} X_l \subset X$, klar;

(2) $\bigwedge\limits_{l,n \in \boldsymbol{N}} x_n \in X_l$, klar, nach Definition von d;

(3) $\bigwedge\limits_{l \in \boldsymbol{N}} X_l$ konvex, als Durchschnitt von konvexen Mengen;

(4) $\bigwedge\limits_{l \in \boldsymbol{N}} X_l = \bar{X}_l$, als Durchschnitt von abgeschlossenen Mengen;

(5) $\bigwedge\limits_{l \in \boldsymbol{N}} X_l \subset X_{l+1}$, klar nach Definition von X_l;

(6) $\bigwedge\limits_{l \in \boldsymbol{N}} \bigvee\limits_{k_l \in \boldsymbol{N}} f(X_l) \subset X_{k_l}$; sei $x \in f(X_l)$, d.h. $x = f(z)$ mit $z \in X_l$. Dann gilt für $j \geqslant l+1$

$$(*) \qquad \|x - x_j\| \leqslant \|f(z) - \sum_{\nu=0}^{j-1} t_{j-1\nu} f(x_\nu)\| \leqslant \Big\|\sum_{\nu=0}^{j-1} t_{j-1\nu}\big(f(z) - f(x_\nu)\big)\Big\|$$
$$\leqslant \sum_{\nu=0}^{j-1} t_{j-1\nu}\|z - x_\nu\| = \sum_{\nu=0}^{l-1} t_{j-1\nu}\|z - x_\nu\| + \sum_{\nu=l}^{j-1} t_{j-1\nu}\|z - x_\nu\|$$
$$\leqslant \sum_{\nu=0}^{l-1} t_{j-1\nu}\|z - x_\nu\| + d\sum_{\nu=1}^{j-1} t_{j-1\nu}$$
$$\leqslant \sum_{\nu=0}^{l-1} t_{j-1\nu}\|z - x_\nu\| + d\sum_{\nu=1}^{j-1} t_{j-1\nu} \leqslant \sum_{\nu=0}^{l-1} t_{j-1\nu}\|z - x_\nu\| + d.$$

Wegen der Spaltenfinitheit von T gibt es $k_l \in \boldsymbol{N}$, $k_l \geqslant l+1$, mit $t_{j-1\nu} = 0$ für $\nu = 0, 1, 2, \ldots, l-1$ und $j \geqslant k_l$. Für alle $j \geqslant k_l$ ist dann wegen $(*)$ $\|x - x_j\| \leqslant d$, d.h. $x \in X_{k_l}$, wie behauptet.

Wir definieren nun weiter $\hat{X}\colon = \overline{\bigcup\limits_{l=1}^{\infty} X_l}$ und stellen fest:

(1′) $\hat{X} \neq \emptyset$, wegen $X_l \subset \hat{X}$ und $X_l \neq \emptyset$ für $l \in \boldsymbol{N}$;

(2′) $\hat{X} \subset X$, wegen $X_l \subset X$ und $X = \bar{X}$;

(3′) $\hat{X}$ konvex, wegen (3) und (5);

(4′) $\hat{X}$ beschränkt; zu $u, v \in \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} X_l$ gibt es nämlich wegen (5), $l_0 \in \boldsymbol{N}$ mit $u, v \in X_{l_0}$, d.h. es ist sowohl $\|u - x_{l_0}\| \leqslant d$ als auch $\|v - x_{l_0}\| \leqslant d$, also insgesamt $\|u-v\| \leqslant 2d$. Es ist $\operatorname{Diam}\left(\bigcup_{l=1}^{\infty} X_l\right) \leqslant 2d$, also auch $\operatorname{Diam}(\hat{X}) \leqslant 2d$;

(5') $f(\hat{X}) \subset \hat{X}$; wegen (6) gilt nämlich zunächst

$$f\left(\bigcup_{l=1}^{\infty} X_l\right) \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} f(X_l) \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} X_{k_l} \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} X_l$$

und dann wegen (2) und der Stetigkeit von f

$$f(\hat{X}) = f\left(\overline{\bigcup_{l=1}^{\infty} X_l}\right) \subset \overline{f\left(\bigcup_{l=1}^{\infty} X_l\right)} \subset \overline{\bigcup_{l=1}^{\infty} X_l} = \hat{X}.$$

Nach Browder (vgl. [1], [6]) gibt es $x \in \hat{X} \subset X$ mit $f(x) = x$, q.e.d.

Bemerkung 8. (1) Satz 10 besagt insbesondere: Die Picard-Folge $\{f^n(x)\}$ ist für beliebige $x \in X$ oder kein $x \in X$ beschränkt, und im Falle der Beschränktheit besitzt f einen Fixpunkt. Das Konvergenzverhalten der Picard-Iteration kann von dem der gestörten Picard-Iteration $\{x_n\}$ verschieden sein ($E:=\boldsymbol{R}$, $X:=[-1,1]$, $f(x):=-x$), jedoch gilt nach Satz 10: $\bigwedge_{x \in X} \{f^n(x)\}$ beschränkt $\Leftrightarrow$ $\{x_n\}$ (Anfangswert x) beschränkt.

(2) Besitzt f keinen Fixpunkt, so besagt Satz 10, daß $\{f^n(x_0)\}$ für kein $x_0 \in X$ beschränkt ist. Im Falle $\dim(E) < \infty$ kann man sogar sagen: Für jedes $x_0 \in X$ ist $\lim_{n\to\infty} \{f^n(x_0)\} = \infty$ (vgl. [10]).

Für starke Konvergenz erhält man als weitere Variante eines in [12] ausgesprochenen Resultats

Satz 11 (Approximation von Fixpunkten schließlich kompakter Kontraktionen durch a.f.r. Folgen).

Voraussetzung. $(E, \|\ \|)$ *linearer normierter Raum*, $X \subset E$; $x_0, 0 \in X$; *X beschränkt, abgeschlossen, 0-sternig; $k \in \boldsymbol{N}$, $f\colon X \to X$ kontrahierend, f hat höchstens einen Fixpunkt, f^k kompakt, $\{c_n\} \in (0,1)^{\boldsymbol{Z}^+}$, $\lim_{n\to\infty}\{c_n\} = 0$, $\{c_n\}$ monoton, $\sum c_n$ divergent, $\{x_n\} \in X^{\boldsymbol{N}}$ definiert durch*

$$x_{n+1} := (1-c_n) f(x_n), \qquad n \in \boldsymbol{Z}^+.$$

Behauptung. *Es gibt genau ein $x \in X$ mit $f(x) = x$, und überdies ist*

$$x = \lim_{n\to\infty} \{x_n\}.$$

Beweis. Nach Lemma 2 ist $\{x_n\}$ a.f.r. Ferner ist f als kontrahierende Abbildung um so mehr gleichmäßig stetig, womit nach Satz 1, Bemerkung 2, (3) alles bewiesen ist.

Bemerkung 9. (1) Für $k:=1$ und $f:=\alpha g + (1-\alpha)\,\mathrm{Id}$, $0<\alpha<1$, g kontrahierend, ergibt sich ein bekanntes Resultat (vgl. [12]).

(2) Wegen

$$\|f^k(x)-x\| \leqslant \sum_{\nu=0}^{k-1} \|f^{k-\nu-1}(f(x)) - f^{k-\nu-1}(x)\| \leqslant \sum_{\nu=0}^{k-1} \|f(x)-x\| \leqslant k\|f(x)-x\|$$

ist mit einer a.f.r. Folge $\{x_n\}$ infolge

$$\lim_{n\to\infty} \{f^k(x_n) - x_n\} = 0$$

jeder Berührpunkt von $\{f^k(x_n)\}$ Fixpunkt von f. Insbesondere ist bei kompaktem f^k $\operatorname{Fix}(f) \neq \emptyset$. Das liefert einen unmittelbaren Beweis von Satz 11.

Für starke Konvergenz von a.f.r. Folgen formulieren wir noch

Satz 12 (Approximation von Fixpunkten durch stark konvergente x-monotone a.f.r. Folgen).

Voraussetzung. $(E, \|\ \|)$ *linearer normierter Raum*, $X \subset E$, $X \neq \emptyset$, $X = \bar{X}$, $f\colon X \to X$, $\{x_n\} \in X^{\boldsymbol{N}}$ *a.f.r. mit*

(i) $\operatorname{Fix}(f) \neq \emptyset$.

(ii) *Für $u \in \operatorname{Fix}(f)$ fällt $\{\|x_n - u\|\}$ monoton.*

(iii) *Für $A \subset X$, $A = \bar{A}$, A beschränkt, gilt: Aus $f(x) \neq x$ für $x \in A$ folgt $\inf_{x \in A} \|f(x)-x\| > 0$.*

Behauptung. *Es gibt $z \in X$ mit $f(z) = z$ und $\lim_{n\to\infty}\{x_n\} = z$.*

Beweis. Sei $u \in \operatorname{Fix}(f)$. Dann ist wegen $\|x_n\| \leqslant \|x_n - u\| + \|u\| \leqslant \|x_1 - u\| + \|u\|$, $\{x_n\}$ beschränkt. Wir setzen $A := \overline{\{x_n\}}$. Wegen $\lim_{n\to\infty}\{(\mathrm{Id}-f)x_n\} = \lim_{n\to\infty}\{x_n - f(x_n)\} = 0$ ist $\inf_{x\in A}\|f(x)-x\| = 0$, d.h. es gibt wegen (iii) $z \in A$ mit $f(z) = z$. Wir wollen eine Teilfolge $\{x_{k_n}\}$ von $\{x_n\}$ mit $\lim_{n\to\infty}\{x_{k_n}\} = z$ konstruieren. Man hat folgende Alternative:

1. Es gibt $n_0 \in \boldsymbol{N}$ mit $x_{n_0} = z$. Dann ist für $n \geqslant n_0$ wegen (ii) $\|x_n - z\| \leqslant \|x_{n_0} - z\| = 0$, d.h. $x_n = z$ für $n \geqslant n_0$. Wir können $k_n \equiv n$ setzen.

2. Für $n \in \boldsymbol{N}$ ist $x_n \neq z$. Dann gibt es $n_1 \in \boldsymbol{N}$ mit $\|x_{n_1} - z\| \leqslant 1$. Wir setzen $k_1 := n_1$. Ist $n \geqslant 1$ und $k_1, \ldots, k_n$ gewählt mit $k_1 < k_2 < \ldots < k_n$ und $\|x_{k_i} - z\| \leqslant 1/i$ $(i = 1, \ldots, n)$, so gibt es eine abgeschlossene Kugel $K_r(z)$ um z mit Radius $r \leqslant 1/(n+1)$ und $x_i \notin K_r(z)$ für $i = 1, 2, \ldots, k_n$ (Hausdorff). Andererseits gibt es $n_2 \in \boldsymbol{N}$ mit $x_{n_2} \in K_r(z)$. Dann ist $n_2 > k_n$. Wir setzen $k_{n+1} := n_2$. Es ist $k_{n+1} > k_n$ und $\|x_{k_{n+1}} - z\| \leqslant 1/(n+1)$. Natürlich ist $\lim_{n\to\infty}\{x_{k_n}\} = z$. Wegen (ii) und $\lim_{n\to\infty}\{\|x_{k_n} - z\|\} = 0$ folgt $\lim_{n\to\infty}\{\|x_n - z\|\} = 0$, d.h. $\lim_{n\to\infty}\{x_n\} = z$, q.e.d.

Um die Aussage (iii) von Satz 12 mit anderen, in der Literatur bekannten Aussagen in Verbindung zu bringen, formulieren wir für nichtleeres abgeschlossenes $X \subset E$ und kontrahierendes $f\colon X \to X$ Eigenschaften $(E_1)-(E_4)$ wie folgt:

(E_1) Für $A \subset X$, $A = \bar{A}$, A beschränkt, gilt: Ist $f(x) \neq x$ für $x \in A$, so $\inf_{x\in A} \|f(x)-x\| > 0$.

(E_2) Für $B \subset X$, $B = \bar{B}$, B beschränkt, ist $(\mathrm{Id}-f)(B)$ abgeschlossen.

(E_3) Es gibt $k \in N$ mit f^k kompakt.

(E_4) f kompakt.

Wir behaupten:

(i) $(E_4) \Rightarrow (E_3)$; (ii) $(E_4) \Rightarrow (E_2)$;

(iii) $(E_2) \Rightarrow (E_1)$; (iv) $(E_3) \Rightarrow (E_1)$.

Beweis. Zu (i). Trivial.

Zu (ii). Sei $z \in \overline{(\mathrm{Id}-f)(B)}$, also $z = \lim_{n\to\infty} \{(\mathrm{Id}-f)(z_n)\}$, $z_n \in B$. Es gibt $u \in X$ und Teilfolge $\{z_{k_n}\}$ von $\{z_n\}$ mit $\lim_{n\to\infty} \{f(z_{k_n})\} = u$. Es folgt die Konvergenz von $\{z_{k_n}\}$ selbst. Wir setzen $v\colon = \lim_{n\to\infty} \{z_{k_n}\}$ und haben $v \in B$. Schließlich ist auch $(\mathrm{Id}-f)(v) = (\mathrm{Id}-f)(\lim_{n\to\infty} \{z_{k_n}\}) = \lim_{n\to\infty} \{(\mathrm{Id}-f)(z_{k_n})\} = z$, d.h. $z \in (\mathrm{Id}-f)(B)$.

Zu (iii). Ist $f(x) \neq x$ für $x \in A$, aber $\inf_{x\in A} \|f(x)-x\| = 0$, so gibt es $\{x_n\} \in A^N$ mit $\lim_{n\to\infty} \{(\mathrm{Id}-f)(x_n)\} = 0$, d.h. $0 \in \overline{(\mathrm{Id}-f)(A)}$, also $0 \in (\mathrm{Id}-f)(A)$, d.h. es gibt $z \in A$ mit $(\mathrm{Id}-f)(z) = 0$, Widerspruch.

Zu (iv). Sei $f(x) \neq x$ für $x \in A$ und $\inf_{x\in A} \|f(x)-x\| = 0$. Man wähle $\{x_n\} \in A^N$ mit $\lim_{n\to\infty} \{f(x_n)-x_n\} = 0$; $\{x_n\}$ ist a.f.r. Gemäß Bemerkung 9,(2) ist $\mathrm{Fix}(f) \cap A \neq \emptyset$, Widerspruch.

Bemerkung 10. Satz 12 mit (E_4) und spezieller Folge $\{x_n\}$ findet sich in [11]. Satz 12 mit (E_1) und spezieller Folge $\{x_n\}$ (Toeplitz-Iteration) findet sich in [8]. Satz 12 mit (E_2) und spezieller Folge $\{x_n\}$ (Picard-Iteration) findet sich in [1].

Literaturverzeichnis

[1] F. E. Browder und W. V. Petryshyn, *The solution by iteration of non-linear functional equations in Banach spaces*, Bull. Am. Math. Soc. 72 (1966), s. 571-575.

[2] — *Construction of fixed points of non-linear mappings in Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl. 20 (1967), s. 197-228.

[3] J. Dieudonné, *Sur la convergence des approximations successives*, Bull. Sci. Math. 69 (1945), s. 62-72.

[4] G. Köthe, *Topologische lineare Räume I*, Springer-Verlag Berlin-Göttingen-Heidelberg 1960.

[5] Z. Opial, *Weak convergence of the sequence of successive approximations for non-expansive mappings*, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), s. 591-597.

[6] J. Reinermann, *Über Fixpunkte kontrahierender Abbildungen in uniformen Räumen und deren Darstellung durch konvergente Iterationsverfahren*, Schriften der Gesellschaft dür Mathematik und Datenverarbeitung, Bonn 1968.

[7] — *Über Fixpunkte kontrahierender Abbildungen und schwach konvergente Toeplitz-Verfahren*, Archiv. der Math. 20 (1969), s. 59-64.

[8] — *Über Toeplitzsche Iterationsverfahren und einige ihrer Anwendungen in der konstruktiven Fixpunkttheorie*, Studia Math. 32 (1969), s. 209-227.

[9] — *Fixpunktsätze für uniforme Räume*, Math. Nachr. 43 (1970), s. 223-229.

[10] — *Über das Verfahren der sukzessiven Näherung in der Fixpunkttheorie kontrahierender Abbildungen*. Habilitationschrift, Aachen 1970.

[11] H. Schaefer, *Über die Methode der sukzessiver Approximationen*, Jahr. d. Deutsch. Math. Ver. 59 (1957), s. 131-140.

[12] L. Schmetterer, *Über ein Iterationsverfahren*, Arch. d. Math. 19 (1968), s. 195-200.

[13] K. Zeller, *Theorie der Limitierungsverfahren*, Springer-Verlag Berlin-Göttingen-Heidelberg 1958.

Reçu par la Rédaction le 6. 5. 1969