§ 6. Application du théorème B. Fin de la démonstration du théorème C et démonstration du théorème E. Les résultats restant à prouver sont traduction immédiate des trois résultats connus suivants, concernant la suite c_n. (Il suffit d'utiliser que, pour tout $u \in Z$,

$$\left|E^+\big((n+u)\alpha; n\big) - E^+(n\alpha; n-1)\right|$$

est majorée par $|u|+1$.)

1) Résultat du à A. Ostrowski [9]. La suite c_n n'est pas bornée.

2) Résultat du à V. T. Sos [11]. Il existe des α pour lesquels la suite c_n est minorée [resp. majorée].

3) Résultat du à Hardy and Littlewood [4]. Quelle que soit la suite φ qui tend monotonement vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, alors il existe des α tels que

$$\limsup_{n\to\infty} |c_n|\varphi(n)/n = +\infty.$$

Bibliographie

[1] P. Bohl, *Über ein in der Theorie der säkularen Störungen vorkommendes Problem*, Journ. Reine Angew. Math. 135 (1909), p. 189–283.

[2] J. Cigler and G. Helmberg, Jahresbericht der Deutschen Matematiker Vereinigung (1961).

[3] P. Erdös, *Problems and results on diophantine approximations*, Compositio mathematica 16 (1964), p. 52–65.

[4] G. H. Hardy and J. Littlewood, *The lattice points of a right-angled triangle*, Proc. London Math. Soc. (3), 20 (1922), p. 15–36 (IX–7. 8. 9).

[5] H. Kesten, *On a conjecture of Erdös and Szüsz related to uniform distribution* mod 1, Acta Arith. 12 (1966), p. 193–212.

[6] J. F. Koksma, *Diophantische Approximationen Ergebnisse des mathematik*, Chelsea Publishing.

[7] J. Lesca, *Thèse de troisième cycle*, Grenoble.

[8] — *Démonstration d'une conjecture de P. Erdös*, Acta Arith. 14 (1968), p. 425–427.

[9] A. Ostrowski, *Bemerkungen zur Theorie der diophantischen Approximationen*, Abhandlungen der mathematischen Seminar Hamburg, 1 (1922), p. 77–98.

[10] F. Roth, *On irregularities of distribution*, Mathematika 1 (1954), p. 73–79.

[11] V. T. Sos, *On the theory of diophantine approximations I*, Acta Mathematica Ac. Sci. Hungaricae VIII, 34, (1957), p. 461–472.

[12] T. Van Aardenne-Ehrenfest, *On the impossibility of a just distribution*, Indagationes Math. 11 (1949), p. 264–269.

UNIVERSITÉ DE BORDEAUX
DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, Talence, France

Reçu le 18. 1. 1971 (135)

ACTA ARITHMETICA
XX (1972)

Fonctions zêta p-adiques des corps de nombres abeliens réels

par

YVETTE AMICE (Paris) et JEAN FRESNEL (Bordeaux)

0. INTRODUCTION

Soit K un corps de nombres algébriques, la fonction zêta du corps K est définie par:

$$Z(s, K) = \sum_{\mathfrak{a}} N(\mathfrak{a})^{-s} = \prod_{\mathfrak{q}} \big(1 - N(\mathfrak{q})^{-s}\big)^{-1} \quad \text{pour} \quad \mathrm{Re}(s) > 1$$

où la somme est étendue à tous les idéaux entiers non nuls de K et où le produit est étendu à tous les idéaux premiers non nuls de K.

Supposons désormais que K soit une extension abélienne réelle finie du corps $\boldsymbol{Q}$ des nombres rationnels. Soit $\mathfrak{X}$ l'ensemble des caractères primitifs du corps K. A chaque $\chi \in \mathfrak{X}$ on associe la fonction $L(\cdot, \chi)$ définie par:

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s} = \prod_{q} \big(1 - \chi(q) q^{-s}\big)^{-1} \quad \text{pour} \quad \mathrm{Re}(s) > 1$$

où le produit est étendu à tous les nombres premiers. On peut alors factoriser la fonction zêta sous la forme:

$$Z(s, K) = \prod_{\chi \in \mathfrak{X}} L(s, \chi).$$

Soit $\boldsymbol{Z}$ l'anneau des entiers rationnels, $\boldsymbol{Q}$ le corps des rationnels, $\boldsymbol{Q}_p$ le corps p-adique élémentaire, $\boldsymbol{Z}_p$ son anneau de valuation, $\boldsymbol{C}_p$ le complété d'une clôture algébrique de $\boldsymbol{Q}_p$ muni de sa valeur absolue $|\cdot|_p$.

Si χ est un caractère primitif de conducteur f, *la fonction L p-adique* $L_p(\cdot, \chi)$ définie par Kubota et Leopoldt [10] est l'application continue de $\boldsymbol{Z}_p$ dans $\boldsymbol{Q}_p(\chi) = \boldsymbol{Q}_p\big(\chi(1), \chi(2), \ldots, \chi(f)\big)$ telle que:

$$L_p(1-m, \chi) = \big(1 - \chi(p) p^{m-1}\big) L(1-m, \chi)$$

pour m entier positif et $m \equiv 0 \bmod (p-1)$ si $p \neq 2$ (resp. $m \equiv 0 \bmod 2$ si $p = 2$), ceci a bien un sens puisque

$$L(1-m, \chi) = -\frac{B^m(\chi)}{m}$$

où $B^m(\chi)$ est *le* m-ième *nombre de Bernoulli* ([4],[11]) relatif au caractère χ, ce nombre est algébrique et appartient au corps $Q(\chi)$.

Pour construire ces fonctions, il existe jusqu'ici trois méthodes [10], [4], [8].

Kubota et Leopoldt [10] utilisent le fait que:

$$B^m(\chi) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{p^r f} \sum_{a=1}^{p^r f} \chi(a) a^m \quad \text{(limite } p\text{-adique)}.$$

Ils considèrent une forme linéaire continue $\mathfrak{M}_\chi$ sur un certain espace de fonctions et montrent ensuite que:

$$L_p(1-s, \chi) = -\frac{1}{s} \mathfrak{M}_\chi(x \to x^s).$$

La seconde méthode [4] revient à examiner la fonction:

$$(1-m) \to -\frac{B^m(\chi)}{m}$$

définie pour m entier positif et $m \equiv 0 \bmod (p-1)$ si $p \neq 2$ (resp. $m \equiv 0 \bmod 2$ si $p = 2$) et à montrer en utilisant un théorème d'interpolation p-adique [1] qu'elle se prolonge à $\boldsymbol{Z}_p$ en une fonction continue. On montre en fait que le problème est équivalent à celui de l'existence de congruences du type Kummer pour les nombres de Bernoulli.

Iwasawa [8] construit ces fonctions par une méthode différente. Il les obtient à partir d'un quotient de séries entières en T en remplaçant cette indéterminée par $(1+q)^s - 1$, q étant un entier déterminé par le caractère χ. Cette définition lui permet de mettre en évidence une relation entre les fonctions L p-adiques et la p-composante du groupe des classes d'idéaux de la $\boldsymbol{Z}_p$-extension fondamentale au-dessus du corps K.

L'objet de ce travail est de donner une construction des fonctions L_p qui rappelle l'analogie avec les fonctions L définies par:

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s}.$$

L'idée de départ est la suivante. On a

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s} \qquad \text{pour } \operatorname{Re}(s) > 1,$$

d'autre part on sait que

$$L(1-m, \chi) = -\frac{B^m(\chi)}{m} \qquad \text{pour } m \text{ entier positif}.$$

Pour la même définition de m on considère la série de Taylor suivante:

$$H^\chi(m, X) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^m \frac{X^n}{n} \tag{1}$$

cette série est une fraction rationnelle en X qui pour $\chi \neq \varepsilon$ n'a pas de pôle en 1. On montre même que

$$H^\chi(m, 1) = -\frac{B^m(\chi)}{m} = L(1-m, \chi).$$

On peut donc être tenté de considérer la fonction $m \mapsto H_p^\chi(m, 1)$ pour m entier positif et $m \equiv 0 \bmod (p-1)$ si $p \neq 2$. On sait tout d'abord que si $p \nmid n$ la fonction $m \mapsto n^m$ définie pour m entier positif et $m \equiv 0 \bmod (p-1)$ se prolonge de façon unique en une fonction continue sur $\boldsymbol{Z}_p$. Par suite la série

$$H_p^\chi(m, X) = \sum_{\substack{n=1 \\ p\nmid n}}^{\infty} \chi(n) n^m \frac{X^n}{n} \tag{1$_p$}$$

définie pour $m \equiv 0 \bmod (p-1)$ et $|X| < 1$ se prolonge à $\boldsymbol{Z}_p$. Il resterait donc à démontrer que pour tout $m \in \boldsymbol{Z}_p$ la fonction $X \mapsto H_p^\chi(m, X)$ se prolonge analytiquement au point 1 et notant par $H_p^\chi(m, 1)$ ce prolongement il suffirait finalement de vérifier que la fonction $m \mapsto H_p^\chi(m, 1)$ est continue sur $\boldsymbol{Z}_p$. Sachant de plus que

$$H^\chi(m, 1) = -\frac{B^m(\chi)}{m} \qquad \text{pour } m \text{ entier positif}$$

il est alors aisé de vérifier que

$$H_p^\chi(m, 1) = -\left(1 - \chi(p) p^{m-1}\right) \frac{B^m(\chi)}{m}.$$

On pourrait alors conclure que

$$L_p(1-m, \chi) = H_p^\chi(m, 1) \qquad \text{pour tout } m \in \boldsymbol{Z}_p.$$

Malheureusement le problème est un peu plus difficile parce que la série $X \mapsto H_p^\chi(m, X)$ n'est pas prolongeable analytiquement au point 1, lorsque le conducteur du caractère χ est p (ou lorsque $\chi = \varepsilon$). C'est pourquoi nous sommes obligés d'introduire une série un peu plus compli-

quée. Soit $f = f(\chi)$ le conducteur du caractère χ, soit c un entier tel que $(c, pf) = 1$ et $\chi(c) \neq 1$. On pose alors

$$(2_p) \qquad K_p^\chi(m, X) = \big(1-\chi(c)c^m\big)^{-1}\big(H_p^\chi(m, X) - \chi(c)c^m H_p^\chi(m, X^c)\big)$$

(bien entendu dans le cas où $\chi = \varepsilon$ cette série n'est pas définie pour $m = 0$).

On peut tout d'abord remarquer que pour m entier positif, $K_p^\chi(m, X)$ est une fraction rationnelle en X sans pôle en 1 et que (proposition 5)

$$K_p^\chi(m, 1) = -\big(1-\chi(p)p^{m-1}\big)\frac{B^m(\chi)}{m}.$$

Pour montrer que $X \mapsto K_p^\chi(m, X)$ est prolongeable analytiquement au point 1 on procède en plusieurs étapes. Si ξ est une racine primitive c-ième de l'unité on a (lemme 1)

$$K_p^\chi(m, X) = -\sum_{i=1}^{c-1} H_p^\chi(m, \xi^i X).$$

On est alors ramené à prolonger $H_p^\chi(m, X)$ au point ξ^i pour $1 \leqslant i \leqslant c-1$. On décompose ensuite $H_p^\chi(m, X)$ en somme de séries plus simples. Soit toujours $f = f(\chi)$ le conducteur du caractère χ, $\tau(\chi)$ sa somme de Gauss, Z_f une racine primitive f-ième de l'unité, on a

$$\chi(n) = \frac{\tau(\chi)}{f(\chi)}\sum_{a=1}^{f}\bar{\chi}(a)Z_f^{an}.$$

Ainsi la série $H_p^\chi(m, X)$ se décompose sous la forme

$$H_p^\chi(m, X) = \frac{\tau(\chi)}{f(\chi)}\sum_{a=1}^{f}\bar{\chi}(a)\Big(\sum_{\substack{n=1\\ p\nmid n}}^{\infty} n^m (Z_f^a X)^n/n\Big).$$

Si l'on pose

$$U_p(m, X) = \sum_{\substack{n=1\\ p\nmid n}}^{\infty} n^m \frac{X^n}{n},$$

on voit qu'il suffit de prolonger $X \to U_p(m, X)$ au point $Z_f^a \xi^i$. Pour ce faire on montre que (proposition 1) $U_p(m, X)$ est développable en série de Laurent sous la forme

$$U_p(m, X) = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(m)(1-X)^{-n} \quad \text{avec } |\lambda_n(m)| \to 0.$$

Cette série converge donc pour $|1-X| \geqslant 1$. D'autre part étant donné le choix de c on a $|1-Z_f^a\xi^i| = 1$, par suite la série $X \mapsto U_p(m, X)$ est analytiquement prolongeable au point $Z_f^a\xi^i$ et si $U_p(m, Z_f^a\xi^i)$ désigne ce prolongement on a

$$U_p(m, Z_f^a\xi^i) = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(m)(1-Z_f^a\xi^i)^{-n}.$$

On montre de plus (proposition 2) que $m \mapsto \lambda_n(m)$ est une fonction continue sur $\boldsymbol{Z}_p$ (même analytique) et que la suite $\big(\lambda_n(\cdot)\big)_n$ converge uniformément vers 0. Cela suffit donc pour conclure de montrer que $X \mapsto K_p^\chi(m, X)$ est analytiquement prolongeable en 1 (proposition 3) et que si $K_p^\chi(m, 1)$ désigne ce prolongement la fonction $m \mapsto K_p^\chi(m, 1)$ est analytique (proposition 4) sur $\boldsymbol{Z}_p$ (et même sur un disque de rayon plus grand que 1) et que (théorèmes 3 et 4)

$$L_p(1-m, \chi) = K_p^\chi(m, 1).$$

Pour démontrer que ces différentes fonctions sont prolongeables analytiquement nous utilisons un critère de prolongeabilité qui permet de caractériser, par des propriétés de la suite des coefficients, les séries qui sont série de Taylor à l'origine de fonctions sommes de certaines séries de Laurent. Le § 3 est consacré à la démonstration de ces résultats et d'autres plus généraux.

L'expression obtenue pour les fonctions L_p nous permet de démontrer dans le § 2 un analogue p-adique de la formule des résidus pour le nombre de classes d'idéaux d'un corps de nombres abélien réel (théorème 6). Cette formule, d'une part, généralise des résultats connus [2], [13], [14] en ce sens qu'elle transforme des congruences modulo p en des égalités de nombres p-adiques [5] et d'autre part permet des calculs explicites de nombres de classes d'idéaux [3].

1. CONSTRUCTION DES FONCTIONS $L_p(\cdot, \chi)$

Ainsi que nous l'avons exposé dans l'introduction nous définirons la fonction $(m, X) \mapsto U_p(m, X)$ par

$$U_p(m, X) = \sum_{\substack{n=1\\ p\nmid n}}^{\infty} n^m \frac{X^n}{n}$$

pour $|X|_p < 1$ et pour $m \equiv 0 \bmod (p-1)$ si $p \neq 2$ (resp. $m \equiv 0 \bmod 2$ si $p = 2$). Désormais la locution précédente sera abrégée par $m \equiv 0 \bmod (p-1)$ (resp. $m \equiv 0 \bmod 2$). L'introduction d'un caractère θ_p défini sur $\boldsymbol{Z}_p$ permet d'écrire

$$n^m = \left(\frac{n}{\theta_p(n)}\right)^m$$

pour $m \equiv 0 \bmod (p-1)$ (resp. $m \equiv 0 \bmod 2$). D'autre part la fonction $m \mapsto \left(\frac{n}{\theta_p(n)}\right)^m$ se prolonge en une fonction analytique définie sur un disque D_1 contenant $\mathbf{Z}_p$ (§ 1.2). Notant toujours par $U_p(\cdot, \cdot)$ la fonction définie par

$$U_p(m, X) = \sum_{\substack{n=1 \\ p \nmid n}}^{\infty} \left(\frac{n}{\theta_p(n)}\right)^m \frac{X^n}{n}$$

pour $m \in D_1$ et $|X|_p < 1$, on montre dans un second temps (proposition 1) que la fonction $X \mapsto U_p(m, X)$ est développable en série de Laurent sous la forme:

$$U_p(m, X) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(m)(1-X)^{-k} \quad \text{pour } |1-X|_p \geqslant 1,$$

et que finalement pour $|X-1|_p \geqslant 1$ la fonction $m \to U_p(m, X)$ est analytique sur D_1 (proposition 2).

On définit alors successivement les fonctions H_p^χ et K_p^χ de la façon suivante:

$$H_p^\chi(m, X) = \frac{\tau(\chi)}{f(\chi)} \sum_{a=1}^{f} \overline{\chi}(a)\, U_p(m, Z_f^a X),$$

où $f(\chi) = f$ est le conducteur du caractère χ, Z_f une racine primitive f-ième de l'unité et $\tau(\chi)$ la somme de Gauss associée à χ et Z_f. De plus c étant un entier satisfaisant certaines conditions, on pose

$$K_p^\chi(m, X) = \left(1 - \chi(c)\left(\frac{c}{\theta_p(c)}\right)^m\right)^{-1} \left\{H_p^\chi(m, X) - \chi(c)\left(\frac{c}{\theta_p(c)}\right)^m H_p^\chi(m, X^c)\right\}.$$

On démontre que pour $m \in D_1$ la fonction $X \mapsto K_p^\chi(m, X)$ est analytique (proposition 3) (c'est-à-dire développable en somme de séries de Laurent). On montre ensuite que

$$K_p^\chi(m, 1) = -\left(1 - \chi(p)p^{m-1}\right) \frac{B^m(\chi)}{m}$$

pour $m > 0$ et $m \equiv 0 \bmod (p-1)$ (resp. $m \equiv 0 \bmod 2$). Il en résulte que

$$L_p(1-m, \chi) = K_p^\chi(m, 1).$$

1.1. Un théorème de prolongement analytique. Pour prolonger analytiquement les fonctions $K_p^\chi(m, X)$ au point $X = 1$ nous utilisons les résultats ci-dessous.

THÉORÈME 1. *Pour que la série formelle $\sum_{n \geqslant 0} a_n X^n$ soit la série de Taylor à l'origine de la somme d'une série de Laurent*

$$f(X) = \sum_{k \geqslant 1} \frac{\lambda_k}{(1-X)^k} \qquad (\lambda_k \to 0)$$

convergente pour $|1-X|_p \geqslant 1$ il faut et il suffit que la fonction $n \to a_n$ soit prolongeable en une fonction continue sur $\mathbf{Z}_p$. S'il en est ainsi on a de plus

$$\|f\| = \operatorname*{Sup}_{|x-1|_p \geqslant 1} |f(x)|_p = \operatorname*{Sup}_{k \geqslant 1} |\lambda_k|_p = \operatorname*{Sup}_{n \geqslant 0} |a_n|_p.$$

Les suites a_n et λ_k sont liées par

$$a_n = \sum_{k \geqslant 1} \lambda_k \binom{n+k-1}{k-1}. \tag{3}$$

Si $x \mapsto a(x)$ désigne le prolongement continu de $n \mapsto a_n$, on a

$$\lambda_k = \sum_{i=1}^{k} a(-i)(-1)^{i-1} \binom{k-1}{i-1}. \tag{4}$$

On voit que ce résultat permet non seulement de caractériser les séries de Taylor à l'origine des sommes de séries de Laurent à l'aide de la fonction coefficient $n \mapsto a_n$, mais aussi de calculer explicitement les coefficients de la série de Laurent. De plus, si la fonction coefficient $a(x)$ a un module de continuité suffissamment bon, on en déduit des propriétés de décroissance de la suite $|\lambda_k|$. Plus précisément, nous utiliserons pour les fonctions L_p le théorème 2 ci-dessous, qui est l'énoncé dans un cas particulier du théorème 2 bis. Le corollaire du théorème 1 (§ 3) est aussi un exemple de ce type de résultats.

THÉORÈME 2. *Soit a une fonction continue sur $\mathbf{Z}_p$ à valeurs dans $\mathbf{Z}_p$. Suppo-sons qu'il existe un entier u tel que pour tout entier t positif et tous x et y dans $\mathbf{Z}_p$ on ait*

$$|x-y|_p \leqslant |p|_p^t \Rightarrow |a(x)-a(y)|_p \leqslant |p|_p^{t-u}.$$

Les coefficients λ_k de la série d'interpolation de a sur les entiers négatifs définis par les relations (3) et (4) satisfont à

$$|\lambda_k|_p \leqslant |p|_p^t \quad \text{pour } k \geqslant p^{t+u}.$$

Les démonstrations des théorèmes 1 et 2 bis seront données au § 3. Nous allons maintenant les appliquer à la construction des fonctions L_p.

1.2. Rappels sur le caractère θ_p. Introduisons d'abord un caractère θ_p qui nous permettra de prolonger la fonction $m \mapsto n^m$ définie pour $m \equiv 0 \bmod (p-1)$ (resp. $m \equiv 0 \bmod 2$) et $p \nmid n$, en une fonction analytique de type exponentiel définie sur un disque de rayon supérieur à 1.

Soit p un nombre premier, $p \neq 2$, nous noterons θ_p l'application de $\boldsymbol{Z}_p$ dans $\boldsymbol{Z}_p$ définie par

$$\theta_p(a) = \lim_{n\to\infty} a^{p^n} \quad \text{(limite } p\text{-adique)}$$

ou ce qui est équivalent par

$$\theta_p(a)^p = \theta_p(a) \quad \text{et} \quad \theta_p(a) \equiv a \bmod p\boldsymbol{Z}_p.$$

Pour $p = 2$ nous poserons

$$\theta_2(a) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a \in 2\boldsymbol{Z}_2, \\ 1 & \text{si} \quad a \equiv 1 \bmod 4\boldsymbol{Z}_2, \\ -1 & \text{si} \quad a \equiv -1 \bmod 4\boldsymbol{Z}_2. \end{cases}$$

Soit n un entier rationnel, nous conviendrons de noter θ_p^n l'application définie par

$$\theta_p^n(a) = \begin{cases} (\theta_p(a))^n & \text{si} \quad \theta_p(a) \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad \theta_p(a) = 0. \end{cases}$$

En particulier nous noterons $\varepsilon_p = \theta_p^0$, c'est-à-dire que

$$\varepsilon_p(a) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a \notin p\boldsymbol{Z}_p, \\ 0 & \text{si} \quad a \in p\boldsymbol{Z}_p. \end{cases}$$

Si $x \in \boldsymbol{Z}_p - p\boldsymbol{Z}_p$, le nombre $\dfrac{1}{p}\left(\dfrac{x}{\theta_p(x)} - 1\right)$ est dans $\boldsymbol{Z}_p$, cette remarque nous conduit à définir l'application Ψ_p de $\boldsymbol{Z}_p$ dans $\boldsymbol{Z}_p$ de la façon suivante:

si $p \neq 2$,

$$\Psi_p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{p}\left(\dfrac{x}{\theta_p(x)} - 1\right) & \text{pour} \quad x \notin p\boldsymbol{Z}_p, \\ 0 & \text{pour} \quad x \in p\boldsymbol{Z}_p; \end{cases}$$

si $p = 2$,

$$\Psi_2(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{x}{\theta_2(x)} - 1\right) & \text{pour} \quad x \notin 2\boldsymbol{Z}_2, \\ 0 & \text{pour} \quad x \in 2\boldsymbol{Z}_2. \end{cases}$$

Soit dans le corps $\boldsymbol{C}_p$,

$$D_1 = \{x \in \boldsymbol{C}_p \mid |x|_p < |p|_p^{1/(p-1)-1}\} \quad \text{si} \quad p \neq 2$$

respectivement

$$D_1 = \{x \in \boldsymbol{C}_2 \mid |x|_2 < |2|_2^{-1}\} \quad \text{si} \quad p = 2.$$

Alors pour $n \in \boldsymbol{Z}_p$ la série

$$\varepsilon_p(n) + \sum_{k=1}^{\infty} p^k \binom{m}{k} \Psi_p^k(n) \quad \text{si} \quad p \neq 2 \tag{5}$$

respectivement

$$\varepsilon_2(n) + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{2k} \binom{m}{k} \Psi_2^k(n) \quad \text{si} \quad p = 2 \tag{5'}$$

converge uniformément en m sur tout sous-disque circonférencié de D_1. Les séries (5), (5′) considérées comme fonction de (n, m) définies sur $\boldsymbol{Z}_p \times D_1$ seront notées

$$(n, m) \mapsto \left(\frac{n}{\theta_p(n)}\right)^m.$$

On voit en particulier que si n est un entier tel que $p \nmid n$, la fonction $m \mapsto \left(\dfrac{n}{\theta_p(n)}\right)^m$ constitue un prolongement analytique à D_1 de la fonction $m \mapsto n^m$ définie pour m entier positif et $m \equiv 0 \bmod (p-1)$ (resp. $m \equiv 0 \bmod 2$).

Pour tout $n \in \boldsymbol{Z}_p$ la fonction $m \mapsto \left(\dfrac{n}{\theta_p(n)}\right)^m$ est bornée sur D_1, et plus précisément satisfait aux majorations suivantes: pour tout $n \in \boldsymbol{Z}_p - p\boldsymbol{Z}_p$ et pour tout $m \in D_1$ on a

$$\left|\left(\frac{n}{\theta_p(n)}\right)^m\right|_p = 1, \tag{6}$$

et

$$\left|\left(\frac{n}{\theta_p(n)}\right)^m - 1\right|_p < |p|_p^{1/(p-1)}. \tag{6'}$$

1.3. La fonction U_p. Considérons pour $m \in D_1$, la série entière

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{\theta_p(n)}\right)^m \frac{X^n}{n} = \sum_{\substack{n=1 \\ p \nmid n}}^{\infty} \left(\frac{n}{\theta_p(n)}\right)^m \frac{X^n}{n}.$$

On a pour $n \geqslant 1$, $\left|\left(\dfrac{n}{\theta_p(n)}\right)^m \dfrac{1}{n}\right|_p \leqslant 1$, donc cette série converge, pour $|X|_p < 1$ et a une somme bornée par 1. Remarquons que, pour $p \neq 2$,

si m est un entier et $m \equiv 0 \bmod (p-1)$, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{\theta_p(n)}\right)^m \frac{X^n}{n} = \sum_{\substack{n=1\\ p\nmid n}}^{\infty} n^m \frac{X^n}{n},$$

respectivement si $m \equiv 0 \bmod 2$ on a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{\theta_2(n)}\right)^m \frac{X^n}{n} = \sum_{\substack{n=1\\ 2\nmid n}}^{\infty} n^m \frac{X^n}{n}.$$

Définition. Pour $m \in D_1$ et $|X|_p < 1$ nous posons

$$U_p(m, X) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{\theta_p(n)}\right)^m \frac{X^n}{n} = \sum_{\substack{n=1\\ p\nmid n}}^{\infty}\left(\frac{n}{\theta_p(n)}\right)^m \frac{X^n}{n}.$$

Soit $D_2 = \{X \in C_p \mid |1-X_p| \geqslant 1\}$, alors on a la

Proposition 1. *Pour tout $m \in D_1$, la fonction $X \mapsto U_p(m, X)$ est prolongeable en une fonction analytique sur D_2. Elle se développe en série de Laurent sous la forme*

$$U_p(m, X) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(m)(1-X)^{-k}, \tag{7}$$

avec

$$\lambda_k(m) = -\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\binom{k-1}{i-1}\left(\frac{i}{\theta_p(i)}\right)^m \frac{1}{i}. \tag{8}$$

En effet, l'application de Z_p dans C_p définie par $n \mapsto \frac{1}{n}\left(\frac{n}{\theta_p(n)}\right)^m$ est continue. En appliquant le théorème 1 à la série de Taylor

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{\theta_p(n)}\right)^m \frac{X^n}{n}$$

on en déduit qu'il existe une suite de scalaires $(\lambda_k(m))$ tels que $\lambda_k(m) \to 0$ et que sur D_2, $U_p(m, X)$ soit somme de la série uniformément convergente

$$U_p(m, X) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(m)(1-X)^{-k}.$$

En utilisant ce même théorème on a la relation

$$\lambda_k(m) = -\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\binom{k-1}{i-1}\left(\frac{i}{\theta_p(i)}\right)^m \frac{1}{i}.$$

Nous noterons encore $(m, X) \mapsto U_p(m, X)$ le prolongement à $D_1 \times D^2$ de la fonction U_p.

Proposition 2. *Pour tout $X \in D_2$, la fonction $m \mapsto U_p(m, X)$ est analytique bornée sur D_1. Plus précisément on a*

$$\sup_{(m,X)\in D_1\times D_2} |U_p(m, X)|_p = 1.$$

Nous avons montré à la proposition 1 que pour tout $m \in D_1$ et tout $X \in D_2$

$$U_p(m, X) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(m)(1-X)^{-k}$$

et nous savons par le théorème 2 que les scalaires $\lambda_k(m)$ sont les coefficients d'interpolation sur la suite des entiers strictement négatifs de la fonction continue

$$n \mapsto \frac{1}{n}\left(\frac{n}{\theta_p(n)}\right)^m = \varepsilon_p(n)\frac{1}{n} + \sum_{j=1}^{\infty} p^j \binom{m}{j} \Psi_p^j(n)\frac{1}{n} \quad \text{si} \quad p \neq 2$$

respectivement

$$n \mapsto \frac{1}{n}\left(\frac{n}{\theta_2(n)}\right)^m = \varepsilon_2(n) + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{2j} \binom{m}{j} \Psi_2^j(n)\frac{1}{n} \quad \text{si} \quad p = 2.$$

Développons $\frac{1}{n}\varepsilon_p(n)$ et $\frac{1}{n}\Psi_p^j(n)$ en séries d'interpolation sur la suite des entiers négatifs:

$$\frac{1}{n}\varepsilon_p(n) = \sum_{r=1}^{\infty} a_r^0 \binom{n+r-1}{r-1},$$

$$\frac{1}{n}\Psi_p^j(n) = \sum_{r=1}^{\infty} a_r^j \binom{n+r-1}{r-1}, \quad j \geqslant 1,$$

on en déduit que

$$\lambda_k(m) = \sum_{j=0}^{\infty} a_k^j p^j \binom{m}{j} \quad \text{si} \quad p \neq 2,$$

respectivement

$$\lambda_k(m) = \sum_{j=0}^{\infty} a_k^j 2^{2j} \binom{m}{j} \quad \text{si} \quad p = 2.$$

De plus les fonctions $\frac{1}{n}\varepsilon_p(n)$ et $\frac{1}{n}\Psi_p^j(n)$ satisfont aux hypothèses du théorème 2 avec $u = 1$ si $p \neq 2$ (resp. $u = 2$ si $p = 2$), donc pour $k \geqslant p^{r+1}$ si $p \neq 2$ (resp. $k \geqslant 2^{r+2}$ si $p = 2$), on a $|a_k^j|_p \leqslant |p|_p^r$ pour $j \geqslant 0$. On en déduit que pour $k \geqslant p^{r+1}$ si $p \neq 2$ (resp. $k \geqslant 2^{r+2}$ si $p = 2$) on a

$$|\lambda_k(m)|_p \leqslant |p|_p^r.$$

La série de terme général $\lambda_k(m)(1-X)^{-k}$ converge donc uniformément sur $D_1 \times D_2$.

Enfin, pour $n \in \boldsymbol{Z}_p$, la fonction $m \mapsto \left(\frac{n}{\theta_p(n)}\right)^m$ est analytique sur D_1, donc pour $k \geqslant 1$, $\lambda_k(m)$ qui est combinaison linéaire de valeurs $\left(\frac{i}{\theta_p(i)}\right)^m$, $1 \leqslant i \leqslant k$, est elle-même analytique sur D_1. D'autre part pour tout $m \in D_1$

$$\sup_k |\lambda_k(m)|_p = \sup_{n \geqslant 1} \left|\left(\frac{n}{\theta_p(n)}\right)^m\right|_p = 1$$

d'où la proposition.

1.4. Les fonctions H_p^χ et K_p^χ.

Convention. Introduisons tout d'abord *une convention d'écriture* pour les sommes où intervient un caractère. Soit χ un caractère primitif pair de conducteur $f = f(\chi)$, Z_f une racine primitive f-ième de 1. Rappelons que l'on définit la *somme de Gauss* $\tau(\chi)$ associée à χ et Z_f par

$$\tau(\chi) = \sum_{a=1}^{f} \chi(a) Z_f^a.$$

Remarquons que $\tau(\chi)$ dépend du choix de Z_f, bien qu'on le note $\tau(\chi)$ pour alléger les notations.

Soit φ une fonction définie sur les entiers premiers à f à valeur dans un corps contenant $\boldsymbol{Q}(\chi(1), \chi(2), \ldots, \chi(f))$, on donne par *convention* un sens à l'expression $\chi(a)\varphi(a)$ si $(a, f) \neq 1$. On pose $\chi(a)\varphi(a) = 0$, ceci revient, lorsque $\varphi(a)$ n'est pas définie, à prolonger φ de façon arbitraire sur tous les entiers. Cette convention étant donnée nous avons deux relations classiques qui interviennent couramment. Soit d un entier tel que $(d, f) = 1$ et φ une fonction à valeur dans un corps contenant $\boldsymbol{Q}(\chi(1), \chi(2), \ldots, \chi(f))$, de période f, alors

$$\sum_{a=1}^{f} \bar{\chi}(a)\varphi(ad) = \chi(d) \sum_{a=1}^{f} \bar{\chi}(a)\varphi(a) \tag{9}$$

où $\bar{\chi}$ désigne le caractère défini par

$$\bar{\chi}(a) = 0 \quad \text{si} \quad \chi(a) = 0,$$
$$\bar{\chi}(a)\chi(a) = 1 \quad \text{si} \quad \chi(a) \neq 0.$$

Supposons de plus que φ soit de période f_1, où f_1 divise f et $f_1 \neq f$, alors

$$\sum_{a=1}^{f} \bar{\chi}(a)\varphi(a) = 0. \tag{10}$$

Pour tout $m \in D_1$ et $X \in \boldsymbol{C}_p$ tel que $|1 - Z_p^a X|_p \geqslant 1$ pour $1 \leqslant a \leqslant f$ et $(a, f) = 1$, la fonction H_p^χ est ainsi définie

$$H_p^\chi(m, X) = \frac{\tau(\chi)}{f(\chi)} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,f)=1}}^{f} \bar{\chi}(a)\, U_p(m, Z_f^a X), \tag{11}$$

en particulier si $|X|_p < 1$ on a

$$H_p^\chi(m, X) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \left(\frac{n}{\theta_p(n)}\right)^m \frac{X^n}{n}. \tag{12}$$

Si de plus m est un entier avec $m \equiv 0 \bmod (p-1)$ (resp. $m \equiv 0 \bmod 2$) on a

$$H_p^\chi(m, X) = \sum_{\substack{n=1 \\ p \nmid n}}^{\infty} \chi(n) n^m \frac{X^n}{n}.$$

On voit immédiatement en utilisant la proposition 1 que si f n'est pas une puissance de p, $X \mapsto H_p^\chi(m, X)$ est analytiquement prolongeable au point 1. En revanche si $f(\chi) = p^e$ la proposition 1 ne nous permet pas de conclure, on pourrait même montrer que pour $f(\chi) = p$, $X \mapsto H_p^\chi(m, X)$ n'est pas analytiquement prolongeable au point 1. Aussi nous introduisons la fonction un peu plus compliquée K_p^χ.

Soit c un entier astreint aux conditions suivantes:

$$0 < c < p^2 f(\chi), \quad (c, pf(\chi)) = 1 \quad \text{et} \quad \chi(c) \neq 1 \quad (\text{si } \chi \neq \varepsilon).$$

Pour tout $m \in D_1$ si $\chi \neq \varepsilon$ (resp. pour tout $m \in D_1$ et $m \neq 0$ si $\chi = \varepsilon$) on pose

$$K_p^\chi(m, X) = \left(1 - \chi(c)\left(\frac{c}{\theta_p(c)}\right)^m\right)^{-1} \left(H_p^\chi(m, X) - \chi(c)\left(\frac{c}{\theta_p(c)}\right)^m H_p^\chi(m, X^c)\right). \tag{13}$$

Etudions maintenant l'analycité en m et en X de la fonction K_p^χ.

Lemme 1. *Soit ξ une racine primitive c-ième de l'unité, alors pour $m \in D_1$ et $|X|_p < 1$ on a*

$$K_p^\chi(m, X) = -\sum_{i=1}^{c-1} H_p^\chi(m, \xi^i X).$$

Il suffit d'appliquer les relations $\varepsilon_p(c) = 1$, $\sum_{i=1}^{c-1} \xi^{in} = -1$ si $c \nmid n$ et $\sum_{i=1}^{c-1} \xi^{in} = c-1$ si $c \mid n$.

Soit D_3 le domaine suivant de $\boldsymbol{C}_p$:

$$D_3 = \{X \in \boldsymbol{C}_p \mid |1 - \xi^i Z_f^a X|_p \geqslant 1,\ 1 \leqslant i \leqslant c-1,\ (a, f) = 1\}.$$

PROPOSITION 3. *Pour tout $m \in D_1$, la fonction*

$$X \mapsto \left(1-\chi(c)\left(\frac{c}{\theta_p(c)}\right)^m\right) K_p^\chi(m, X)$$

est prolongeable en un élément analytique sur D_3. Elle se développe en somme de séries de Laurent sous la forme

$$(14)\quad \left(1-\chi(c)\left(\frac{c}{\theta_p(c)}\right)^m\right) K_p^\chi(m, X) = -\left(\frac{\tau(\chi)}{f(\chi)} \sum_{i=1}^{c-1} \sum_{\substack{a=1\\(a,f)=1}}^{f} \bar{\chi}(a)\, U_p(m, \xi^i Z_f^a X)\right).$$

La décomposition ci-dessus utilise la définition même de K_p^χ, H_p^χ et le lemme 1. D'autre part nous savons d'après la proposition 1 que $U_p(m, \xi^i Z_f^a X)$ se développe en série de Laurent sous la forme

$$U_p(m, \xi^i Z_f^a X) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(m)(1-\xi^i Z_f^a X)^{-k}.$$

PROPOSITION 4. *Quel que soit $X \in D_3$, la fonction*

$$m \mapsto \left(1-\chi(c)\left(\frac{c}{\theta_p(c)}\right)^m\right) K_p^\chi(m, X)$$

est analytique bornée sur D_1.

En effet d'après la proposition 1 si $|1-\xi^i Z_f^a X|_p \geqslant 1$ la fonction $m \mapsto U_p(m, \xi^i Z_i^a X)$ est analytique et bornée sur D_1. Il suffit alors de considérer la décomposition de la proposition 3.

Relation entre K_p^χ et $L_p(\cdot, \chi)$. Nous allons maintenant calculer $K_p^\chi(m, 1)$ lorsque m est un entier positif, $m \equiv 0 \bmod (p-1)$ (resp. $m \equiv 0 \bmod 2$) et finalement prouver que $K_p^\chi(m, 1) = L_p(m, \chi)$.

PROPOSITION 5. *Soit K_p^χ la fonction définie selon* (13) *à partir du caractère χ. Alors quel que soit l'entier m positif tel que $m \equiv 0 \bmod (p-1)$ (resp. $m \equiv 0 \bmod 2$) on a la relation*

$$K_p^\chi(m, 1) = -\frac{B^m(\chi\varepsilon_p)}{m} = -\left(1-\chi(p)p^{m-1}\right)\frac{B^m(\chi)}{m},$$

où $B^m(\chi)$ est le m-ième nombre de Bernoulli associé au caractère χ.

Il s'agit donc de démontrer que

$$\{H_p^\chi(m, X) - \chi(c)c^m H_p^\chi(m, X)\}_{X=1} = -\left(1-\chi(c)c^m\right)\frac{B^m(\chi\varepsilon_p)}{m}.$$

On sait ([4], [11]) que les nombres de Bernoulli $B^i(\chi\varepsilon_p)$ satisfont la relation de récurrence

$$(15)\quad \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} B^i(\chi\varepsilon_p)(df')^{n+1-i} = (n+1)\sum_{l=1}^{df'} \chi\varepsilon_p(l) l^n$$

où $f' = \operatorname{ppcm}(f, p)$ et d un entier positif. Posons

$$B_1^i(\chi\varepsilon_p) = \left(1-\chi(c)c^i\right) B^i(\chi\varepsilon_p),$$

on déduit facilement de (15) la relation

$$(16)\quad \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} B_1^i(\chi\varepsilon_p)(cf')^{n+1-i} = (n+1)\sum_{l=1}^{cf'} \chi\varepsilon_p(l) l^n - (n+1)c^{n+1}\chi(c)\sum_{l=1}^{f'} \chi\varepsilon_p(l) l^n.$$

Considérons les séries

$$g_i(X) = \sum_{\substack{r=1\\p\nmid r}}^{\infty} \chi(r) r^{i-1} X^r \quad \text{pour } i \geqslant 0.$$

Si $i \equiv 0 \bmod (p-1)$ (resp. $i \equiv 0 \bmod 2$) on a

$$g_i(X) = H_p^\chi(i, X)$$

et

$$(17)\quad g_i(X) - \chi(c)c^i g_i(X^c) = H_p^\chi(i, X) - \chi(c)c^i H_p^\chi(i, X^c).$$

Calculons maintenant l'expression

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} (cf')^{n+1-i} i\{g_i(X) - \chi(c)c^i g_i(X^c)\}.$$

On a d'une part, pour d entier positif

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} (df')^{n+1-i} i g_i(X) = (n+1)\left(\frac{1}{X^{df'}} - 1\right) g_{n+1}(X) - \frac{n+1}{X^{df'}} \sum_{r=1}^{df'} \chi\varepsilon_p(r) r^n X^r.$$

En écrivant ces relations successivement pour $d = c$ et $d = 1$ on obtient

$$(18)\quad \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} (cf')^{n+1-i} i\{g_i(X) - \chi(c)c^i g_i(X^c)\}$$
$$= (n+1)\left(\frac{1}{X^{cf'}} - 1\right)\left(g_{n+1}(X) - \chi(c)c^{n+1} g_{n+1}(X^c)\right) -$$
$$- \frac{n+1}{X^{cf'}} \sum_{r=1}^{cf'} \chi\varepsilon_p(r) r^n X^r + \frac{(n+1)\chi(c)c^{n+1}}{X^{cf'}} \sum_{r=1}^{f'} \chi\varepsilon_p(r) r^n X^r.$$

Nous avons

$$g_1(X)-\chi(c)cg_1(X^c) = \sum_{\substack{r=1\\ p\nmid r}}^{\infty}\chi(r)X^r-\chi(c)c\sum_{\substack{r=1\\ p\nmid r}}^{\infty}\chi(r)X^{cr}.$$

Cette expression est une fraction rationnelle sans pôle en 1. D'autre part si D désigne l'opérateur $X\dfrac{d}{dX}$, on a

$$g_{i+1}(X)-\chi(c)c^{i+1}g_{i+1}(X^c) = D^i\big(g_1(X)-\chi(c)cg_1(X^c)\big),$$

par suite $g_{i+1}(X)-\chi(c)c^{i+1}g_{i+1}(X^c)$ est une fraction rationnelle sans pôle en 1, pour tout $i\geqslant 0$.

Posons maintenant

$$\beta_i = \big(ig_i(X)-\chi(c)c^ig_i(X^c)\big)_{X=1}, \tag{19}$$

il résulte de la relation (18), en posant $X=1$, que

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i}(cf')^{n+1-i}\beta_i = -(n+1)\sum_{r=1}^{cf'}\chi\varepsilon_p(r)r^n+(n+1)\chi(c)c^{n+1}\sum_{r=1}^{f'}\chi\varepsilon_p(r)r^n.$$

Aussi $-\beta_i$ satisfait la même relation de récurrence (16) que $B_1^i(\chi\varepsilon_p)$ et comme

$$\beta_0 = B_1^0(\chi\varepsilon_p) = 0$$

on a

$$\beta_i = -B_1^i(\chi\varepsilon_p) = -\big(1-\chi(c)c^i\big)B^i(\chi\varepsilon_p) \quad \text{pour} \quad i\geqslant 0. \tag{20}$$

Si l'on remarque que pour $m\equiv 0 \bmod (p-1)$ (resp. $m\equiv 0 \bmod 2$) la fraction rationnelle $X\mapsto\big(g_m(X)-\chi(c)c^m\big)g_m(X^c)$ n'est autre que la fonction analytique $X\mapsto\big(1-\chi(c)c^m\big)K_p^\chi(m,X)$, en utilisant (17), (19) et (20) on en déduit la proposition.

Rappelons la définition des domaines D_1

$$D_1 = \big\{x\in \mathbf{C}_p \,\big|\, |x|_p < |p|_p^{\frac{1}{p-1}-1}\big\} \quad \text{si} \quad p\neq 2$$

respectivement

$$D_1 = \big\{x\in \mathbf{C}_2 \,\big|\, |x|_2 < |2|_2^{-1}\big\} \quad \text{si} \quad p=2.$$

THÉORÈME 3. *Soit χ un caractère primitif non trivial et K_p^χ la fonction associée à χ selon* (13). *Alors pour tout $m\in D_1$*

$$L_p(1-m,\chi) = K_p^\chi(m,1).$$

C'est une fonction analytique sur D_1.

Nous savons que $m\mapsto\left(\dfrac{c}{\theta_p(c)}\right)^m$ est analytique, bornée sur D_1 d'après (6), (6′) et que pour $m\in D_1$

$$\left|\left(\frac{c}{\theta_p(c)}\right)^m-1\right|_p < |p|_p^{\frac{1}{p-1}},$$

donc

$$\left|1-\chi(c)\left(\frac{c}{\theta_p(c)}\right)^m\right|_p = |1-\chi(c)|_p \quad \text{quel que soit } m\in D_1.$$

La fonction $m\mapsto\left(1-\chi(c)\left(\dfrac{c}{\theta_p(c)}\right)^m\right)^{-1}$ est analytique bornée sur D_1. Ceci joint à la proposition 4 montre que $m\mapsto K_p^\chi(m,1)$ est analytique bornée sur D_1. Or d'après la proposition 5, pour m positif et $m\equiv 0 \bmod (p-1)$ (resp. $m\equiv 0 \bmod 2$) elle coïncide avec $L_p(1-m,\chi)$, d'où le théorème.

THÉORÈME 4. *Soit ε le caractère trivial et K_p^ε la fonction associée à ε selon* (13). *Alors pour tout $m\in D_1$ et $m\neq 0$*

$$L_p(1-m,\varepsilon) = Z_p(1-m,\boldsymbol{Q}) = K_p^\varepsilon(m,1).$$

La fonction $Z_p(\cdot,\boldsymbol{Q})$ est méromorphe sur D_1, elle a un unique pôle en 1, il est simple de résidu $(p-1)/p$, enfin $(s-1)Z_p(s,\boldsymbol{Q})$ est analytique bornée sur D_1.

On vérifie facilement que $\left(\dfrac{c}{\theta_p(c)}\right)^m = 1+mg(m)$ où g est une fonction analytique sur D_1 telle que

$$|g(m)|_p = \left|1-\frac{c}{\theta_p(c)}\right|_p < 1.$$

Donc $m\mapsto m\left(1-\left(\dfrac{c}{\theta_p(c)}\right)^m\right)^{-1}$ est analytique et bornée sur D_1 et $m\mapsto K_p^\varepsilon(m,1)$ y est méromorphe avec l'unique pôle $m=0$. Pour calculer son résidu on a

$$H_p^\varepsilon(0,X)-H_p^\varepsilon(0,X^c) = -\frac{1}{p}\log\left\{\frac{(1-X)^p}{1-X^p}\cdot\frac{1-X^{cp}}{(1-X^c)^p}\right\}, \qquad |X|_p<1.$$

Il est alors facile de vérifier que la fonction $X\mapsto\log\left\{\dfrac{(1-X)^p}{1-X^p}\cdot\dfrac{1-X^{cp}}{(1-X^c)^p}\right\}$ où log désigne le prolongement fonctionnel (cf. § 2.3) du logarithme, est un élément analytique sur D_3, et par suite de l'unicité du prolongement analytique on a donc

$$\lim_{X\to 1}\big(H_p^\varepsilon(0,X)-H_p^\varepsilon(0,X^c)\big) = \frac{1}{p}\log(c^{p-1}).$$

D'autre part

$$\lim_{m\to 0}\frac{1-\left(\dfrac{c}{\theta_p(c)}\right)^m}{-m} = \log\frac{c}{\theta_p(c)} = \frac{1}{p-1}\log(c^{p-1}),$$

d'où le résidu $(p-1)/p$. Enfin d'après la proposition 5, les fonctions coïncident sur une infinité de valeurs de s, d'où le théorème.

2. FORMULE ANALYTIQUE p-ADIQUE POUR LE NOMBRE DE CLASSES D'IDEAUX

2.1. Définition de $L_p(\chi)$. Comme précédemment, χ est un caractère primitif pair, $f(\chi)$ son conducteur, Z_f une racine primitive $f(\chi)$-ième de 1 et $\tau(\chi)$ la somme de Gauss associée à χ et Z_f. Rappelons la définition de $L_p(\chi)$ (Leopoldt [12]):

(a) Cas où $f(\chi)$ n'est pas une puissance de p. On pose alors

$$L_p(\chi) = -\frac{\tau(\chi)}{f(\chi)}\sum_{a=1}^{f(\chi)}\bar{\chi}(a)\log(1-Z_f^a).$$

En effet, dans ce cas, $1-Z_f^a$ est une unité p-adique lorsque $(a, f(\chi)) = 1$, donc $\log(1-Z_f^a)$ est défini (cf. 2.3).

(b) Cas où $f(\chi) = p$. On pose

$$L_p(\chi) = -\frac{\tau(\chi)}{f(\chi)}\frac{1}{p-1}\sum_{a=1}^{p}\bar{\chi}(a)\log\left\{\frac{(1-Z_p^a)^{p-1}}{-p}\right\}.$$

(c) Cas où $f(\chi) = p^e$, $e > 1$. On pose

$$L_p(\chi) = -\frac{\tau(\chi)}{f(\chi)}\frac{1}{p}\sum_{a=1}^{f(\chi)}\bar{\chi}(a)\log\left\{\frac{(1-Z_f^a)^p}{1-Z_f^{ap}}\right\}.$$

2.2. Démonstration de la relation (21).

THÉORÈME 5. *Quels que soient le caractère primitif $\chi \neq \varepsilon$ et le nombre premier p, on a*

$$L_p(1, \chi) = \left(1-\frac{\chi(p)}{p}\right)L_p(\chi). \tag{21}$$

Preuve. (a) Cas où $f(\chi)$ n'est pas une puissance de p. Supposons d'abord que $p\nmid f$, alors d'après (9)

$$\chi(p)\sum_{a=1}^{f}\bar{\chi}(a)\log(1-Z_f^a) = \sum_{a=1}^{f}\bar{\chi}(a)\log(1-Z_f^{ap}),$$

donc

$$\left(1-\frac{\chi(p)}{p}\right)L_p(\chi) = -\frac{\tau(\chi)}{f(\chi)}\sum_{a=1}^{f}\bar{\chi}(a)\frac{1}{p}\log\left\{\frac{(1-Z_f^a)^p}{1-Z_f^{ap}}\right\}. \tag{22}$$

Si $p|f$, alors $\chi(p) = 0$ et d'après (10)

$$\sum_{a=1}^{f}\bar{\chi}(a)\log(1-Z_f^{ap}) = 0$$

d'où encore la relation (22).

(b) Cas où $f(\chi) = p$, alors

$$\left(1-\frac{\chi(p)}{p}\right)L_p(\chi) = L_p(\chi) = -\frac{\tau(\chi)}{f(\chi)}\frac{1}{p-1}\sum_{a=1}^{p}\bar{\chi}(a)\log\left\{\frac{(1-Z_p^a)^{p-1}}{-p}\right\}. \tag{23}$$

(c) Cas où $f(\chi) = p^e$, $e > 1$, alors

$$\left(1-\frac{\chi(p)}{p}\right)L_p(\chi) = L_p(\chi),$$

on retrouve la relation (22).

D'autre part d'après le théorème 3, on a

$$L_p(1, \chi) = (1-\chi(c))^{-1}\lim_{X\to 1}\left(H_p^\chi(0, X)-\chi(c)H_p^\chi(0, X^c)\right). \tag{24}$$

Explicitons l'élément analytique $X \mapsto H_p^\chi(0, X)-\chi(c)H_p^\chi(0, X^c)$. Nous avons

$$U_p(0, X) = -\frac{1}{p}\log\frac{(1-X)^p}{1-X^p} \quad \text{pour} \quad |X|_p < 1$$

il s'ensuit que

$$H_p^\chi(0, X)-\chi(c)H_p^\chi(0, X^c) = -\frac{1}{p}\frac{\tau(\chi)}{f(\chi)}\sum_{a=1}^{f}\bar{\chi}(a)\left(\log\frac{(1-Z_f^aX)^p}{1-Z_f^{ap}X^p}-\chi(c)\log\frac{(1-Z_f^aX^c)^p}{1-Z_f^{ap}X^{cp}}\right)$$

en utilisant la relation (9), ceci s'écrit

$$H_p^\chi(0, X)-\chi(c)H_p^\chi(0, X^c) = +\frac{1}{p}\frac{\tau(\chi)}{f(\chi)}\sum_{a=1}^{f}\bar{\chi}(a)\log\left\{\frac{(1-Z_f^{ac}X^c)^p}{(1-Z_f^aX)^p}\cdot\frac{1-Z_f^{ap}X^p}{1-Z_f^{acp}X^{cp}}\right\}.$$

Il est facile de démontrer que si log désigne le prolongement fonctionnel du logarithme, la fonction

$$X \mapsto \log\left\{\frac{(1-Z_f^{ac}X^c)^p}{(1-Z_f^aX)^p}\cdot\frac{1-Z_f^{ap}X^p}{1-Z_f^{acp}X^{cp}}\right\}$$

est un élément analytique sur D_3. Nous sommes donc ramenés à chercher la limite de cette fonction lorsque X tend vers 1.

Si $f \neq p$ et si $(a, f) = 1$

$$\lim_{X\to 1} \log\left\{\frac{(1-Z_f^{ac}X^c)^p}{(1-Z_f^a X)^p}\cdot\frac{1-Z_f^{ap}X^p}{1-Z_f^{acp}X^{cp}}\right\} = \log\left\{\frac{(1-Z_f^{ac})^p}{(1-Z_f^a)^p}\cdot\frac{1-Z_f^{ap}}{1-Z_f^{acp}}\right\}$$

or

$$\log\left\{\frac{(1-Z_f^{ac})^p}{(1-Z_f^a)^p}\cdot\frac{1-Z_f^{ap}}{1-Z_f^{acp}}\right\} = \log\frac{1-Z_f^{ap}}{(1-Z_f^a)^p} - \log\frac{1-Z_f^{acp}}{(1-Z_f^{ac})^p}.$$

En utilisant toujours la relation (9) on a

$$\frac{1}{p}\frac{\tau(\chi)}{f(\chi)}\sum_{a=1}^{f}\bar{\chi}(a)\log\left\{\frac{(1-Z_f^{ac})^p}{(1-Z_f^a)^p}\cdot\frac{1-Z_f^{ap}}{1-Z_f^{acp}}\right\}$$
$$= \frac{1}{p}\big(1-\chi(c)\big)\frac{\tau(\chi)}{f(\chi)}\sum_{a=1}^{f}\bar{\chi}(a)\log\frac{1-Z_f^{ap}}{(1-Z_f^a)^p}$$

ce qui avec (24) et (22) montre la relation (21).

Si $f = p$ et si $(a, p) = 1$

$$\lim_{X\to 1}\log\left\{\frac{(1-Z_f^{ac}X^c)^p}{(1-Z_f^a X)^p}\cdot\frac{1-X^p}{1-X^{cp}}\right\} = \log\left\{\frac{(1-Z_p^{ac})^p}{(1-Z_p^a)^p}\cdot\frac{1}{c}\right\}$$

or

$$\frac{1}{p}\log\left\{\frac{(1-Z_p^{ac})^p}{(1-Z_p^a)^p}\cdot\frac{1}{c}\right\}$$
$$= \frac{1}{p-1}\log\frac{(1-Z_p^{ac})^{p-1}}{-p} - \frac{1}{p-1}\log\left\{\frac{(1-Z_p^a)^{p-1}}{-p}\right\} - \frac{1}{p}\log c.$$

En utilisant toujours (9) on a

$$\frac{1}{p}\frac{\tau(\chi)}{f(\chi)}\sum_{a=1}^{f}\bar{\chi}(a)\log\left\{\frac{(1-Z_p^{ac})^p}{(1-Z_p^a)^p}\cdot\frac{1}{c}\right\}$$
$$= \big(\chi(c)-1\big)\frac{\tau(\chi)}{f(\chi)}\sum_{a=1}^{p}\bar{\chi}(a)\frac{1}{p-1}\log\frac{(1-Z_p^a)^{p-1}}{-p}.$$

Ceci joint à (23) et (24) montre la relation (21).

2.3. La formule analytique. Nous sommes maintenant en mesure de démontrer une expression analytique p-adique du nombre des classes d'idéaux d'un corps de nombres abélien réel.

Précisons tout d'abord quelques points relatifs au "régulateur p-adique" qui intervient dans cette expression.

Soit n le degré sur $\boldsymbol{Q}$ du corps abélien réel K, A la clôture intégrale de $\boldsymbol{Z}$ dans K et $\omega_1, \ldots, \omega_n$ une base du $\boldsymbol{Z}$-module A. Soit U le groupe des unités de A: on sait que U est le produit direct du groupe $\{1, -1\}$ et d'un groupe libre de rang $r = n-1$; soit $e_1, \ldots, e_{n-1}$ une base de ce groupe. Si $G = \mathrm{Gal}(K/\boldsymbol{Q})$ nous noterons $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ les éléments de G où σ_0 est l'élément neutre. Enfin $|\cdot|_\infty$ désigne la valeur absolue du corps $\boldsymbol{C}$ des nombres complexes et $\log_\infty$ la fonction logarithme définie sur les réels positifs.

Etant donné un homomorphisme f de K dans $\boldsymbol{C}$ on sait que le régulateur

$$R_\infty = \big|\det\big(\log_\infty|f\circ\sigma_j(e_k)|_\infty\big)\big|_\infty \qquad (1\leqslant j\leqslant n-1,\ 1\leqslant k\leqslant n-1)$$

et le discriminant

$$d = \det{}^2\big(f\circ\sigma_j(\omega_i)\big) \qquad (1\leqslant i\leqslant n,\ 0\leqslant j\leqslant n-1)$$

sont indépendants des choix de f, (ω_i), (σ_j), (e_k). Par contre, la quantité

$$A_\infty\big((\omega_i), (\sigma_j), (e_k)\big) = \frac{\det\big(\log_\infty|f\circ\sigma_j(e_k)|_\infty\big)}{\det\big(f\circ\sigma_l(\omega_i)\big)}$$
$$(1\leqslant j\leqslant n-1,\ 1\leqslant k\leqslant n-1,\ 1\leqslant i\leqslant n,\ 0\leqslant l\leqslant n-1)$$

est un réel indépendant de f mais dont le signe dépend des choix de (ω_i), (e_k), (σ_j).

La quantité

$$\big|A_\infty\big((\omega_i), (\sigma_j), (e_k)\big)\big|_\infty = R_\infty d^{-1/2}$$

est un invariant du corps K, qui figure dans la formule des résidus pour le nombre des classes d'idéaux.

Les analogues p-adiques du régulateur et de $d^{-1/2}$ ne sont pas définis de manière indépendante des bases, mais le sont seulement au signe près (pour les valeurs réelles on a choisi la valeur positive, ce qui n'a pas d'équivalent ici). Cependant leur produit, qui intervient dans la formule p-adique des résidus est un invariant p-adique de K défini de la façon suivante.

Soit $\boldsymbol{C}_p$ un complété d'une clôture algébrique de $\boldsymbol{Q}_p$ et U_p sa circonférence unité, $U_p = \{x\in\boldsymbol{C}_p \mid |x|_p = 1\}$. Le logarithme p-adique

$$\log_p(x) = \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \qquad \text{pour} \qquad |x-1|_p < 1,$$

et prolongé à U_p par la relation fonctionnelle [9]. Si $x\in U_p$, il existe une et une seule racine de l'unité ξ dont l'ordre est premier à p et telle que $|x-\xi|_p < 1$, le logarithme est alors défini par

$$\log_p x = \log_p\frac{x}{\xi}.$$

Soit g un homomorphisme de K dans C_p. Etant donnés (ω_i), (σ_j) et (e_k) la quantité p-adique

$$\frac{\det\big(\log_p(g\circ\sigma_j(e_k))\big)}{\det\big(g\circ\sigma_l(\omega_i)\big)} \quad (1\leqslant j\leqslant n-1,\ 1\leqslant k\leqslant n-1,\ 0\leqslant l\leqslant n-1,\ 1\leqslant i\leqslant n)$$

est indépendante du choix de l'homomorphisme g. Nous la noterons $A_p\big((\omega_i), (\sigma_j), (e_k)\big)$. Parmi les bases (ω_i) et (e_k) et les permutations de G, choisissons celles pour lesquelles

$$A_\infty\big((\omega_i), (\sigma_j), (e_k)\big) > 0.$$

Pour de tels choix la quantité $A_p\big((\omega_i), (\sigma_j), (e_k)\big)$ ne dépend plus que de K et nous noterons

$$A_p\big((\omega_i), (\sigma_j), (e_k)\big) = R_p d^{-1/2}. \tag{25}$$

La quantité ainsi définie est un invariant p-adique du corps K. Il faut remarquer que seule la notation globale "$R_p d^{-1/2}$" a un sens, chacune des quantités p-adiques R_p et $d^{-1/2}$ n'étant définie que par son carré (qui est un invariant de K):

$$d = \det{}^2\big(g\circ\sigma_l(\omega_i)\big) \qquad (1\leqslant i\leqslant n,\ 0\leqslant l\leqslant n-1)$$

et

$$R_p^2 = \det{}^2\big(\log_p g\circ\sigma_l(e_k)\big) \qquad (1\leqslant k\leqslant n-1,\ 1\leqslant l\leqslant n-1).$$

Il est neanmoins habituel d'appeler l'une des racines carrées de R_p^2 "le" *régulateur p-adique.*

C'est la quantité $(R_p d^{-1/2})$ ainsi définie qui intervient dans la relation

$$2^{n-1}h(R_p d^{-1/2}) = \prod_{\chi\neq\varepsilon} L_p(\chi) \tag{26}$$

démontrée par Leopoldt [12], ainsi que dans le

THÉORÈME 6. *Soit K un corps de nombres abélien réel, n son degré, h son nombre de classes d'idéaux, $(R_p d^{-1/2})$ la quantité définie selon* (25). *Soit $Z_p(\cdot, K)$ la fonction zêta p-adique de K, alors*

$$2^{n-1}h(R_p d^{-1/2}) = \prod_{\mathfrak{p}|p}\big(1-N(\mathfrak{p})^{-1}\big)^{-1}\lim_{s\to 1}(s-1)Z_p(s, K).$$

Preuve. On sait ([4], [10]) que par définition

$$Z_p(\cdot, K) = \prod_{\chi\in\mathfrak{X}} L_p(\cdot, \chi)$$

où $\mathfrak{X}$ désigne l'ensemble des caractères primitifs de K. Ainsi d'après le théorème 4 nous avons

$$\lim_{s\to 1}(s-1)Z_p(s, K) = \left(1-\frac{1}{p}\right)\prod_{\chi\neq\varepsilon} L_p(1, \chi).$$

D'autre part d'après les théorèmes 4 et 5 nous avons

$$\lim_{s\to 1}(s-1)Z_p(s, K) = \prod_{\chi\in\mathfrak{X}}\big(1-\chi(p)p^{-1}\big)\prod_{\chi\neq\varepsilon} L_p(\chi).$$

En utilisant la relation (26) et la relation classique

$$\prod_{\chi\in\mathfrak{X}}\big(1-\chi(p)p^{-1}\big) = \prod_{\mathfrak{p}|p}\big(1-N(\mathfrak{p})^{-1}\big)$$

on en déduit le théorème.

3. UN THÉORÈME DE PROLONGEMENT ANALYTIQUE

Nous désignerons par K un corps valué complet algébriquement clos, de caractéristique 0, $\mathfrak{M}$ l'idéal de valuation, p la caractéristique résiduelle, et $|\cdot|$ sa valeur absolue.

Etant donnée une série formelle convergente

$$f(T) = \sum_{n\geqslant 0} a_n T^n \in K[[X]],$$

nous allons chercher à prolonger sa somme en un élément analytique dans un domaine contenant strictement son disque de convergence.

Nous nous limiterons au cas où le disque de convergence est $\mathfrak{M}$ et où la somme y est bornée: on sait en effet [9] qu'une fonction analytique dont la série de Taylor en un point a un disque de convergence circonférencié n'est pas prolongeable hors de ce disque, et qu'une fonction prolongeable est bornée sur le disque (non circonférencié) de convergence de sa série de Taylor, on se ramène enfin à $\mathfrak{M}$ par homothétie.

Au § 1 nous avons appliqué le critère obtenu au prolongement au point 1 de fonctions analytiques bornées dans $\mathfrak{M}$.

Soit Δ une partie de K: un *élément analytique* sur Δ est une fonction, définie sur Δ et qui y est limite uniforme d'une suite de fractions rationnelles sans pôle dans Δ.

Soit en particulier $D = \left\{x\in K \,\middle|\, \left|1-\frac{x}{a}\right| < |r|\right\}$, un disque non circonférencié, $\Delta = \complement D$, et $H_0(\Delta)$ l'espace des éléments analytiques sur Δ et nuls à l'infini, muni de la norme de la convergence uniforme sur Δ. Cet espace $H_0(\Delta)$ s'identifie à l'espace des séries de Laurent

$$f(x) = \sum_{n\geqslant 1}\lambda_n r^n\Big/\left(1-\frac{x}{a}\right)^n, \qquad \lambda_n\to 0, \qquad \|f\| = \operatorname*{Sup}_n |\lambda_n|.$$

En effet, cet espace de séries de Laurent est complet pour la convergence uniforme sur Δ, et les fractions rationnelles nulles à l'infini sans

pôle dans Δ y forment un sous-espace dense. On voit donc que les fonctions $(e_n)_{n\geqslant 1}$, $e_n(x) = \left(1-\frac{x}{a}\right)^{-n} r^n$, constituent une base normale de $H_0(\Delta)$ [1].

Soit maintenant D_i, $i = 1, \ldots, N$, une famille finie de disques disjoints non-circonférenciés, $D_i = \left\{x \in K \,\middle|\, \left|1-\frac{x}{a_i}\right| < |r_i|\right\}$, $\Delta_i = \complement D_i$, soit $\Delta = \bigcap \Delta_i = \complement \bigcup D_i$ et $H_0(\Delta)$ l'espace des éléments analytiques sur Δ et nuls à l'infini, muni de la norme de convergence uniforme sur Δ. Alors:

Lemme 2. *Avec les notations ci-dessus*

$$H_0(\Delta) = \bigoplus_{i=1}^{N} H_0(\Delta_i)$$

et les fonctions

$$e_{n,i}(x) = \left(1-\frac{x}{a_i}\right)^{-n} r_i^n, \quad n \geqslant 1, \quad i = 1, \ldots, N,$$

constituent une base normale de $H_0(\Delta)$.

Preuve. Soit R une fraction rationnelle, nulle à l'infini, sans pôle dans Δ, R se décompose de façon unique sous la forme $R = \sum_{i=1}^{N} R_i$, où R_i est une fraction rationnelle, nulle à l'infini, dont les pôles sont dans D_i. Sachant que le corps résiduel de K est infini, on vérifie que

$$\operatorname*{Sup}_{x\in\Delta} |R(x)| = \operatorname*{Max}_{i} \left(\operatorname*{Sup}_{x\in\Delta_i} |R_i(x)|\right).$$

Il en résulte que l'application $R \mapsto (R_i)$, qui est une isométrie sur les fractions rationnelles, se prolonge en un isomorphisme (isométrique) des complétés.

L'assertion sur les fonctions $e_{n,i}$ résulte alors de la juxtaposition des bases normales dans les sommes directes.

On voit donc que si $\Delta = \complement \bigcup D_i$, tout élément analytique sur Δ et nul à l'infini s'écrit de façon unique (lorsque des centres a_i ont été choisis)

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{n\geqslant 1} \lambda_{n,i} r_i^n \Big/ \left(1-\frac{x}{a_i}\right)^n \quad \text{avec} \quad \operatorname*{Sup}_{x\in\Delta} |f(x)| = \operatorname*{Sup}_{i,n} |\lambda_{n,i}|, \quad \lambda_{n,i} \to 0.$$

Cette décomposition est un cas particulier du théorème de Mittag-Löeffler sur les éléments analytiques au sens de Krasner [9].

Etant donné un ouvert Δ du type ci-dessus, contenant $\mathfrak{M}$, nous allons caractériser les suites de coefficents de Taylor à l'origine des éléments de $H_0(\Delta)$: cela équivaut à déterminer, parmi les séries de Taylor, celles dont la somme est prolongeable en un élément analytique sur Δ et nul à l'infini.

Soit $B(K)$ l'espace des suites bornées $(a_n)_{n\geqslant 0}$ dans K, si $f \in H_0(\Delta)$ nous noterons $T(f)$ la suite de ses coefficients de Taylor à l'origine: nous cherchons donc à caractériser le sous-espace $T(H_0(\Delta))$ de $B(K)$. L'espace $B(K)$ est muni de sa norme naturelle $\|a\| = \operatorname*{Sup}_{n} |a_n|$.

Nous traiterons d'abord le cas particulièrement simple de l'ouvert $\Delta_0 = \complement_K(1+\mathfrak{M}) = \{x \in K \mid |x-1| \geqslant 1\}$ et nous en déduirons une caractérisation de $H(\Delta)$ pour certains autres domaines.

3.1. Cas où $\Delta = \Delta_0$. Soit $e_k(x) = (1-x)^{-k}$, la série de Taylor à l'origine de e_k se calcule immédiatement:

$$e_k(X) = \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \binom{-k}{n} X^n = \sum_{n\geqslant 0} \binom{k+n-1}{k-1} X^n.$$

Donc la suite $(Te_k(n))_{n\geqslant 0}$ des coefficients de Taylor de e_k est:

$$Te_k(n) = \binom{k+n-1}{k-1}.$$

Sachant que $H_0(\Delta_0)$ s'identifie à l'espace des séries $\sum_{k\geqslant 1} \lambda_k e_k$ où $\lambda_k \to 0$, muni de la norme $\operatorname*{Sup}_{k\geqslant 1} |\lambda_k|$, on voit que $T(H_0(\Delta_0))$ est le sous-espace de $B(K)$ constitué des séries $\sum_{k\geqslant 1} \lambda_k T(e_k)$ où $\lambda_k \mapsto 0$.

Soit donc $a = (a_n)_{n\geqslant 0} \in B(K)$, $a \in T(H_0(\Delta_0))$ à la condition nécessaire et suffisante qu'il existe une suite λ_k, $\lambda_k \to 0$, telle que:

$$a_n = \sum_{k\geqslant 1} \lambda_k \binom{k+n-1}{k-1}.$$

Soit maintenant $E = C(\boldsymbol{Z}_p, K)$ l'espace des fonctions continues sur $\boldsymbol{Z}_p$ à valeurs dans K, muni de la norme de la convergence uniforme sur $\boldsymbol{Z}_p$. Par restriction à $\boldsymbol{N} \subseteq \boldsymbol{Z}_p$, E s'identifie à un sous-espace fermé de $B(K)$, que nous noterons $C(K)$.

On sait [1] que la suite des fonctions polynômiales $x \mapsto \binom{x+k-1}{k-1}$, $k \geqslant 1$, qui est la suite des polynômes d'interpolation sur les entiers négatifs, est une base normale de $C(\boldsymbol{Z}_p, K)$. Donc les suites $T(e_k)$ définies ci-dessus par $T(e_k)(n) = \binom{n+k-1}{k-1}$, $k \geqslant 1$, sont une base normale de $C(K)$. L'espace $C(K)$ est donc le sous-espace de $B(K)$ constitué des séries $\sum_{k\geqslant 1} \lambda_k T(e_k)$, $\lambda_k \to 0$: c'est aussi $T(H_0(\Delta_0))$.

De plus, la norme naturelle sur $C(K)$ est $\sup |\lambda_k|$, nous avons ainsi montré le:

Théorème 1. *Pour que la série formelle* $\sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$ *soit la série de Taylor à l'origine d'une fonction f analytique sur*

$$\Delta_0 = \{x \in K \mid |x-1| \geqslant 1\},$$

et nulle à l'infini, il faut et il suffit que $n \mapsto a_n$ soit prolongeable en une fonction continue sur $\boldsymbol{Z}_p$; alors:

$$\|f\|_{\Delta_0} = \sup_{x \in \Delta_0} |f(x)| = \operatorname*{Sup}_{n \geqslant 0} |a_n|.$$

COROLLAIRE. *Soit $f = \sum_{n \geqslant 0} a_n X^n$ une série de Taylor satisfaisant aux conditions du théorème 1. Supposons que la fonction continue a prolongeant $n \mapsto a_n$ à $\boldsymbol{Z}_p$ soit analytique d'ordre h sur $\boldsymbol{Z}_p$ ([1]), alors f est analytique dans le domaine $D_h = \{x \in K \mid |1-x| > p^{1/(p-1)p^h}\}$. En particulier si a est strictement analytique sur $\boldsymbol{Z}_p$ ($h = 0$), et si R désigne son rayon d'analyticité, f est analytique dans le domaine:*

$$\Delta_R = \left\{x \in K \mid |1-x| > \frac{1}{R}|p|^{p-1}\right\}.$$

Nous savons en effet que: $f(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{(1-X)^k}$ où λ_k est la suite des coefficients d'interpolation de a sur les entiers négatifs

$$a(x) = \sum_{k \geqslant 1} \lambda_k \binom{x+k-1}{k-1}.$$

D'après le théorème 3 de [1], a est analytique d'ordre h sur $\boldsymbol{Z}_p$ à la condition nécessaire et suffisante que:

$$\left|\frac{\lambda_k}{(k-1)!}\right| |p|^{\frac{k-1}{p-1}\left(1-\frac{1}{p^n}\right)} \to 0,$$

soit

$$\underline{\lim}\, |\lambda_k|^{1/k} = |p|^{1/(p-1)p^h},$$

d'où la première assertion.

La seconde se déduit aisément des évaluations de rayon d'analycité fournies par le théorème 3 de [1].

3.2. Cas du complémentaire d'un nombre fini de classes entières modulo $\mathfrak{M}$. Soit m un entier premier à p et Z une racine primitive m-ième de 1 dans K.

Pour $i = 0, 1, \ldots, m-1$, soit $D_i = Z^{-i} + \mathfrak{M}$, $\Delta_i = \{x \in K \mid |1 - Z^i x| \geqslant 1\}$ le complémentaire de D_i, et $\Delta = \complement \bigcup_{i=0}^{m-1} D_i = \bigcap_{i=0}^{m-1} \Delta_i$.

Soit $e_{k,i}(x) = (1 - Z^i X)^{-k}$, $k \geqslant 1$, $i = 0, \ldots, m-1$, les fonctions $e_{k,i}$ constituent une base normale de $H_0(\Delta)$ (théorème 1).

Le développement de Taylor de $e_{k,i}$ nous fournit la suite des coefficients $T(e_{k,i})$:

$$T(e_{k,i})(n) = Z^{ni} \binom{k+n-1}{k-1}.$$

On en déduit comme précédemment qu'étant donnée une suite bornée a, $a \in T(H_0(\Delta))$ à la condition nécessaire et suffisante qu'il existe des suites de scalaires: $(\lambda_{k,i})_{k \geqslant 1, i=0,\ldots,m-1}$ telles que $\lambda_{k,i} \to 0$ et que:

$$a_n = \sum_{i=0}^{m-1} Z^{ni} \left(\sum_{k \geqslant 1} \lambda_{k,i} \binom{k+n-1}{k-1}\right).$$

Pour chaque i, la suite:

$$n \mapsto \sum_{k \geqslant 1} \lambda_{k,i} \binom{k+n-1}{k-1}$$

est dans l'espace $C(K)$ des restrictions à $\boldsymbol{N}$ de fonctions continues sur $\boldsymbol{Z}_p$. Soit donc:

$$\varphi_i(x) = \sum_{k \geqslant 1} \lambda_{k,i} \binom{x+k-1}{k-1} \in C(Z_p, K)$$

on a:

$$a_n = \sum_{i=0}^{m-1} Z^{ni} \varphi_i(n).$$

Nous pouvons énoncer le:

LEMME 3. *Soit Z une racine primitive m-ième de 1, $\Delta_i = \{x \in K \mid |1 - Z^i x| \geqslant 1\}$ et $\Delta = \bigcap_{i=0}^{m-1} \Delta_i$, alors:*

$$T(H_0(\Delta)) = \bigoplus_{i=0}^{m-1} Z^{ni} C(K),$$

la somme étant une somme directe d'espaces de Banach.

Nous avons en effet montré que $a \in T(H_0(\Delta))$ à la condition nécessaire et suffisante qu'il existe des $\varphi_i \in C(K)$ telles que:

$$a_n = \sum_{i=0}^{m-1} Z^{ni} \varphi_i(n).$$

De plus, si $a = T(f)$, avec

$$f = \sum_{i=0}^{m-1} \left(\sum_{k \geqslant 1} \lambda_{k,i} e_{k,i}\right),$$

on a:

$$\|f\| = \operatorname*{Sup}_{k,i} |\lambda_{k,i}| = \operatorname*{Sup}_{i} \|\varphi_i\|,$$

ce qui montre qu'on a une somme directe d'espaces de Banach.

On peut encore transformer la condition obtenue. Soit en effet $a \in T(H_0(\Delta))$

$$a_n = \sum_{i=0}^{m-1} Z^{ni} \varphi_i(n) \quad \text{avec} \quad \varphi_i(x) = \sum_{k \geqslant 1} \lambda_{k,i} \binom{x+k-1}{k-1}.$$

Soit r un entier, $0 \leqslant r < m$ et u_r la suite:

$$n \mapsto u_r(n) = a_{r+nm}.$$

Alors:

$$u_r(n) = \sum_{i=0}^{m-1} Z^{ri}\varphi_i(r+nm), \qquad \text{donc} \qquad u_r \in C(K).$$

Réciproquement, soient $\tilde{u}_0, \ldots, \tilde{u}_{m-1}$, m fonctions continues sur $\boldsymbol{Z}_p$, $u_0, \ldots, u_{m-1}$ leurs restrictions à $\boldsymbol{N}$. Pour $i = 0, \ldots, m-1$ les fonctions:

$$\tilde{\varphi}_i(t) = \frac{1}{m}\sum_{r=0}^{m-1} Z^{-ri}\tilde{u}_r\left(\frac{t-r}{m}\right)$$

sont continues sur $\boldsymbol{Z}_p$, car $(m, p) = 1$, alors la suite:

$$a_n = \sum_{i=0}^{m-1} Z^{ni}\tilde{\varphi}_i(n)$$

est dans $T(H_0(\Delta))$, de plus, on a:

$$\operatorname*{Sup}_n |a_n| = \operatorname*{Max}_i \|\tilde{\varphi}_i\| = \operatorname*{Max}_r \|\tilde{u}_r\|.$$

LEMME 4. *Avec les notations du lemme 3, la suite $a = (a_n)_{n\geqslant 0}$ appartient à $T(H_0(\Delta))$ à la condition nécessaire et suffisante que pour $0 \leqslant r < m$, chacune des suites $n \mapsto u_r(n) = a_{r+nm}$ soit prolongeable en une fonction $\tilde{u}_r$ continue sur $\boldsymbol{Z}_p$.*

COROLLAIRE 4. *Soit $f \in H_0(\Delta)$ et $a = T(f)$, si $f = \sum_{i=0}^{m-1} f_i$ où $f_i \in H_0(\Delta_i)$, avec*

$$f_i(x) = \sum_{k\geqslant 1} \lambda_{k,i}\frac{1}{(1-Z^i x)^k},$$

on a les relations:

$$a_n = \sum_{i=0}^{m-1} Z^{ni}\varphi_i(n) \qquad \text{où} \qquad \varphi_i(x) = \sum_{k\geqslant 1}\lambda_{k,i}\binom{x+k-1}{k-1},$$

et

$$\varphi_i(t) = \sum_{0\leqslant r<m} Z^{-ri}\tilde{u}_r\left(\frac{t-r}{m}\right)$$

où $\tilde{u}_r$ est le prolongement continu à $\boldsymbol{Z}_p$ de la suite $n \mapsto u_r(n) = a_{r+nm}$.

Plus généralement, considérons maintenant un nombre fini de classes $C_1, \ldots, C_n$ modulo $\mathfrak{M}$, distinctes de $\mathfrak{M}$.

Soient $a_1, \ldots, a_n$ des centres de $C_1, \ldots, C_n$: supposons qu'il existe un entier m tel que $a_i^m \in 1+\mathfrak{M}$, $i = 1, \ldots, n$ (ce qui sera toujours vrai si le groupe multiplicatif du corps résiduel est de torsion et, en particulier, si K est le complété de la clôture algébrique de $\boldsymbol{Q}_p$). Etant donné un tel entier m, notons Z une racine primitive m-ième de 1 et k_i les entiers définis par

$$C_i = Z^{-i}+\mathfrak{M} = D_{k_i}, \qquad 0 \leqslant k_i < m,\ 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Soit $\Delta = \complement \bigcup_{i=1}^{n} C_i$, alors

$$H_0(\Delta) = \bigoplus_{i=1}^{n} H_0(\Delta_{k_i}) \subseteq \bigoplus_{i=0}^{m-1} H_0(\Delta_i).$$

Le lemme 4 nous permet de caractériser les suites qui appartiennent à $T\big(H_0(\bigcap_{i=0}^{m-1}\Delta_i)\big)$, et le corollaire 4 permet de distinguer le sous-espace $T\big(H_0(\Delta)\big)$ car si $f = \sum_{i=0}^{m-1} f_i$, $f_i \in H_0(\Delta_i)$, $f \in H_0(\Delta)$ si et seulement si $f_i = 0$ pour $i \notin \{k_1, \ldots, k_r\}$. Nous avons donc montré le:

THÉORÈME 7. *Soit K un corps valué complet algébriquement clos de caractéristique 0 et de caractéristique résiduelle p. Soient $a_1, \ldots, a_n \in K$ tels que $|a_i - a_j| = 1$ pour $i \neq j$ et $|a_i| = 1$, soit $C_i = a_i+\mathfrak{M}$,*

$$\Gamma_i = C_i = \{x \in K \mid |x-a_i| \geqslant 1\}, \qquad \Delta = \bigcap_{i=1}^{n}\Gamma_i.$$

Soit m un entier premier à p et tel que $a_i^m \in 1+\mathfrak{M}$, $i = 1, \ldots, n$, Z une racine primitive m-ième de 1, $k_1, \ldots, k_n$ les entiers définis par:

$$0 \leqslant k_i < m \qquad \text{et} \qquad |1-Z^{k_i}a_i| < 1.$$

Pour qu'une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$ soit la série de Taylor à l'origine d'un élément analytique f sur Δ et nul à l'infini il faut et il suffit que:

(a) *Pour $0 \leqslant r < m$ la suite $n \mapsto u_r(n) = a_{r+mn}$ soit prolongeable en une fonction $\tilde{u}_r$ continue sur $\boldsymbol{Z}_p$.*

(b) *Parmi les m fonctions continues sur $\boldsymbol{Z}_p$ définies par:*

$$\tilde{\varphi}_i(t) = \frac{1}{m}\sum_{r=0}^{m-1} Z^{-ri}\tilde{u}_r\left(\frac{t-r}{m}\right)$$

les fonctions $\tilde{\varphi}_i$ telles que $i \notin \{k_1, \ldots, k_n\}$ soient nulles.

Si ces conditions sont satisfaites, alors $f = \sum_{i=1}^{n} f_i$ où $f_i \in H_0(\Delta_i')$ avec

$$\|f\|_\Delta = \sup \|f_i\|_{\Gamma_i} \qquad \text{et} \qquad \|f_i\|_{\Gamma_i} = \|\tilde{\varphi}_{k_i}\|_{\boldsymbol{Z}_p}.$$

Remarque. *Si K est le complété d'une clôture algébrique de $\boldsymbol{Q}_p$, pour tout a tel que $|a| = 1$ il existe un entier m tel que $a^m \in 1+\mathfrak{M}$.*

3.3. Généralisation. Bien que nous ne l'utilisions pas dans l'étude des fonctions L, signalons que le théorème 1 se généralise très facilement à la situation suivante.

Soit Δ un quasi-connexe fermé de K contenant 0 et le point à l'infini. Nous dirons que Δ est un *bon quasi-connexe* si son complémentaire Δ' est réunion d'une famille de disques D_i dont le rayon r_i est la distance de D_i à l'origine. Alors [6] $H_0(\Delta)$ est somme directe des espaces $H_0(D_i')$ où $D_i' = \complement D_i$. On déduit très facilement du théorème 7, le:

Théorème 7 bis. *Soit K un corps valué complet algébriquement clos de caractéristique nulle et de caractéristique résiduelle p.*

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$ une série convergente, pour qu'elle soit la série de Taylor à l'origine d'un élément analytique dans un "bon" quasi-connexe Δ de K et nulle à l'infini, il faut et il suffit qu'il existe:

une suite $(\theta_i)_{i\geqslant 1}$, $\theta_i \in K$,

une suite m_i, $m_i \in \boldsymbol{N}$, $(m_i, p) = 1$,

pour tout couple (r_i, i), $0 \leqslant r_i < m_i$, une fonction $u_{r_i,i}$ continue sur $\boldsymbol{Z}_p$, tels que:

$$\lim_{i\to\infty} (\operatorname{Sup}_n |\theta_i^{-n} u_{r_i(n),i}(n)|) = 0$$

et

$$a_n = \sum_{j\geqslant 1} \theta_j^{-n} u_{r_j(n),j}\left(\frac{n-r_j(n)}{m_j}\right)$$

où $r_j(n)$ désigne le reste de n modulo m_j.

3.4. Module de continuité des coefficients de Taylor. Le théorème 1 montre que si la fonction $n \mapsto a_n$ se prolonge en une application continue de $\boldsymbol{Z}_p$ dans K la série de Taylor $\sum_{n\geqslant 0}^{\infty} a_n X^n$ est développable en série de Laurent, sous la forme:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{(1-X)^k} \quad \text{avec} \quad \lambda_k \to 0.$$

Le théorème qui va suivre montre que la façon dont la suite (λ_k) tend vers zéro dépend du module de continuité de la fonction $n \mapsto a_n$. Rappelons tout d'abord que si (u_n) est une suite très bien répartie [1] le n-ième polynôme d'interpolation sur la suite (u_n) est:

$$Q_n(x) = \frac{(x-u_0)(x-u_1)\ldots(x-u_{n-1})}{(u_n-u_0)(u_n-u_1)\ldots(u_n-u_{n-1})}$$

ainsi $(Q_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ est une base normale du $\boldsymbol{Q}_p$-espace de Banach $C(\boldsymbol{Z}_p, \boldsymbol{Q}_p)$ des fonctions continues de $\boldsymbol{Z}_p$ dans $\boldsymbol{Q}_p$ muni de la norme de la convergence uniforme [1].

Lemme 5. *Soit (u_n) une suite très bien répartie de $\boldsymbol{Z}_p$ et $n < p^k$, r un entier positif ou nul, alors:*

$$|x-y| \leqslant |p^{k+r}| \Rightarrow |Q_n(x)-Q_n(y)| \leqslant |p^{r+1}|.$$

Preuve. Si $a \in \boldsymbol{Z}_p$, $k \geqslant 1$, posons $V_k(a) = \{x \in \boldsymbol{Z}_p \mid |x-a| \leqslant |p|^k\}$. On sait [1] que pour $p^{k-1} \leqslant n < p^k$, $|Q_n(x)| = 1$ si et seulement si

$$\{u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}\} \cap V_k(x) = \emptyset.$$

De plus, il existe i_0 (nécessairement unique) tel que

$$|x-u_{i_0}| \leqslant |p|^k, \quad \text{alors} \quad |Q_n(x)| = |x-u_{i_0}|\,|p|^{1-k}.$$

Soient x et y tels que $|x-y| = |p|^{k+r}$, alors:

$$\frac{Q_n(y)}{Q_n(x)} = \left(1+\frac{y-x}{x-u_0}\right)\left(1+\frac{y-x}{x-u_1}\right)\ldots\left(1+\frac{y-x}{x-u_{n-1}}\right).$$

Donc:

$$\left|\frac{Q_n(y)}{Q_n(x)}-1\right| \leqslant \max_{0\leqslant i\leqslant n}\left\{\frac{|p|^{k+r}}{|x-u_i|}\right\}.$$

Si

$$|Q_n(x)| = 1, \quad \max_{0\leqslant i<n} \frac{|p|^{k+r}}{|x-u_i|} \leqslant |p|^{r+1} \quad \text{et} \quad |Q_n(x)-Q_n(y)| \leqslant |p|^{r+1}.$$

Sinon

$$\left|\frac{Q_n(y)}{Q_n(x)}-1\right| = \frac{|p|^{k+r}}{|x-u_{i_0}|} \quad \text{et} \quad |Q_n(y)-Q_n(x)| \leqslant \frac{|p|^{k+r}}{|x-u_{i_0}|}\cdot\frac{|x-u_{i_0}|}{|p|^{k+1}} = |p|^{r+1}.$$

Théorème 2 bis. *Soit $C(\boldsymbol{Z}_p, \boldsymbol{Q}_p)$ l'espace de Banach des fonctions continues de $\boldsymbol{Z}_p$ dans $\boldsymbol{Q}_p$. Soit $f \in C(\boldsymbol{Z}_p, \boldsymbol{Q}_p)$ telle que:*

(i) $\|f\| \leqslant 1$,

(ii) *il existe un entier u tel que, quel que soit k entier positif, quels que soient x et y dans $\boldsymbol{Z}_p$ satisfaisant $|x-y| \leqslant |p|^k$ on ait:*

$$|f(x)-f(y)| \leqslant |p^{k-u}|.$$

Soit $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n$ la série d'interpolation de f sur la suite (u_n), alors pour $n \geqslant p^{k+u}$ on a $|a_n| \leqslant |p|^k$.

Preuve. Soit $x \mapsto \bar{x}$ la surjection canonique de $\boldsymbol{Z}_p$ sur $\boldsymbol{Z}_p/p\boldsymbol{Z}_p$ si $g \in C(\boldsymbol{Z}_p, \boldsymbol{Z}_p)$ notons $\bar{g}$ l'application $x \mapsto \overline{g(x)}$ de $\boldsymbol{Z}_p$ dans $\boldsymbol{Z}_p/p\boldsymbol{Z}_p$. D'après l'hypothèse du théorème, $\bar{f}$ appartient au sous-espace E_{u+1} de $C(\boldsymbol{Z}_p, \boldsymbol{Z}_p/p\boldsymbol{Z}_p)$

des fonctions localement constantes sur les boules de rayon $|p^{u+1}|$, or $(Q_n)_{0\leqslant n<p^{u+1}}$ est une base de E_{u+1} [1], ainsi il existe p^{u+1} élément de $\boldsymbol{Z}_p$, $(a_n)_{0\leqslant n<p^{u+1}}$ tels que

$$f_1 = \frac{1}{p}\Big(f - \sum_{n=0}^{p^{u+1}-1} a_n Q_n\Big),$$

soit une fonction de $C(\boldsymbol{Z}_p, \boldsymbol{Z}_p)$. D'autre part, l'hypothèse (ii) du théorème et le lemme 4 montrent que f_1 est une fonction localement constante sur les boules de rayon $|p^{u+2}|$ et le théorème se laisse alors aisément démontrer par récurrence.

Notons que ce théorème admet une généralisation et une réciproque [7].

Bibliographie

[1] Yvette Amice, *Interpolation p-adique*, Bull. Soc. Math. France 92 (1964), p. 117–160.

[2] N. C. Ankeny, M. Artin, and S. Chowla, *On the class number of a quadratric number field*, Annals of Math. 56 (1952), p. 479–493.

[3] H. Bauer, *Numerische Bestimmung von Klassenzahlen reeller zyklischer Zahlkörper*, Journal of Number Theory 1 (1969), p. 161–162.

[4] Jean Fresnel, *Nombres de Bernoulli et fonctions L p-adiques*, Annales de l'Institut Fourier 17 (2) (1967), p. 281–333.

[5] — *Applications arithmétiques de la formule p-adique des résidus*, Sém. Delange Pisot Poitou (1966–1967), 8ème année N° 18.

[6] Laurent Gruson, *Algèbres de Banach ultramétriques*, Journées Poitou-Aquitaine de la S. M. F., Poitiers 1967.

[7] Eve Helsmoortel, *Comportement local des fonctions continues sur un compact régulier d'un corps local*, C. R. Acad. Sc. Paris, 271 (12), p. 546–548.

[8] Kenkichi Iwasawa, *On p-adic L-functions*, Annals of Math. 89 (1969), p. 198–205.

[9] Marc Krasner, *Prolongement analytique uniforme et multiforme dans le corps valués complets*, Les tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres, N° 143, Colloques internationaux du C.N.R.S.

[10] T. Kubota and H. W. Leopoldt, *Eine p-adische Theorie der Zetawerte. I. Einführung der p-adischen Dirichletschen L-Funktionen*, J. Reine Angew. Math. 2 14/215 (1964), p. 328–333.

[11] H. W. Leopoldt, *Eine Verallgemeinerung der Bernoullishen Zahlen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 22 (1958), p. 131–140.

[12] — *Zur Arithmetik in abelschen Zahlkörpern*, J. Reine Angew. Math. 209 (1962), p. 54–71.

[13] — *Über Fermatquotienten von Kreiseinheiten und Klassenzahlformeln modulo p*, Rend. Circ. Mat. Palermo 9 (1960), p. 39–50.

[14] I. S. Slavutski, *On Mordell's theorem*, Acta Arith. 11 (1965), p. 57–66.

Reçu le 15. 2. 1971 (145)

ACTA ARITHMETICA
XX (1972)

The Hausdorff dimension of sets related to g-expansions

by

JÁNOS GALAMBOS (Philadelphia, Pa.)*

1. Introduction. The classical theorem of Borel states that for $g = 2$, the digits $\{e_k\}$ in the expansion

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} e_k g^{-k}, \quad x \in (0, 1), \tag{1}$$

are stochastically independent with respect to Lebesgue measure, hence the law of large numbres implies that the relative frequency of 0's among $e_1, e_2, \ldots, e_N$ tends to $p = \frac{1}{2}$. By this same theorem we also have that, with any prescribed m, for almost all $x \in (0, 1)$, there are infinitely many k's such that $e_k = e_{k+1} = \ldots = e_{k+m} = 0$. These problems become very difficult if we take g in (1) to be $1 < g < 2$. The e_k's are no more independent, though the results quoted above for $g = 2$ remain to hold (except that $p = \frac{1}{2}$; it will be an expression in terms of g), see [8], [3] and [4]. Recently I came across a problem in mathematical statistics [5] where I needed the distribution of the length between two consecutive one's in the expression (1) if g is the (only) solution in (1, 2) of

$$z^{a+1} - z^a = 1 \tag{2}$$

with some integer $a \geqslant 1$. Note that if $a = 0$, then $g = 2$, hence the number theoretical problems related to (1) with this g are natural generalizations of Borel's investigations. In the present note I shall evaluate the Hausdorff dimension of the set of those x's for which the distance between any consecutive one's is bounded by M, a given number. Before giving the precise statement, however, I should specify the algorithm for (1). Without an algorithm, the digits e_k are not defined, as the following example shows this. Let $g = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$, the solution of (2) with $a = 1$. Then for $x = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ we have

$$x = \frac{1}{g} = \sum_{m=1}^{s} \frac{1}{g^{2m}} + \sum_{k=2s+3}^{+\infty} \frac{1}{g^k}$$

* The author was a recipient of Summer Faculty Research Award at Temple University.