- [10] L. Maurin, *Dualitätssatz für automorphe Funktionen auf einer lokalkompakten unimodulären Gruppe I, II*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. math., astronom., et phys., 14 (1966), pp. 493–496; 15 (1967), pp. 465–472.
- [11] Г. У. Ольшанский *О теореме двойственности Фробениуса*, Функциональный Анализ, 3 (1969), pp. 49–58.
- [12] A. Wawrzyńczyk, *A duality in the theory of group representations*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. math., astronom., et phys., 17 (1969), pp. 541–545.
- [13] — *A duality in the theory of group representations*, Studia Math., 36 (1970), pp. 227–257.

DEPARTMENT OF MATHEMATICAL METHODS IN PHYSICS
WARSAW UNIVERSITY

Received June 30, 1970

(228)

Über die Struktur der rationalen Operatoren in der zweidimensionalen diskreten Operatorenrechnung

von

WERNER JENTSCH (Halle)

Zusammenfassung. In der Mikusińskischen Operatorenrechnung sind die in p (Differentiationsoperator) echt gebrochenen rationalen Operatoren stetige Funktionen aus dem Grundring. Im Zweidimensionalen gilt ein entsprechender Satz nicht.

In der diskreten zweidimensionalen Operatorenrechnung ist der Grundring die Menge der für alle nichtnegativen ganzzahligen m, n definierten Funktionen. Man betrachtet hier Operatoren, die in p, q (Verschiebungsoperatoren) rational sind. Es werden Kriterien für die Zugehörigkeit solcher Operatoren zum Grundring angegeben. Die Ergebnisse lassen sich bei der Lösung linearer partieller Differenzgleichungen verwerten.

In der von J. Mikusiński begründeten Operatorenrechnung gehört bekanntlich der Integrationsoperator zum Integritätsbereich (der für $t \geq 0$ definierten und dort stetigen Funktionen), während das inverse Element, der Differentiationsoperator p , ein „eigentlicher“ Operator ist. Die in p echt gebrochenen rationalen Operatoren sind aber stetige Funktionen aus dem Integritätsbereich.

Eine analoge Rolle spielen in der diskreten Operatorenrechnung der Verschiebungsoperator v und sein inverses Element q . Der Operator v gehört zum Integritätsbereich (der für $n = 0, 1, \dots$ definierten Zahlenfolgen), während q ein (im zugehörigen Quotientenkörper existierender) eigentlicher Operator ist. Wie im kontinuierlichen Fall gilt dann analog, daß jeder in q echt gebrochene rationale Operator eine Zahlenfolge aus dem Integritätsbereich darstellt (s. etwa [1]).

In der zweidimensionalen Operatorenrechnung gelten die entsprechenden Sätze nicht, wie im kontinuierlichen Fall aus [9] und im diskreten aus [4] zu ersehen ist. Im letzteren Fall ist z. B. $1/(p-q)$ kein Element des Integritätsbereichs der für nichtnegative ganze m, n definierten Doppelfolgen. Die Operatoren p bzw. q sind dabei die inversen Elemente der Verschiebungsoperatoren u bzw. v ⁽¹⁾, die ihrerseits im Integritätsbereich

⁽¹⁾ $u = \begin{cases} 1 & \text{für } m = 1, n = 0, \\ 0 & \text{sonst;} \end{cases} \quad v = \begin{cases} 1 & \text{für } m = 0, n = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

liegen. Zwar lassen sich (durch Ausdehnung des Definitionsbereichs der Doppelfolgen auf alle Paare ganzer Zahlen) die in p, q rationalen Operatoren als Doppelfolgen in einem gewissen Körper auffassen (s. [5]), jedoch benötigt man, insbesondere im Hinblick auf die Lösung partieller Differenzgleichungen für Doppelfolgen nichtnegativer Variabler, Kriterien für die Zugehörigkeit eines in p, q rationalen Operators zum Integritätsbereich. Der Aufstellung solcher Kriterien dient die vorliegende Arbeit.

Folgende Definitionen übernehmen wir aus [4], [5]:

K Körper der komplexen Zahlen,

G^2 Menge aller Gitterpunkte (m, n) mit ganzzahligen m, n ,

G_+^2 Teilmenge von G^2 mit $m \geq 0, n \geq 0$,

D Menge aller auf G_+^2 definierten Doppelfolgen $a = \{a_{mn}\}$ mit $a_{mn} \in K$.

Q ist die Menge aller auf G^2 definierten Doppelfolgen $a = \{a_{mn}\}$ mit $a_{mn} \in K$, wobei es zu jedem $a \in Q, a \neq \{0\}$ ganze Zahlen M und f_m ($m \geq M$) gibt derart, daß gilt

$$a_{mn} = 0 \quad \text{für } m < M \text{ und alle } n \text{ und für } n < f_m, m \geq M,$$

$$a_{mf_m} \neq 0.$$

Für $m > M$ jedoch ist $f_m = \infty$, d.h. $a_{mn} = 0$ für alle n zugelassen, aber $f_M = N$ ist stets endlich, also

$$a_{MN} \neq 0.$$

Zur Kennzeichnung dieses Verhaltens werden die Elemente von Q auch mit $a = a(M, N, f_m)$ bezeichnet. Schließlich ist

$$D_0 = \{a \mid a \in Q, M \geq 0, f_m \geq 0\} \cup \{\{0\}\}.$$

Werden in D und Q die Addition in der üblichen Weise, die Multiplikation in D durch

$$ab = \left\{ \sum_{0,0}^{m,n} a_{ij} b_{m-i, n-j} \right\}$$

und in Q durch

$$ab = \left\{ \sum_{-\infty}^{\infty} a_{ij} b_{m-i, n-j} \right\}$$

eingeführt, dann bilden D und $D_0 \subset Q$ einen Integritätsbereich und Q einen kommutativen Körper. D und D_0 sind bzgl. beider Verknüpfungen isomorph, so daß sich D in Q einbetten läßt. Aus [5] entnehmen wir noch

HILFSSATZ 1. Es sei $a = a(0, 0, f_m) \in Q$ (also $a_{00} \neq 0$), dann gilt für das inverse Element b von a

$$b = b(0, 0, g_m) \quad \text{mit} \quad g_m \geq \min_{1 \leq i \leq m} (f_i + g_{m-i}), \quad m \geq 1,$$

wobei das Gleichheitszeichen steht, wenn das Minimum für genau ein i angenommen wird.

Hieraus ergibt sich leicht

HILFSSATZ 2. Es sei $a \in \delta_0 = \{a \mid a \in D_0, a_{00} \neq 0\}$, dann folgt $a^{-1} \in \delta_0$.

DEFINITIONEN.

1. Der Grad eines Polynoms $f(p, q)$ heißt (k, l) , wenn k der Grad von f bzgl. p und l der Grad bzgl. q ist.

2. Es heißt $(k, l) \leq (K, L)$, wenn $k \leq K$ und $l \leq L$ ist.

3. Es heißt $(k, l) < (K, L)$, wenn $k < K$ und $l \leq L$ oder $k \leq K$ und $l < L$ ist.

SATZ 1. Es seien $g(p, q) = \sum_{0,0}^{k,l} g_{ij} p^i q^j$ und $f(p, q) = \sum_{0,0}^{K,L} f_{ij} p^i q^j$ Polynome vom Grad (k, l) bzw. (K, L) , dann liegt der rationale Operator

$$x = \frac{g(p, q)}{f(p, q)}$$

im Grundring D , wenn

$$(1) \quad (k, l) \leq (K, L)$$

gilt und der Koeffizient von $p^K q^L$ im Nennerpolynom

$$(2) \quad f_{KL} \neq 0$$

ist.

Beweis. Es sei $g_{ij} \neq 0$ ein beliebiger, nicht verschwindender Koeffizient von $g(p, q)$, dann ist der Operator

$$x_{ij} = \frac{g_{ij} p^i q^j}{f(p, q)} \in D.$$

Betrachten wir zunächst

$$p^{K-i} q^{L-j} x_{ij} = \frac{g_{ij} p^K q^L}{f(p, q)} = y,$$

so folgt für den hierzu inversen Operator

$$y^{-1} = \frac{f_{KL}}{g_{ij}} + \sum_{\substack{k,l \\ (k,l) < (K,L)}} \frac{f_{kl}}{g_{ij}} p^{K-k} q^{L-l}.$$

Wegen Voraussetzung (2) gilt

$$y^{-1} = y^{-1}(0, 0, y_m) \quad \text{mit } y_m \geq 0,$$

also $y^{-1} \in \delta_0$. Aus Hilfssatz 2 folgt $y \in \delta_0$ und wegen $x_{ij} = p^{i-K} q^{j-L} y$ ergibt sich $x_{ij} \in D$, da nach Voraussetzung (1) $i-K \leq 0, j-L \leq 0$ gilt. Somit ist wegen $x = \sum_{0,0}^{k,l} x_{ij}$ der Satz bewiesen.

Bemerkung. Dieser Satz läßt sich auch als Folgerung des Satzes aus [8] auffassen. Betrachtet man nämlich dort eine homogene partielle Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten sowie speziell $l_k = l$ (wodurch die Fallunterscheidung gegenstandslos wird), dann lassen sich offenbar die Anfangsbedingungen (in diesem Falle $k+l$ Funktionen einer Variablen) so wählen, daß die Operatorarstellung der in D eindeutig existierenden Lösung x der partiellen Differenzengleichung (in unserer Bezeichnung) die Gestalt $x = p^k q^l / f(p, q)$ mit $f_{kl} = 1$ ((k, l) Grad von $f(p, q)$) besitzt. Um das zu erreichen sind z.B. im Fall $k = l = 1$ die Anfangsfunktionen $x_{m0} = (-f_{10})^m$ und $x_{0n} = (-f_{01})^n$ zu wählen.

Wie man sieht, ist die Voraussetzung (1) notwendig für $x \in D$, d.h. es gilt der

Satz 2. Ist $x = g(p, q) / f(p, q) \in D$ und ist (k, l) bzw. (K, L) der Grad von $g(p, q)$ bzw. $f(p, q)$, dann folgt $(k, l) \leq (K, L)$.

Beweis. Nehmen wir an, es sei $k > K$, dann läßt sich x in der Form

$$x = G(p, q) + \tilde{x}(p, q)$$

darstellen, wobei $G(p, q)$ ganzrational in p vom Grad $k-K > 0$ ist und nur Potenzen mindestens 1. Ordnung in p besitzt, während der Zählergrad $\tilde{k}$ von $\tilde{x}$ bzgl. p nicht größer ist als der Nennergrad K . G besitzt mindestens ein nichtverschwindendes Element in einer Zeile oberhalb der nullten ⁽²⁾, also ist $G \notin D$. $\tilde{x} = \tilde{g} / \tilde{f}$ braucht zwar nicht in D zu liegen, aber es gilt, wenn die Koeffizienten der höchsten Potenzen von p in $\tilde{g}$ bzw. $\tilde{f}$ mit $g_1(q)$ bzw. $f_1(q)$ bezeichnet werden,

$$f(p, q) = p^K f_1(q) f_2(p, q), \quad \tilde{g}(p, q) = p^{\tilde{k}} g_1(q) g_2(p, q),$$

wobei f_2 und g_2 vom Typ $a(0, 0, h_m)$ sind. Nach Hilfssatz 1 sind dann auch die Funktionen $1/f_2$ und, wie man leicht sieht, $x_2 = g_2/f_2$ von diesem Typ. Deshalb besitzt $\tilde{x} = p^{\tilde{k}-K} g_1 f_1^{-1} x_2$ wegen $\tilde{k}-K \leq 0$ oberhalb der nullten Zeile nur verschwindende Elemente, und es folgt

$$x = (G + \tilde{x}) \notin D.$$

Analog führt die Annahme $l > L$ auf $x \notin D$.

Im Gegensatz zu (1) ist die Bedingung (2) nicht notwendig für

$$x = g/f \in D.$$

Ein triviales Gegenbeispiel ist etwa $(p-q)/(p-q) = 1 \in D$ mit $f_{KL} = f_{11} = 0$. Das Ziel ist, unter möglichst geringen Einschränkungen für f und g eine hinreichende und notwendige Bedingung für $g/f \in D$ anzugeben. Wir betrachten zunächst einen Spezialfall.

⁽²⁾ Veranschaulichung der Operatoren als Matrizen s. [5], S. 92.

Satz 3. Es sei $g(p, q) = g_{kl} p^k q^l \neq 0, f(p, q) = f_{KL} p^K q^L + f_{K_1 L} p^{K_1} q^L$ mit $f_{KL_1} \neq 0, f_{K_1 L} \neq 0, K_1 < K, L_1 < L$, dann folgt

$$y = g(p, q) / f(p, q) \notin D.$$

Beweis. Wir führen die Bezeichnungen $f_{KL_1} / g_{kl} = A, f_{K_1 L} / g_{kl} = B, K - K_1 = r > 0, L - L_1 = s > 0$ ein, dann gilt

$$y^{-1} = A p^{K-k} q^{L-l-1} + B p^{K_1-k} q^{L-l-1} = p^{K-k} q^{K_1-l} \tilde{y}^{-1} \quad \text{mit} \quad \tilde{y}^{-1} = A + B p^{-r} q^s.$$

$\tilde{y}^{-1}$ ist also vom Typ $\tilde{y}^{-1}(0, 0, c_m)$ mit

$$(3) \quad c_m = \begin{cases} 0 & \text{für } m = 0, \\ -s & \text{für } m = r, \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach Hilfssatz 1 folgt dann $\tilde{y} = \tilde{y}(0, 0, d_m)$ und für die „Spaltenindizes“ d_m von $\tilde{y}$ ergibt sich für $r > 1$ die Behauptung

$$(4) \quad d_m = \begin{cases} \infty & \text{für } (a-1)r < m < ar, \\ -sa & \text{für } m = ar \end{cases} \quad (a = 1, 2, \dots).$$

Der Beweis wird mit vollständiger Induktion bzgl. a geführt. Wegen (3) folgt für $0 < m < r$

$$\min_{1 \leq i \leq m} (c_i + d_{m-i}) = \infty$$

und aus Hilfssatz 1 ergibt sich

$$(5) \quad d_m = \infty \quad \text{für } 0 < m < r.$$

Wenn $m = r$ ist, liefern (3) und (5) für das

$$\min_{1 \leq i \leq r} (c_i + d_{r-i}) = -s,$$

da $c_i + d_{r-i} = \infty$ ist für $i = 1, \dots, r-1$ und $c_r + d_0 = -s$ ist; das Minimum wird also nur für $i = r$ angenommen und nach Hilfssatz 1 folgt

$$(6) \quad d_r = -s.$$

Die Gleichungen (5) und (6) ergeben die Behauptung (4) für $a = 1$. Setzen wir voraus, daß (6) für ein beliebiges $a \geq 1$ erfüllt ist. Es wird gezeigt, daß

$$(7) \quad d_m = \begin{cases} \infty & \text{für } ar < m < (a+1)r, \\ -s(a+1) & \text{für } m = (a+1)r \end{cases}$$

gilt. Für $m = ar + b$ ($0 < b < r$) ist nämlich

$$\min_{1 \leq i \leq m} (c_i + d_{m-i}) = \infty,$$

denn für $i \neq r$ ist nach (3) $c_i = \infty$ und für $i = r$ ist nach Induktionsvoraussetzung $d_{m-i} = d_{(a-1)r+b} = \infty$. Für $m = (a+1)r$ dagegen ist

$$\min_{1 \leq i \leq m} (c_i + d_{m-i}) = -s(a+1),$$

da wegen (3) wiederum alle Summanden ∞ sind, außer für $i = r$. In diesem Fall ergibt sich gemäß (3) und Induktionsvoraussetzung $c_r + d_{(a+1)r-r} = c_r + d_{ar} = -s(a+1)$. Aus Hilfssatz 1 folgt damit die Behauptung (7), womit der Induktionsbeweis geführt ist. Somit ist $\tilde{y} \notin D$ und, da für

$$a \rightarrow +\infty, \quad d_{ra} = -sa \rightarrow -\infty \quad \text{strebt,}$$

folgt schließlich, daß sogar $y = p^{k-K} q^{l-L} \tilde{y} \notin D$ ist, auch wenn $l - L_1 < 0$ gilt.

Für $r = 1$ vereinfachen sich Behauptung und Beweis. Die Aussage (4) lautet dann

$$d_m = -ms \quad \text{für alle } m \geq 0.$$

Eine wesentlich allgemeinere Aussage liefert

SATZ 4. *Es sei*

$$g(p, q) = g_{kl} p^k q^l \neq 0, \quad f(p, q) = \sum_{0,0}^{K,L} f_{ij} p^i q^j$$

ein Polynom vom Grade $(K, L) \geq (1, 1)$ mit $f_{KL} = 0$, dann gilt

$$x = \frac{g(p, q)}{f(p, q)} \notin D.$$

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es nichtnegative ganze Zahlen K_1 und L_1 mit $f_{K_1 L_1} \neq 0$, $f_{iL} = 0$ für $i > K_1$ und

$$f_{KL_1} \neq 0, \quad f_{Kj} = 0 \quad \text{für } j > L_1,$$

wobei wegen $f_{KL} = 0$ noch $K - K_1 = r > 0$ und $L - L_1 = s > 0$ gilt. In Analogie zum Beweis von Satz 3 werde durch die Gleichung

$$(8) \quad x = p^{k-K} q^{l-L_1} z$$

eine Funktion z eingeführt, die vom Typ $z(0, 0, b_m)$ ist. Dies folgt aus Hilfssatz 1, da der inverse Operator von z vom Typ $z^{-1}(0, 0, a_m)$ ist, was aus der Darstellung

$$(9) \quad z^{-1} = a + b p^{-r} q^s + \sum_{j=0}^{L_1-1} h_{Kj} q^{j-L_1} + q^s \sum_{i=0}^{K_1-1} h_{iL} p^{i-K} + \sum_{i=0}^{K-1} \sum_{j=0}^{L-1} h_{ij} p^{i-K} q^{j-L_1}$$

ersichtlich ist. In (9) wurde

$$\frac{f_{KL_1}}{g_{kl}} = a \neq 0, \quad \frac{f_{K_1 L}}{g_{kl}} = b \neq 0 \quad \text{und} \quad \frac{f_{ij}}{g_{kl}} = h_{ij} \quad \text{für die übrigen } i, j$$

gesetzt. Aus (9) folgt für die zu z^{-1} gehörige Folge $\{a_m\}$

$$(10) \quad \begin{aligned} a_0 &= 0, \\ a_m &\geq -s+1 \quad \text{für } 0 < m < r, \\ a_r &= -s, \\ a_m &\geq -s \quad \text{für } r < m \leq K, \\ a_m &= \infty \quad \text{für } K < m. \end{aligned}$$

Es wird gezeigt, daß man aus der zu z gehörigen Folge $\{b_m\}$ eine Teilfolge $\{b_{n_m}\}$ mit

$$(11) \quad b_{n_m} \rightarrow -\infty$$

auswählen kann, woraus sich in Verbindung mit (8) die Behauptung des Satzes ergibt.

Genauer weisen wir nach: es existiert eine Teilfolge $\{n_m\}$ der natürlichen Zahlen mit

$$(12) \quad 0 < n_{m+1} - n_m \leq r \quad (m = 0, 1, \dots),$$

so daß für die zugehörige Folge $\{b_{n_m}\}$ ($b_{n_m} \leq 0$, ganz) die Ungleichung

$$(13) \quad b_{n_{m+1}} < b_{n_m} \quad (m = 0, 1, \dots),$$

also auch (11) erfüllt ist.

Wir führen den Nachweis für $m = 0$. Da z vom Typ $z(0, 0, b_m)$ ist, gilt $b_0 = 0$. Wir setzen $n_0 = 0$ und haben also $b_{n_0} = 0$. Es sind nun zwei Fälle möglich. Als 1. Fall betrachten wir

$$(14) \quad b_0 \leq b_m \quad \text{für } 0 < m < r,$$

dann folgt aus Hilfssatz 1 die Gleichung $b_r = -s$, da das $\min_{1 \leq i < r} (a_i + b_{r-i}) = -s$ wegen $a_i + b_{r-i} \geq -s+1$ für $1 \leq i < r$ (Folgerung aus (10) und (14)) nur für $i = r$ angenommen wird. Wir setzen in diesem Fall $r = n_1$ und haben $b_{n_1} = -s < b_{n_0}$. Im 2. Fall sei (14) nicht erfüllt, dann gibt es bereits einen positiven „minimalen“ Index $n_1 < r$ mit $b_{n_1} < b_0$ und $b_m \geq b_0$ für $m < n_1$. Es gelten also in beiden Fällen die Ungleichungen (12), (13) für $m = 0$.

Wir setzen jetzt voraus, daß die Ungleichungen (12), (13) bis zu einem gewissen $m \geq 0$ gelten und weisen nach, daß es dann auch eine natürliche Zahl n_{m+2} gibt mit der Eigenschaft

$$(12') \quad 0 < n_{m+2} - n_{m+1} \leq r,$$

$$(13') \quad b_{n_{m+2}} < b_{n_{m+1}}.$$

Dazu nehmen wir wieder eine Fallunterscheidung vor. Zur Abkürzung schreiben wir $n_{m+1} = t$ und $a_i + b_{t+r-i} = c_i$.

1. Fall: Es gelte

$$(15) \quad b_i \leq b_m \quad \text{für } t < m < t+r.$$

Daraus folgt wieder mit Hilfssatz 1

$$b_{t+r} = \min_{1 \leq i \leq t+r} c_i = a_r + b_t = -s + b_t,$$

da auf Grund der Ungleichungen

$$\begin{aligned} c_i &\geq -s + 1 + b_t && \text{für } 1 \leq i < r \quad \text{bzw.} \\ c_i &\geq -s + b_{n_m} > -s + b_t && \text{für } r < i \leq K \quad \text{bzw.} \\ c_i &= \infty && \text{für } K < i \quad (\text{falls } t+r > K \text{ ist}), \end{aligned}$$

die wegen (10) und (15) bzw. (10) und Induktionsvoraussetzung (13) bzw. $a_i = \infty$ für $i > K$ erfüllt sind, das Minimum nur für $i = r$ angenommen wird. Mit der Bezeichnung $t+r = n_{m+2}$ folgen (12'), (13').

2. Fall: Es gelte (15) nicht, dann gibt es ein minimales $u < t+r$ ($u > t$) mit $b_u < b_t$ und $b_m \geq b_t$ für $m < u$. Es existiert also auch im 2. Fall eine natürliche Zahl $u = n_{m+2}$ mit der Eigenschaft (12'), (13').

Damit ist der Induktionsbeweis geführt, die Existenz einer Folge $\{b_{n_m}\}$ mit dem Verhalten (11) nachgewiesen und der Beweis des Satzes 4 beendet.

Es entsteht die Frage, wie das Zählerpolynom $g(p, q)$ verallgemeinert werden kann, so daß die Behauptung des Satzes 4 weiter gilt. Man erkennt sofort

SATZ 5. Es sei

$$g(p, q) = \sum_{0,0}^{k,l} g_{ij} p^i q^j \quad \text{mit} \quad g_{kl} \neq 0$$

und

$$f(p, q) = \sum_{0,0}^{K,L} f_{ij} p^i q^j \quad \text{vom} \quad \text{Grad } (K, L) \geq (1, 1)$$

mit

$$f_{KL} = 0,$$

dann gilt

$$\frac{g(p, q)}{f(p, q)} \notin D.$$

Zum Beweis genügt die Bemerkung, daß wegen

$$\frac{g_{ij} p^i q^j}{f(p, q)} = \frac{g_{ij}}{g_{kl}} u^{k-i} v^{l-j} \frac{g_{kl} p^k q^l}{f(p, q)}$$

alle Glieder von $g(p, q)/f(p, q)$ durch Verschiebung der Funktion $g_{kl} p^k q^l / f(p, q) \notin D$ nach „unten“ oder „rechts“⁽³⁾ und Multiplikation mit einer Konstanten entstehen.

Die Bedingung $g_{kl} \neq 0$ wiederum ist nicht notwendig für $g(p, q)/f(p, q) \notin D$, wie das Beispiel

$$\frac{p+q}{p-q} = \begin{cases} 1 & \text{für } m = n = 0, \\ 2 & \text{für } m = -n = 1, 2, \dots, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \notin D \quad \text{zeigt.}$$

Zusammenfassend ergibt sich

SATZ 6. Es seien $f(p, q)$ bzw. $g(p, q)$ Polynome vom Grad $(K, L) \geq (1, 1)$ bzw. (k, l) und es sei $g_{kl} \neq 0$, dann ist die Bedingung

$$(16) \quad (k, l) \leq (K, L) \quad \text{und} \quad f_{KL} \neq 0$$

notwendig und hinreichend dafür, daß $\frac{g(p, q)}{f(p, q)} \in D$ ist.

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingung folgt aus den Sätzen 2 und 5; daß sie hinreicht, folgt aus Satz 1.

Bemerkung. zu Satz 4. Über die Struktur der Folgen $\{n_m\}$ und $\{b_{n_m}\}$ kann man unter spezielleren Voraussetzungen schärfere Aussagen als die in Satz 4 angegebenen Ungleichungen (12), (13) herleiten. Bei den einfachen Spezialfällen $r = 1$ (s beliebig) bzw. $s = 1$ (r beliebig) ergeben sich für $m = 0, 1, \dots$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} n_m &= m, & b_m &= -sm \quad \text{bzw.} \\ n_m &= rm, & b_{rm} &= -m. \end{aligned}$$

Ist $s > 2$, $r > 1$, aber speziell $a_1 = -s + 1$, dann ergibt sich mit Hilfssatz 1 unter Beachtung, daß das $\min_{1 \leq i \leq m} (a_i + b_{m-i})$ bei beliebigem m nur für $i = 1$ angenommen wird,

$$n_m = m, \quad b_m = -(s-1)m.$$

Ist speziell $a_m \geq 0$ für $0 < m < r$, dann erhält man

$$n_m = rm, \quad b_{rm} = -sm$$

und $b_{rm+i} \geq -sm$ für $0 < i < r$.

Etwas komplizierter ist es, den Fall $s = 2$ ($r > 1$) vollständig zu erfassen. Es lassen sich folgende drei Möglichkeiten unterscheiden:

$$(a) \quad \begin{aligned} a_m &\geq 0 \quad \text{für} \quad 0 < m < t \quad (\text{falls } t > 1), \\ a_t &= -1, \quad 1 \leq t \leq [(r-1)/2] \quad (r \geq 3), \end{aligned}$$

(3) s. Fußnote (2)

- (b) $a_m \geq 0$ für $0 < m < t$, $[(r+2)/2] \leq t \leq r$ ($r \geq 2$),
 $a_t = -1$, falls $t < r$,
- (c) $a_m \geq 0$ für $0 < m < t$ (falls $t > 1$),
 $a_t = -1$, $t = r/2$ (r gerade, $r \geq 2$).

Man erhält für

- (a) $n_m = tm$, $b_{tm} = -m$,
 (b) $n_m = rm$, $b_{rm} = -2m$,
 (c) $n_{m+1} \leq n_m + r$, $b_{n_m} = -m$.

Die Beweise seien angedeutet:

(a) Man zeigt $b_{tm} = -m$, $b_{tm+u} \geq -m$ ($u = 1, \dots, t-1$; $m = 0, 1, \dots$) für $m = 0$ mit Hilfe der Betrachtung von $\min_{1 \leq i \leq u} (a_i + b_{u-i})$ und beim Induktionsschluß von m auf $m+1$ folgt etwa

$$b_{t(m+1)} = \min_{1 \leq i \leq t(m+1)} (a_i + b_{t(m+1)-i}) = -(m+1),$$

da $a_i + b_{tm+t-i} \geq -m$ ist für alle i außer für $i = t$.

Bei Fall (b) läßt sich in analoger Weise wie bei (a) zeigen, daß die Beziehungen

$$\begin{aligned} b_{rm} &= -2m, \\ b_{rm+u} &\geq -2m \quad (0 < u < t), \\ b_{rm+u} &\geq -2m-1 \quad (t \leq u < r) \end{aligned}$$

gelten.

Schließlich kann man im Fall (c) beweisen, daß für alle $m = 0, 1, \dots$ gilt

$$(17) \quad b_{tm+u} \geq -m \quad (0 \leq u < t)$$

und

$$(18) \quad b_{tm} = -m$$

oder

$$(18') \quad b_{t(m+1)} = -(m+1).$$

Für $m = 0$ ist die Behauptung leicht ersichtlich. Es werde vorausgesetzt, daß sowohl (17) als auch (18) oder (18') bis zu einem gewissen $m \geq 0$ gelten. Dann folgt nach Hilfssatz 1 die Ungleichung

$$(19) \quad b_{t(m+1)} \geq -(m+1)$$

(das ist (17), wenn man dort $m+1$ statt m und $u = 0$ setzt), weil das

$$\min_{1 \leq i \leq t(m+1)} (a_i + b_{t(m+1)-i}) \geq (m \geq 1)$$

ist. Dies schließt man aus

$$a_i + b_{t(m+1)-i} \geq \begin{cases} -1-m & \text{für } i = t, \\ -2-(m-1) & \text{für } i = 2t = r, \\ -m & \text{sonst} \end{cases}$$

wegen der Induktionsvoraussetzung (17) und der für die a_i vorausgesetzten Werte. Entsprechend ergibt sich

$$(20) \quad b_{t(m+1)+u} \geq -(m+1) \quad \text{für } 0 < u < t.$$

Nun ist noch zu zeigen, daß

$$(21) \quad b_{t(m+1)} = -(m+1)$$

oder

$$(21') \quad b_{t(m+2)} = -(m+2)$$

gilt. Nimmt man an, daß (21) nicht gilt, dann folgt wegen (19) die Ungleichung

$$(22) \quad b_{t(m+1)} \geq -m.$$

Aus der Induktionsvoraussetzung und der Ungleichung (20) ergibt sich dann, daß das

$$\min_{1 \leq i \leq t(m+2)} (a_i + b_{t(m+2)-i}) = -(m+2)$$

nur für $i = r$ angenommen wird. Man darf jetzt nämlich (18) benutzen, da ja (21), d.h. (18') nicht erfüllt sein soll. Nach Hilfssatz 1 folgt also: wenn (21) nicht gilt, dann gilt (21').

ANWENDUNG

Wir betrachten einige Beispiele von linearen partiellen Differenzengleichungen und untersuchen die bei Benutzung der zweidimensionalen diskreten Operatorenrechnung auftretenden Terme mit Hilfe der Sätze 1 bzw. 6 auf ihre Zugehörigkeit zum Grundring D .

1. Bei der in [2] behandelten Gleichung besteht die Operatordarstellung der Lösung, wie in [6] gezeigt ist, aus Termen der Gestalt

$$\frac{g(p, q)}{p^2 q^2 - p q^2 - p^2 q + 3 p q - p^2 - q^2}$$

$(g(p, q))$ Polynom vom Grad $(k, l) \leq (2, 2)$. Wegen $(k, l) \leq (K, L) = (2, 2)$ und $f_{KL} = f_{22} = 1$ liegt nach Satz 1 die Lösung in D .

2. Bei dem in [7] behandelten System von partiellen Differenzengleichungen entstehen Lösungsterme der Gestalt

$$y = \frac{g(p, q)}{p^2 q + apq + bp + c}$$

(a, b, c nichtverschwindende Konstanten), wobei der Zählergrad $(k, l) \leq (2, 1)$ ist. Wegen $f_{KL} = f_{21} = 1$ folgt $y \in D$.

3. Die bei Diskretisierung der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung entstehende Differenzengleichung

$$Y_{m+1, n+1} - \frac{1}{2} Y_{m, n+2} - \frac{1}{2} Y_{m, n} = 0 \quad (m, n \geq 0)$$

(s. etwa [3]) liefert Terme der Gestalt

$$y = \frac{pq}{pq + aq^2 + b} \quad (a \neq 0, b \neq 0 \text{ Konstanten}).$$

Hier ist zwar $(k, l) = (1, 1) < (1, 2) = (K, L)$, aber $f_{KL} = f_{12} = 0$, so daß nach Satz 6 ($g_{kl} = g_{11} = 1$) $y \notin D$ folgt. Als Funktion aus dem Funktorenkörper Q läßt sich, wie man leicht sieht, y in der Gestalt

$$y = \begin{cases} \frac{(-1)^m + (-1)^n}{2} \binom{m}{(m+n)/2} a^{(m-n)/2} b^{(m+n)/2} & \text{für } -m \leq n \leq m, m \geq 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

schreiben.

4. Für den Operator

$$z = \frac{p^2}{p^2 - aq^2 + bpq - c}$$

(a, b, c Konstanten) gilt $z \notin D$, denn es ist $f_{KL} = f_{22} = 0$ und $g_{kl} = g_{20} = 1$. Wie man nach einiger Rechnung erkennt, läßt sich z als Element von Q durch

$$z_{mn} = \frac{1 + (-1)^{m+n}}{2} c^{(m+n)/2} \sum_{i=0}^{[-n/2]} \binom{-n-i}{i} \times \\ \times \binom{-(m-n)/2-i}{-n-i} a^i b^{-n-2i} \quad \text{für } -m \leq n \leq 0, m \geq 0$$

(und $z = 0$ sonst) darstellen.

Literatur

- [1] L. Berg, *Einführung in die Operatorenrechnung*, Berlin 1962.
- [2] L. Carlitz, *A partial difference equation related to the Fibonacci numbers*, Fibonacci Quart., 2 (1964), S. 185–196.
- [3] R. Courant, K. Friedrichs und H. Levy, *Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik*, Math. Ann. 100, (1928), S. 32–74.
- [4] W. Jentsch, *Operatorenrechnung für Funktionen zweier diskreter Variabler*, Wiss. Z. Univ. Halle 14, M4 (1965), S. 311–318.
- [5] — *Charakterisierung der Quotienten in der zweidimensionalen diskreten Operatorenrechnung*, Studia Math. 26 (1965), S. 91–99.
- [6] — *On a partial difference equation of L. Carlitz*, Fibonacci Quart. 4, 3 (1966), S. 202–208.
- [7] — *Über die Lösung eines Systems partieller Differenzengleichungen aus der technischen Chemie*, ZAMM 48, 3 (1968), S. 212–213.
- [8] *On an initial-value problem for linear partial difference equations*, Fibonacci Quart. (1971), im Druck.
- [9] S. Vasilach, *Sur un calcul opérationnel algébrique pour fonctions de deux variables*, Revue de Mathém. pures et appliquées, II, (1957), S. 181–238.

SEKTION MATHEMATIK DER
MARTIN-LUTHER-UNIVERSITÄT HALLE/S.

Received October 10, 1970

(259)