

F. J A R Z Y Ń S K I et K. W R Z E Ś N I O W S K I (Poznań)

**APPLICATION DE LA MÉTHODE DE KRYLOFF
À LA SOLUTION DE L'ÉQUATION DE FRÉQUENCE
DÉCRIVANT LES FAIBLES VIBRATIONS DU TREILLIS**

1. Introduction. La solution du problème de vibrations des systèmes matériels amène aux équations différentielles non linéaires qui, avec assez de précision, décrivent les qualités des systèmes réels en vibration. Toutefois il s'avère, qu'en général, on ne peut pas résoudre ces équations à l'aide du nombre fini des carrés. Dans certains cas, une équation exacte du mouvement peut être remplacée par une équation linéaire, ce qui pourtant ne nous donne que la solution approximative du problème. On obtient l'équation linéarisée du mouvement, par exemple, pendant l'examen des faibles vibrations des systèmes matériels au cas où, dans les formules pour l'énergie cinétique et l'énergie potentielle, nous retiendrons seulement les valeurs constantes.

Supposons un système holonomique, scléronomique à n degrés de liberté. Si nous admettons qu'on peut appliquer ici le principe de la conservation de l'énergie et si nous limitons nos considérations aux vibrations libres, on pourra alors décrire le mouvement du système, entre autres, avec l'équation de Lagrange, deuxième formule,

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

où T désigne l'énergie cinétique du système, V — l'énergie potentielle du système, q_j — coordonnées communes et \dot{q}_j — vitesses communes.

L'énergie cinétique d'un système matériel peut être représentée sous la forme positive de quadrature des vitesses communes aux coefficients constants

$$(2) \quad T = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n h_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k,$$

où h_{jk} désignent les coefficients d'inertie du système.

Dans les calculs pratiques nous n'examinons que les vibrations que subit le système entier, sans prendre en considération les vibrations propres à chaque barre, celles-ci exerçant peu d'influence sur le comportement du treillis dans son ensemble. Nous admettons d'habitude que les masses des barres sont concentrées dans les noeuds et nous supposons les déplacements de ces masses uniquement dans le sens vertical. Il s'ensuit que le nombre des degrés de liberté diminue jusqu'à $k-2$. Comme coordonnées communes, nous considérons les amplitudes verticales des masses concentrées par rapport à l'état d'équilibre constante du système.

Nous présentons l'énergie cinétique du système analysé sous la forme d'une somme des carrés,

$$(5) \quad T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j \dot{y}_j^2,$$

où m_j désigne la masse concentrée au noeud j et \dot{y}_j — vitesse commune de la masse m_j .

Pour déterminer l'énergie potentielle du système, nous examinons le treillis chargé statiquement par les forces concentrées S_1, \dots, S_n respectivement aux noeuds $1, \dots, n$.

Soient les déplacements des noeuds égaux, à y_1, \dots, y_n . L'énergie de déformation élastique du treillis est égale au travail des forces S_j dans les déplacements y_j et se présente

$$(6) \quad V = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n S_j y_j.$$

Exprimons les déplacements par les forces

$$(7) \quad y_j = \sum_{k=1}^n \delta_{jk} S_k, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

où δ_{jk} désigne le coefficient d'influence. Ce coefficient est égal au déplacement du noeud j soumis à la force $S_k = 1_k$ appliquée au noeud k et orientée suivant la direction du déplacement y_k .

D'après le théorème de Maxwell on a $\delta_{jk} = \delta_{kj}$. On résout le système d'équation (7) par rapport à S_j et on trouve

$$(8) \quad S_j = \sum_{k=1}^n a_{jk} y_k, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

En substituant la formule (8) aux équations décrivant l'énergie potentielle (6), nous obtenons

$$(9) \quad V = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n a_{jk} y_j y_k.$$

du déterminant, la réduction de celui-ci sous forme de polynôme est assez compliquée. Ainsi on applique des méthodes spéciales de simplification à la solution numérique du problème.

Dans notre étude nous présentons la méthode de Kryloff [1] qui amène l'équation (13) à une forme de polynôme. On obtient alors une équation comme suit :

$$(14) \quad D(\omega) = \begin{vmatrix} b_{11} + \omega^2 & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} - \omega^4 & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} + \omega^{2n} & b_{n2} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Le développement de cette équation selon les puissances ω peut se faire d'une manière plus simple en développant le déterminant d'après les minors de la première colonne. Nous mettons

$$(15) \quad x = y_1,$$

où x est une variable auxiliaire.

Procédant deux fois à la différentiation de l'égalité (15) par rapport à la variable temporelle t et substituant à \ddot{y}_1 une formule respective du système d'équations (10), nous obtenons

$$\ddot{x} = r_{11}y_1 + r_{12}y_2 + \dots + r_{1j}y_j + \dots + r_{1n}y_n.$$

Procédant de nouveau deux fois à la différentiation de l'équation ci-dessus, nous obtenons

$$x^{IV} = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \dots + b_{2j}y_j + \dots + b_{2n}y_n.$$

En continuant de composer les équations pour les dérivées successives $x^{VI}, x^{VIII}, \dots, x^{2n}$ d'après la manière ci-dessus nous arrivons au système d'équations

$$(16) \quad \begin{aligned} x &= y_1, \\ \ddot{x} &= b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \dots + b_{1j}y_j + \dots + b_{1n}y_n, \\ x^{IV} &= b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \dots + b_{2j}y_j + \dots + b_{2n}y_n, \\ &\dots \dots \dots \\ x^{2n} &= b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \dots + b_{nj}y_j + \dots + b_{nn}y_n, \end{aligned}$$

dont les coefficients b_{jk} sont définis par les formules récurrentes

$$b_{jk} = \sum_{s=1}^n b_{j-1,s} r_{sk}, \quad b_{1k} = r_{1k},$$

où $j = 2, 3, \dots, n$ et $k = 1, 2, \dots, n$.

Les variables y étant éliminées du système d'équations (16), nous obtenons une seule équation différentielle ordinaire du $2n$ -ième ordre avec une inconnue x :

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\ddot{x} & b_{11} & b_{12} & b_{1j} & b_{1n} \\ -x^{IV} & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -x^{2n} & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Sa solution admise sous la forme $x = C_1 \sin(\omega t + \vartheta)$, où C_1 désigne une constante, pour définir ω nous obtenons l'équation

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \omega^2 & b_{11} & b_{12} & b_{1j} & b_{1n} \\ -\omega^4 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega^{2n} & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

La première colonne additionnée à la seconde, nous amenons cette équation à la forme (14). Nous écrivons

$$(17) \quad D_0 \doteq \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

et par D_j désignons le complément algébrique des éléments de la première colonne et nous mettons $\omega^2 = \lambda$. L'équation (14) donc, en formule développée se présente ainsi

$$D_0 + \lambda D_1 + \lambda^2 D_2 + \dots + \lambda^n D_n = 0$$

ou bien nous introduisons les désignations

$$(18) \quad \frac{D_{n-1}}{D_n} = p_1, \quad \frac{D_{n-2}}{D_n} = p_2, \quad \dots, \quad \frac{D_0}{D_n} = p_n,$$

$$(19) \quad \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1} \lambda + p_n = 0.$$

L'équation (19) est du n -ième degré par rapport à λ et possède n racines qu'on peut déterminer avec les méthodes connues.

Exemple. Déterminons les vibrations propres du treillis (Fig. 1) à l'aide des données suivantes: $k - 2 = 7$, $E = 2,1 \cdot 10^6$ kG/cm², $m_1 = m_7 = 0,5$ kGsek²/cm, $m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = m_6 = 1,0$ kGsek²/cm.

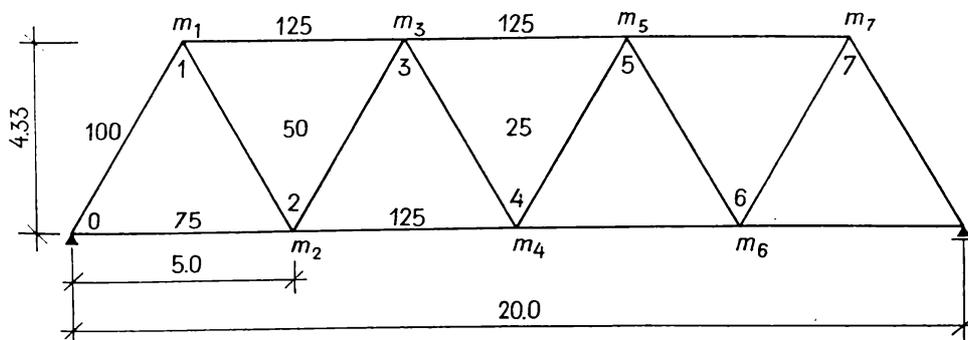


Fig. 1

Nous calculons les coefficients d'influence δ_{jk} de la formule de Maxwell et Mohr,

$$\delta_{jk} = \sum \frac{Z_j Z_k}{EA} l, \quad j, k = 1, \dots, n,$$

où Z_j — efforts dans les barres du système, provoqués par la force $S_j = 1_j$ appliquée au noeud j , Z_k — efforts dans les barres du système, provoqués par la force $S_k = 1_k$ appliquée au noeud k .

Nous profitons du fait que le système est symétrique et nous calculons séparément le cas de vibrations symétriques — noeud 0, 2, 4, 6, et le cas de vibrations antisymétriques — noeud 1, 3, 5. Nous considérons la moitié du treillis dont les conditions aux limites sur l'axe de symétrie sont connues.

Vibrations symétriques.

Les coefficients d'influence δ_{jk} :

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= 12,222 \cdot E^{-1}, & \delta_{22} &= 35,555 \cdot E^{-1}, & \delta_{34} &= 60,889 \cdot E^{-1}, \\ \delta_{12} &= 15,555 \cdot E^{-1}, & \delta_{23} &= 39,555 \cdot E^{-1}, & \delta_{44} &= 90,223 \cdot E^{-1}. \\ \delta_{13} &= 17,555 \cdot E^{-1}, & \delta_{24} &= 40,889 \cdot E^{-1}, \\ \delta_{14} &= 18,222 \cdot E^{-1}, & \delta_{33} &= 58,889 \cdot E^{-1}, \end{aligned}$$

Coefficients r_{jk} :

$$\begin{aligned} r_{11} &= -369,51580 \cdot 10^{-3} E, & r_{21} &= 77,37985 \cdot 10^{-3} E, \\ r_{12} &= 154,75970 \cdot 10^{-3} E, & r_{22} &= -143,69016 \cdot 10^{-3} E, \\ r_{13} &= 5,15402 \cdot 10^{-3} E, & r_{23} &= 73,48500 \cdot 10^{-3} E = r_{32}, \\ r_{14} &= 1,01296 \cdot 10^{-3} E, & r_{24} &= -0,25010 \cdot 10^{-3} E = r_{42}, \\ r_{31} &= 2,57701 \cdot 10^{-3} E, & r_{41} &= 0,50641 \cdot 10^{-3} E, \\ r_{33} &= -106,44486 \cdot 10^{-3} E, & r_{44} &= -36,67700 \cdot 10^{-3} E. \\ r_{34} &= 37,93921 \cdot 10^{-3} E = r_{43}, \end{aligned}$$

Coefficients b_{jk} :

$$\begin{aligned} b_{21} &= 14,853100 \cdot 10^{-2} E^2, & b_{33} &= -6,006279 \cdot 10^{-3} E^3, \\ b_{22} &= -7,904512 \cdot 10^{-2} E^2, & b_{34} &= 0,519463 \cdot 10^{-3} E^3, \\ b_{23} &= 0,895784 \cdot 10^{-2} E^2, & b_{41} &= 252,256748 \cdot 10^{-4} E^4, \\ b_{24} &= -0,025464 \cdot 10^{-2} E^2, & b_{42} &= -149,080338 \cdot 10^{-4} E^4, \\ b_{31} &= -60,978092 \cdot 10^{-3} E^3, & b_{43} &= 29,169566 \cdot 10^{-4} E^4, \\ b_{32} &= 35,002953 \cdot 10^{-3} E^3, & b_{44} &= -3,174507 \cdot 10^{-4} E^4. \end{aligned}$$

De la formule (17) nous obtenons

$$\begin{aligned} D_0 &= 0,272868 \cdot 10^{-10} E^{10}, & D_3 &= -5,331969 \cdot 10^{-7} E^7, \\ D_1 &= -4,053616 \cdot 10^{-9} E^9, & D_4 &= 0,812472 \cdot 10^{-6} E^6, \\ D_2 &= 9,081443 \cdot 10^{-8} E^8, \end{aligned}$$

Des formules (18) nous obtenons

$$\begin{aligned} p_1 &= -0,65626 \cdot E, & p_3 &= -0,004989 \cdot E^3, \\ p_2 &= 0,11177 \cdot E^2, & p_4 &= 0,000033 \cdot E^4. \end{aligned}$$

Ainsi l'équation de fréquence sous la forme développée conformément à (19) se présente

$$\lambda^4 - 1,378146 \cdot 10^6 \lambda^3 + 0,492906 \cdot 10^{12} \lambda^2 - 0,046203 \cdot 10^{18} \lambda + 0,000642 \cdot 10^{24} = 0.$$

Cette équation, selon la règle cartésienne, a quatre racines réelles et positives qu'on a calculées d'après la méthode de Graeffe. Voici leurs valeurs approximatives:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0,876070 \cdot 10^6, & \lambda_5 &= 0,037531 \cdot 10^6, \\ \lambda_3 &= 0,377383 \cdot 10^6, & \lambda_7 &= 0,000529 \cdot 10^6. \end{aligned}$$

Vibrations antisymétriques.

Coefficients d'influence δ_{jk} :

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= 8,750 \cdot E^{-1}, & \delta_{22} &= 17,222 \cdot E^{-1}, \\ \delta_{12} &= 7,500 \cdot E^{-1}, & \delta_{23} &= 12,278 \cdot E^{-1}, \\ \delta_{13} &= 5,583 \cdot E^{-1}, & \delta_{33} &= 18,806 \cdot E^{-1}. \end{aligned}$$

Coefficients r_{jk} :

$$\begin{aligned} r_{11} &= -3,50060 \cdot 10^{-1} E, & r_{33} &= -0,37782 \cdot 10^{-1} E, \\ r_{12} &= 1,52874 \cdot 10^{-1} E, & r_{24} &= 0,76437 \cdot 10^{-1} E, \\ r_{13} &= 0,08572 \cdot 10^{-1} E, & r_{22} &= -1,40630 \cdot 10^{-1} E, \\ r_{31} &= 0,04286 \cdot 10^{-1} E, & r_{23} &= 0,69123 \cdot 10^{-1} E. \end{aligned}$$

Coefficients b_{jk} :

$$\begin{aligned} b_{21} &= 14,499077 \cdot 10^{-2} E^2, & b_{31} &= -58,763683 \cdot 10^{-3} E^3, \\ b_{22} &= -7,671433 \cdot 10^{-2} E^2, & b_{32} &= 32,974145 \cdot 10^{-3} E^3, \\ b_{23} &= 0,711395 \cdot 10^{-2} E^2, & b_{33} &= -4,328643 \cdot 10^{-3} E^3. \end{aligned}$$

De la formule (17):

$$\begin{aligned} D_0 &= -1,212963 \cdot 10^{-6} E^6, & D_2 &= -9,443914 \cdot 10^{-4} E^4, \\ D_1 &= 9,749253 \cdot 10^{-5} E^5, & D_3 &= 1,745133 \cdot 10^{-3} E^3. \end{aligned}$$

Des formules (18)

$$p_1 = -0,541157 \cdot E, \quad p_2 = 0,055865 \cdot E^2, \quad p_3 = -0,000695 \cdot E^3.$$

Conformément à (19):

$$\lambda^3 - 1,136430 \cdot 10^6 \lambda^2 + 0,246315 \cdot 10^{12} \lambda - 0,006436 \cdot 10^{18} = 0.$$

Valeurs approximatives des racines:

$$\lambda_2 = 0,859546 \cdot 10^6, \quad \lambda_4 = 0,247756 \cdot 10^6, \quad \lambda_6 = 0,030062 \cdot 10^6.$$

Les racines λ_j ($j = 1, 2, \dots, 7$) sont ordonnées de façon que $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_7$; ainsi le numérotage des fréquences circulaires de vibrations doit être inverse. Les fréquences de vibrations exprimées en hertz, $\lambda = \omega^2$ pris en considération, nous obtenons

$$\begin{aligned} n_1 &= 3,66 \text{ Hz}, & n_3 &= 30,85 \text{ Hz}, & n_5 &= 97,82 \text{ Hz}, & n_7 &= 149,04 \text{ Hz}. \\ n_2 &= 27,59 \text{ Hz}, & n_4 &= 79,26 \text{ Hz}, & n_6 &= 147,63 \text{ Hz}, \end{aligned}$$

Outre la méthode de Kryloff d'autres sont connues comme, par exemple, celles, proposées par Leverrière et Danilewski ainsi que la méthode d'interpolation. En comparaison avec la manière de Danilewski, la méthode de Kryloff, tout en présentant un schéma de calcul plus compliqué, exige moins d'opérations et permet d'obtenir les résultats avec assez d'exactitude. La méthode de Leverrière et celle d'interpolation nécessitent un nombre plus grand d'opérations. L'importance de la méthode d'interpolation consiste en son caractère général.

La méthode de Kryloff peut être aussi appliquée dans l'examen des vibrations des systèmes linéaires, où agissent des efforts de résistance et de frottement. Mais dans le cas où le mouvement du système d'élasticité aux masses concentrées conduit aux équations différentielles non linéaires, cette méthode ne peut plus y être prise en considération.

Travaux cités

- [1] А. Н. Крылов, *О численном решении уравнения, которым в технических вопросах определяются частоты малых колебаний материальных систем*, Известия АН СССР (1931), p. 491-539.
- [2] E. Pohlhausen, *Berechnung der Eigenschwingungen statisch bestimmter Fachwerke*, ZAMM 1 (1921), p. 28-42.

Reçu le 4. 4. 1971

F. JARZYŃSKI i K. WRZEŚNIO WSKI (Poznań)

**ZASTOSOWANIE METODY KRYŁOWA DO ROZWIĄZANIA RÓWNAŃ
CZĘSTOŚCI MAŁYCH DRGAŃ UKŁADÓW KRATOWYCH****STRESZCZENIE**

W pracy podano zwięźle teorię małych drgań układów zachowawczych ze szczególnym uwzględnieniem układów kratowych statycznie wyznaczalnych. Ruch swobodny układu opisano za pomocą równań Lagrange'a drugiego rodzaju (10) i w konsekwencji otrzymano równanie częstości (13) jako warunek występowania drgań bez udziału sił zewnętrznych. Wykazano dalej, że sprowadzając to równanie do postaci wielomianowej według schematu podanego przez Kryłowa [1], można równanie częstości (13) zastąpić równaniem równoważnym (14), co ma bardzo istotne znaczenie przy numerycznym rozwiązywaniu zagadnień. Na końcu pracy omówiono krótko inne metody upraszczające rozwiązanie równania częstości i porównano je z metodą Kryłowa. Praca zawiera przykład liczbowy.