ACTA ARITHMETICA
XXIII (1973)

Sur un théorème de Rényi III

par

HUBERT DELANGE (Paris)

1. Introduction. Soient $\omega(n)$ le nombre des diviseurs premiers de l'entier positif n, et $\Omega(n)$ le nombre total des facteurs dans la décomposition de n en facteurs premiers.

Il est clair que l'on a toujours $\Omega(n)-\omega(n)\geqslant 0$, l'égalité ayant lieu pour les entiers „quadratfrei".

Rényi a montré (1) que, pour chaque entier $q\geqslant 0$, l'ensemble des n pour lesquels on a $\Omega(n)-\omega(n)=q$ possède une densité d_q, la suite des nombres d_q étant déterminée par le fait que l'on a pour $|z|<2$

$$\sum_{q=0}^{+\infty} d_q z^q = \prod\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{p-z}\right) = \frac{6}{\pi^2}\prod\frac{1-z/(p+1)}{1-z/p},$$

p parcourant dans ces produits la suite des nombres premiers (2).

Si l'on désigne par $\nu_q(x)$ le nombre des n au plus égaux à x pour lesquels on a $\Omega(n)-\omega(n)=q$, le résultat de Rényi se traduit par la relation

$$\nu_q(x) = d_q x + o(x) \qquad (x\to+\infty).$$

On peut chercher à obtenir une évaluation plus précise de $\nu_q(x)$.

Ainsi, nous avons montré dans un article précédent (3) que, pour $q\geqslant 1$,

$$\nu_q(x) = d_q x + O\left(\frac{x^{1/2}(\log\log x)^{q-1}}{\log x}\right).$$

En fait on peut obtenir un développement asymptotique. Nous allons en effet établir ici le résultat suivant:

---

(1) *On the density of certain sequences of integers*, Publications de l'Institut de Mathématiques de l'Académie Serbe des Sciences 8 (1955), p. 157–162.

(2) Tout au long de cet article, la lettre p désigne toujours un nombre premier. Dans toute somme ou tout produit portant sur une expression ou figure p, il est entendu que p parcourt la suite des nombres premiers.

Les lettres m, n et k désignent toujours des entiers $\geqslant 1$.

(3) *Sur un théorème de Rényi II*, Acta Arith. 13 (1968), p. 339–362.

Pour chaque entier $q \geqslant 1$, il existe une suite de polynomes à coefficients réels $P_1, P_2, \ldots, P_j, \ldots$, de degré $\leqslant q-1$, telle que, quel que soit $m \geqslant 1$, on a quand x tend vers $+\infty$

$$\nu_q(x) = d_q x + x^{1/2} \sum_{j=1}^{m} \frac{P_j(\log\log x)}{(\log x)^{j+1}} + O\left(\frac{x^{1/2}(\log\log x)^{q-1}}{(\log x)^{m+2}}\right).$$

Ce résultat a été énoncé pour la première fois par B. Saffari, qui en a donné une démonstration dans le cas où $q = 1$ et a indiqué comment on pourrait traiter le cas général ([4]). Cependant la démonstration du cas général suivant les principes qu'il indique paraît très difficile à mettre sur pied.

Le cas où $q = 1$ a été aussi traité indépendamment par W. Schwarz ([5]).

Faĭnleĭb a donné une démonstration pour le cas général, sous l'hypothèse que la borne supérieure des parties réelles des zéros de la fonction ζ de Riemann est < 1 ([6]).

Nous suivons une méthode différente de celle de Faĭnleĭb. Nous utilisons l'additivité de la fonction $\Omega - \omega$, alors que Faĭnleĭb utilise le fait que sa valeur pour n ne dépend que de l'entier q_n défini par

$q_n = \prod_{\lambda_j > 1} p_j^{\lambda_j}$ si $n = p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \ldots p_k^{\lambda_k}$, où $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sont des nombres premiers distincts et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ des entiers $\geqslant 1$,

et

$q_1 = 1$.

Nous remarquons que $\nu_q(x)$ est le coefficient de z^q dans la somme $\sum_{n \leqslant x} z^{\Omega(n)-\omega(n)}$ (qui est un polynome en z) et nous établissons un développement asymptotique de cette somme pour x tendant vers $+\infty$.

En fait, ici, nous généraliserons un peu le problème en considérant, au lieu de la fonction $\Omega - \omega$, une fonction additive f à valeurs entières $\geqslant 0$, assujettie seulement à satisfaire à

$$f(p) = 0 \quad \text{et} \quad f(p^2) = 1 \quad \text{pour tout } p \text{ premier}.$$

Ainsi $f(n)$ pourrait être, par exemple, au lieu de $\Omega(n) - \omega(n)$, le nombre des nombres premiers qui figurent dans la factorisation de n avec un exposant > 1, ou bien le nombre de ceux qui y figurent avec un exposant pair.

Nous désignerons encore par $\nu_q(x)$ le nombre des n au plus égaux à x pour lesquels $f(n) = q$, où q est un entier donné $\geqslant 0$.

([4]) *Sur quelques applications de la méthode de l'hyperbole de Dirichlet à la théorie des nombres premiers*, L'Enseignement Mathématique, 14 (1968), p. 205–224.

([5]) *Eine Bemerkung zu einer asymptotischen Formel von Herrn Renyi*, Archiv der Mathematik, 21 (1970), p. 157–166.

([6]) *Локальные теоремы с остаточным члом для одного класса арифметических функций*, Acta Mathematica Acad. Scient. Hungar., 21 (1970), p. 271–281.

Nous établirons un théorème — que nous appellerons „théorème fondamental" — fournissant un développement asymptotique de la somme $\sum_{n \leqslant x} z^{f(n)}$ pour x tendant vers $+\infty$. Nous déduirons aisément de là l'évaluation asymptotique de $\nu_q(x)$.

La démonstration du théorème fondamental se divise en trois parties.

On introduit des fonctions arithmétiques g_z et h_ϱ liées à f et dépendant respectivement du nombre complexe z et du nombre réel positif ou nul ϱ. Ces fonctions sont déterminées de façon que

$$\sum_{n \leqslant x} z^{f(n)} = \sum_{mn \leqslant x} g_z(m) \quad \text{pour} \quad x \geqslant 1$$

et que $|g_z(n)| \leqslant h_\varrho(n)$ pour $|z| \leqslant \varrho$.

ϱ étant fixé, de façon convenable, on commence par évaluer les expressions

$$G_z(x) = \sum_{n \leqslant x} g_z(n) \quad (\text{où } |z| \leqslant \varrho)$$

et

$$H_\varrho(x) = \sum_{n \leqslant x} h_\varrho(n).$$

La première s'écrit comme somme d'un terme principal et d'un reste de la forme $O\big(x^{1/2}\exp(-a\sqrt{\log x})\big)$, où a est une constante positive ([7]).

On déduit ensuite de là une évaluation du même genre de la somme $\sum_{n \leqslant x} z^{f(n)}$.

Enfin, on passe de là au développement asymptotique de cette dernière somme.

Nous terminerons notre article en indiquant très brièvement des généralisations possibles.

Un certain nombre de raisonnements sont semblables à ceux de notre article *Sur des formules de Atle Selberg* ([8]). Dans la suite, nous désignerons celui-ci par AS.

Tout au long de cet article, lorsque x est un nombre réel > 0, nous désignons par $\log x$ la valeur réelle du logarithme de x. Pour z réel ou complexe non réel $\leqslant 0$, nous désignons par $\operatorname{Log} z$ la valeur du logarithme de z dans laquelle le coefficient de i est de valeur absolue $< \pi$. Ainsi Log est une fonction holomorphe dans C privé de l'ensemble des nombres réels $\leqslant 0$, et, pour x réel > 0, $\operatorname{Log} x = \log x$.

([7]) On pourrait établir un résultat meilleur, où $a\sqrt{\log x}$ serait remplacé par quelque chose qui tend plus rapidement vers $+\infty$. Mais celui-ci suffit pour le but que nous poursuivons.

([8]) Acta Arithmetica, 19 (1971), p. 105–146.

Toutes les fois qu'il apparaît une expression de la forme a^b, où a et b sont deux nombres complexes, a n'étant pas réel $\leqslant 0$, il est entendu qu'elle est prise égale à $\exp\{b \operatorname{Log} a\}$.

2. Enoncé du théorème fondamental. *Soit f une fonction arithmétique additive à valeurs entières $\geqslant 0$.*

On suppose que l'on a pour chaque p premier

$$f(p) = 0 \quad \text{et} \quad f(p^2) = 1.$$

Pour chaque z complexe, soit g_z la fonction multiplicative déterminée par la condition que

$$g_z(p^k) = z^{f(p^k)} - z^{f(p^{k-1})} \quad \text{pour tout } p \text{ premier et tout } k \geqslant 1.$$

(Ceci donne en particulier $g_z(p) = 0$ et $g_z(p^2) = z-1$).

De même, pour chaque ϱ réel $\geqslant 0$, soit h_ϱ la fonction multiplicative déterminée par

$$h_\varrho(p^k) = \begin{cases} \varrho^{f(p^k)} + \varrho^{f(p^{k-1})} & \text{si} \quad f(p^k) \neq f(p^{k-1}), \\ 0 & \text{si} \quad f(p^k) = f(p^{k-1}), \end{cases}$$

(de sorte que $h_\varrho(p) = 0$ et $h_\varrho(p^2) = 1+\varrho$).

Pour chaque $\varrho \geqslant 0$, définissons $\sigma_0(\varrho)$ comme étant la borne inférieure de l'ensemble des σ réels $> \frac{1}{3}$ pour lesquels on a

$$\sum_{\substack{p,k \\ k\geqslant 3}} \frac{h_\varrho(p^k)}{p^{k\sigma}} < +\infty \tag{1}$$

si cet ensemble n'est pas vide, et $+\infty$ dans le cas contraire.

Il est clair que $\sigma_0(\varrho)$ est une fonction non décroissante de ϱ et que, si $\sigma_0(\varrho) < +\infty$, on a (1) pour tout $\sigma > \sigma_0(\varrho)$.

Il est clair également que, pour $\varrho \leqslant 1$, $\sigma_0(\varrho) = \frac{1}{3}$.

Soit I l'ensemble des $\varrho \geqslant 0$ tels que $\sigma_0(\varrho) < \frac{1}{2}$, et soit R la borne supérieure (finie ou égale à $+\infty$) de l'ensemble I.

Il est clair que $R \geqslant 1$, puisque $1 \in I$, et que I est soit l'intervalle $[0, R[$, soit l'intervalle fermé $[0, R]$ (avec alors $R < +\infty$).

Ceci dit, on a le résultat suivant.

Il existe une fonction F et des fonctions $A_0, A_1, \ldots, A_j, \ldots$ définies pour $|z| \in I$, holomorphes dans le disque ouvert $|z| < R$, et en outre continues sur le disque fermé $|z| \leqslant R$ dans le cas où $R \in I$, telles que: quel que soit l'entier $N \geqslant 0$, pour tout z tel que $|z| \in I$, on a quand x tend vers $+\infty$

$$\sum_{n\leqslant x} z^{f(n)} = xF(z) + x^{1/2}(\log x)^{z-2}\left\{\sum_{j=0}^{N} \frac{A_j(z)}{(\log x)^j} + O\left(\frac{1}{(\log x)^{N+1}}\right)\right\}, \tag{2}$$

et, quel que soit $\varrho > 0$ appartenant à I, le O est uniforme pour $|z| \leqslant \varrho$ (9).

On a $F(z) = \prod\left(1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{g_z(p^k)}{p^k}\right)$.

Les fonctions A_j sont déterminées comme suit:

Pour tout z tel que $|z| \in I$, la formule

$$\mathscr{G}(s, z) = \prod\left(1 - \frac{1}{p^{2s}}\right)^{z-1}\left[1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{g_z(p^k)}{p^{ks}}\right]$$

définit $\mathscr{G}(s, z)$ au moins pour $\operatorname{Re} s > \sigma_0(|z|)$, et $\mathscr{G}(s, z)$ est une fonction de s holomorphe dans ce demi-plan (10).

l étant une fonction holomorphe dans un voisinage ouvert V du point 1 ne contenant pas de zéro de la fonction ζ, égale à 0 pour $s = 1$ et telle que, pour $s \in V$ et $s \neq 1$, $\exp l(s) = (s-1)\zeta(s)$, la fonction de s égale à

$$2^{1-z}\mathscr{G}(s, z)\frac{\zeta(s)}{s}\exp[(z-1)l(2s)]$$

est holomorphe sur l'ensemble des $s \neq 1$ tels que $\operatorname{Re} s > \sigma_0(|z|)$ et $2s \in V$, ensemble qui est un voisinage ouvert du point $\frac{1}{2}$.

---

(9) La démonstration pourrait être un peu simplifiée si l'on se contentait d'établir la formule (2), avec un O uniforme, pour $|z| < 1$, ce qui suffirait en fait pour l'application que nous avons en vue.

(10) On peut remarquer que, lorsque la série $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{g_z(p^k)}{p^{ks}}$ est convergente avec $\operatorname{Re} s > 0$, on a

$$1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{g_z(p^k)}{p^{ks}} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{g_z(p^j)}{p^{js}} = \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{z^{f(p^j)}}{p^{js}} = \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)\left[1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^{f(p^k)}}{p^{ks}}\right],$$

car $\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{z^{f(p^j)}}{p^{js}}$ est la série produit de Cauchy des séries $\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{p^{js}}$ et $\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{g_z(p^j)}{p^{js}}$.

Ainsi la formule qui définit la fonction $\mathscr{G}$, et celle donnée plus haut pour F, pourraient s'écrire

$$\mathscr{G}(s, z) = \prod\left(1 - \frac{1}{p^{2s}}\right)^z\left(1 + \frac{1}{p^s}\right)^{-1}\left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^{f(p^k)}}{p^{ks}}\right)$$

et

$$F(z) = \prod\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^{f(p^k)}}{p^k}\right).$$

Si son développement de Taylor au voisinage du point $\frac{1}{2}$ *est*

$$\sum_{j=0}^{+\infty} B_j(z)\,(s-\tfrac{1}{2})^j,$$

on a

$$A_j(z) = \frac{B_j(z)}{\Gamma(z-j-1)}\ ^{(11)}$$

(de sorte que $A_j(0) = 0$*).*

On a en particulier

$$A_0(z) = 4\zeta(\tfrac{1}{2})\frac{2^{-z}}{\Gamma(z-1)}\prod\left(1-\frac{1}{p}\right)^z\left(1+\frac{1}{\sqrt{p}}\right)^{-1}\left(1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{z^{f(p^k)}}{p^{k/2}}\right).$$

Dans le cas particulier où $f = \Omega-\omega$, on a $R = \sqrt{2}$, $I = [0, \sqrt{2}[$,

$$F(z) = \prod\left(1+\frac{z-1}{p(p-z)}\right) = \frac{6}{\pi^2}\prod\frac{1-z/(p+1)}{1-z/p},$$

les A_j sont des fonctions méromorphes dont les pôles sont les racines carrées des nombres premiers, et en particulier

$$A_0(z) = 4\zeta(\tfrac{1}{2})\frac{2^{-z}}{\Gamma(z-1)}\prod\left(1-\frac{1}{p}\right)^z\frac{1-z/(1+\sqrt{p})}{1-z/\sqrt{p}}.$$

3. Préliminaires.

3.1. Dans tout ce qui suit, D, Δ et Δ^* sont des domaines de C déterminés une fois pour toutes de la façon suivante.

Soient $t_0 \geqslant e$ et $a > 0$ et $\leqslant \frac{1}{2}\log t_0$ tels que $\zeta(\sigma+it) \neq 0$ si l'on a

ou bien $|t| \geqslant t_0$ et $\sigma > 1-\dfrac{a}{\log|t|}$,

ou bien $|t| < t_0$ et $\sigma > 1-\dfrac{a}{\log t_0}$.

D est l'ensemble des $s = \sigma+it$ pour lesquels l'une ou l'autre des conditions ci-dessus est satisfaite.

Δ est l'ensemble des s tels que $2s$ appartienne à D.

Δ^* est l'ensemble obtenu en enlevant de Δ le segment

$$\left]\frac{1}{2}\left(1-\frac{a}{\log t_0}\right), \frac{1}{2}\right].$$

D, Δ et Δ^* sont évidemment des domaines simplement connexes.

Nous désignons par l la fonction holomorphe dans D définie comme étant la branche de $\log(s-1)\zeta(s)$ qui prend la valeur zéro pour $s = 1$.

(11) Il est évident que ceci ne dépend pas du choix du voisinage V.

La fonction définie dans Δ^* comme prenant la valeur

$$l(2s)+\operatorname{Log}\frac{1}{2s-1}$$

est évidemment une branche holomorphe de $\log\zeta(2s)$. C'est d'ailleurs celle qui est réelle pour s réel $> \frac{1}{2}$, et elle est égale pour $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$ à $\sum_{p,k}\dfrac{1}{kp^{2ks}}$.

D'après des résultats bien connus, étant donné le nombre réel a' satisfaisant à $0 < a' < a$, il existe une constante K, dépendant de a', telle que, pour $s = \sigma+it$ avec $|t| \geqslant t_0$ et $\sigma \geqslant 1-\dfrac{a'}{\log|t|}$,

$$\left|l(s)+\operatorname{Log}\frac{1}{s-1}\right| \leqslant \log\log|t|+K.$$

3.2. Nous allons maintenant établir les faits suivants:

1. On peut définir $\mathscr{G}(s, z)$ pour tout couple (s, z) tel que $|z| \in I$ et $\operatorname{Re} s > \sigma_0(|z|)$ par la formule

$$\mathscr{G}(s, z) = \prod\left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right)^{z-1}\left(1+\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{g_z(p^k)}{p^{ks}}\right); \tag{3}$$

2. Pour chaque z tel que $|z| \in I$, $\mathscr{G}(s, z)$ est une fonction de s holomorphe dans le demi-plan $\operatorname{Re} s > \sigma_0(|z|)$;

3. Quels que soient $\varrho \in I$ et $\sigma_1 > \sigma_0(\varrho)$, $\mathscr{G}(s, z)$ est borné pour $\operatorname{Re} s \geqslant \sigma_1$ et $|z| \leqslant \varrho$.

Il est clair qu'il suffit pour cela de montrer que, si $\varrho \in I$, on a les faits suivants:

4. Pour chaque p, la série $\sum_{k=2}^{+\infty}\dfrac{g_z(p^k)}{p^{ks}}$ est absolument convergente pour $|z| \leqslant \varrho$ et $\operatorname{Re} s > \sigma_0(\varrho)$;

5. Quel que soit $\sigma_1 > \sigma_0(\varrho)$, le produit infini

$$\prod\left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right)^{z-1}\left(1+\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{g_z(p^k)}{p^{ks}}\right)$$

est uniformément convergent pour $|z| \leqslant \varrho$ et $\operatorname{Re} s \geqslant \sigma_1$ et est borné pour ces valeurs de s et z.

3.2.1. Soit donc $\varrho \in I$.

Remarquons d'abord que, si $\sigma_1 > \sigma_0(\varrho)$, comme on a

$$\sum_{\substack{p,k\\ k\geqslant 3}}\frac{h_\varrho(p^k)}{p^{k\sigma_1}} < +\infty,$$

on a pour chaque p

$$\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{h_\varrho(p^k)}{p^{k\sigma_1}} < +\infty.$$

Il en résulte que la série

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{g_z(p^k)}{p^{ks}}$$

est absolument convergente pour $|z| \leqslant \varrho$ et $\operatorname{Re} s \geqslant \sigma_1$, puisque l'on a alors $|g_z(p^k)| \leqslant h_\varrho(p^k)$ et $|p^s| \geqslant p^{\sigma_1}$.

Comme σ_1 est aussi voisin que l'on veut de $\sigma_0(\varrho)$, ceci établit le point 4 ci-dessus.

3.2.2. Ainsi, pour $|z| \leqslant \varrho$ et $\operatorname{Re} s > \sigma_0(\varrho)$ tous les facteurs du produit infini

$$\prod \left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right)^{z-1} \left(1+\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{g_z(p^k)}{p^{ks}}\right)$$

sont définis.

Le terme général peut s'écrire

$$\big(1+u_p(s,z)\big)\exp\big(-v_p(s,z)\big),$$

où

$$u_p(s,z) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{g_z(p^k)}{p^{ks}} \quad \text{et} \quad v_p(s,z) = (z-1)\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{kp^{2ks}}.$$

Fixons un $\sigma_1 > \sigma_0(\varrho)$.

Si $|z| \leqslant \varrho$ et $\operatorname{Re} s \geqslant \sigma_1$, on a pour chaque p

$$|u_p(s,z)| \leqslant U_p, \quad \text{où} \quad U_p = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{h_\varrho(p^k)}{p^{k\sigma_1}} = \frac{1+\varrho}{p^{2\sigma_1}} + \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{h_\varrho(p^k)}{p^{k\sigma_1}}.$$

Mais, puisque

$$\sum_p \left(\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{h_\varrho(p^k)}{p^{k\sigma_1}}\right) < +\infty,$$

on a

$$\sum_p \left(\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{h_\varrho(p^k)}{p^{k\sigma_1}}\right)^2 < +\infty.$$

Comme, par ailleurs, $\sum_p \big((1+\varrho)/p^{2\sigma_1}\big)^2 < +\infty$ puisque $\sigma_1 > \frac{1}{4}$, on a $\sum U_p^2 < +\infty$.

Par ailleurs, pour $|z| \leqslant \varrho$ et $\operatorname{Re} s \geqslant \sigma_1$, on a

$$u_p(s,z) - v_p(s,z) = \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{g_z(p^k)}{p^{ks}} - (z-1)\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{kp^{2ks}},$$

de sorte que

$$|u_p(s,z) - v_p(s,z)| \leqslant V_p,$$

où

$$V_p = \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{h_\varrho(p^k)}{p^{k\sigma_1}} + (1+\varrho)\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{kp^{2k\sigma_1}}.$$

On voit que $\sum V_p = +\infty$.

Ainsi le lemme du paragraphe 3.1 de notre article AS montre que le produit infini

$$\prod \left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right)^{z-1} \left(1+\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{g_z(p^k)}{p^{ks}}\right)$$

est uniformément convergent pour $|z| \leqslant \varrho$ et $\operatorname{Re} s \geqslant \sigma_1$, et est borné pou ces valeurs de s et z.

3.3. Par des raisonnements semblables à ceux des paragraphes 3.2.1 et 3.2.2, on établit encore les faits suivants:

6. On peut définir $\mathscr{G}^*(s,\varrho)$ pour tout couple (s,ϱ) tel que $\varrho \in I$ et $\operatorname{Re} s > \sigma_0(\varrho)$ par la formule

$$\mathscr{G}^*(s,\varrho) = \prod \left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right)^{1+\varrho} \left(1+\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{h_\varrho(p^k)}{p^{ks}}\right); \tag{4}$$

7. Pour chaque $\varrho \in I$, $\mathscr{G}^*(s,\varrho)$ est une function de s holomorphe dans le demi-plan $\operatorname{Re} s > \sigma_0(\varrho)$, et bornée dans tout demi-plan $\operatorname{Re} s \geqslant \sigma_1$ où $\sigma_1 > \sigma_0(\varrho)$.

3.4. Ceci dit, definissons $\mathscr{H}(s,z)$ pour tous les couples (s,z) tels que $|z| \in I$, $s \in \Delta$ et $\operatorname{Re} s > \sigma_0(|z|)$ par

$$\mathscr{H}(s,z) = 2^{1-z}\mathscr{G}(s,z)\exp\{(z-1)l(2s)\},$$

et aussi $\mathscr{H}^*(s,\varrho)$ pour tous les couples (s,ϱ) tels que $\varrho \in I$, $s \in \Delta$ et $\operatorname{Re} s > \sigma_0(\varrho)$ par

$$\mathscr{H}^*(s,\varrho) = 2^{-1-\varrho}\mathscr{G}^*(s,\varrho)\exp\{(1+\varrho)l(2s)\}.$$

Ainsi, pour chaque z tel que $|z| \in I$, $\mathscr{H}(s,z)$ est une fonction de s holomorphe dans le domaine intersection de Δ avec le demi-plan $\operatorname{Re} s > \sigma_0(|z|)$, domaine qui contient le point $\frac{1}{2}$.

De même, pour chaque $\varrho \in I$, $\mathscr{H}^*(s,\varrho)$ est une fonction de s holomorphe dans le domaine intersection de Δ avec le demi-plan $\operatorname{Re} s > \sigma_0(\varrho)$.

Pour chaque z tel que $|z| \in I$, $\frac{\zeta(s)}{s}\mathscr{H}(s, z)$ est représentable au voisinage du point $\frac{1}{2}$ par une série entière en $s-\frac{1}{2}$, soit

$$\sum_{j=0}^{+\infty} B_j(z)(s-\tfrac{1}{2})^j.$$

Conformément à ce qui a été dit dans l'énoncé du théorème fondamental, nous définirons les fonctions A_j pour $|z| \in I$ par

$$A_j(z) = \frac{B_j(z)}{\Gamma(z-j-1)}.$$

On voit que l'on a en particulier

$$A_0(z) = \frac{B_0(z)}{\Gamma(z-1)} = \frac{1}{\Gamma(z-1)}\, 2\zeta(\tfrac{1}{2})\mathscr{H}(\tfrac{1}{2}, z) = \frac{2^{2-z}}{\Gamma(z-1)}\zeta(\tfrac{1}{2})\mathscr{G}(\tfrac{1}{2}, z)$$

$$= 4\zeta(\tfrac{1}{2})\frac{2^{-z}}{\Gamma(z-1)}\prod\left(1-\frac{1}{p}\right)^{z-1}\left(1+\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{g_z(p^k)}{p^{k/2}}\right)$$

$$= 4\zeta(\tfrac{1}{2})\frac{2^{-z}}{\Gamma(z-1)}\prod\left(1-\frac{1}{p}\right)^{z}\left(1+\frac{1}{\sqrt{p}}\right)^{-1}\left(1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{z^{f(p_k)}}{p^{k/2}}\right).\ (^{12})$$

3.4.1. Remarquons que nous n'avons pas besoin d'établir ici les propriétés des fonctions A_j indiquées dans l'énoncé du théorème. Elles seront établies *ipso facto* lorsque nous aurons montré que F est holomorphe dans le disque ouvert $|z| < R$, et en outre continue sur le disque fermé $|z| \leqslant R$ si $R \in I$, et que l'on a la formule (2) pour tout $N \geqslant 0$ et tout z tel que $|z| \in I$, le O étant uniforme pour $|z| \leqslant \varrho$ quel que soit $\varrho \in I$.

En effet, on saura alors que, si $\varrho \in I$, quand x tend vers $+\infty$, le produit

$$x^{-1/2}(\log x)^{2-z}\Big(\sum_{n\leqslant x} z^{f(n)} - xF(z)\Big)$$

converge uniformément pour $|z| \leqslant \varrho$ vers $A_0(z)$, et, pour chaque $m \geqslant 1$, l'expression

$$(\log x)^m\left\{x^{-1/2}(\log x)^{2-z}\Big(\sum_{n\leqslant x} z^{f(n)} - xF(z)\Big) - \sum_{j=0}^{m-1}\frac{A_j(z)}{(\log x)^j}\right\}$$

converge uniformément pour $|z| \leqslant \varrho$ vers $A_m(z)$.

Ceci montre de proche en proche que les fonctions $A_0, A_1, \ldots, A_j, \ldots$ sont holomorphes dans le disque ouvert $|z| < R$ et, si $R \in I$, qu'elles sont continues sur le disque fermé $|z| \leqslant R$.

(12) Cf. note (10).

3.5. La remarque suivante est utile pour la suite: ϱ étant un nombre quelconque de I, a' un nombre réel satisfaisant à $0 < a' < a$ et t_1 un nombre réel $\geqslant t_0/2$ et tel que $1-\frac{a'}{\log(2t_1)} > 2\sigma_0(\varrho)$, il existe $M > 0$ tel que, si $s = \sigma+it$ avec σ et t réels, on a

$$|\mathscr{H}^*(s, \varrho)(s-\tfrac{1}{2})^{-1-\varrho}| \leqslant M\big(\log(2|t|)\big)^{1+\varrho} \tag{5}$$

lorsque $|t| \geqslant t_1$ et $\sigma \geqslant \frac{1}{2}-\frac{a'}{2\log(2|t|)}$ (ce qui implique que $s \in \Delta^*$ et $\operatorname{Re} s > \sigma_0(\varrho)$) et

$$|\mathscr{H}(s, z)(s-\tfrac{1}{2})^{1-z}| \leqslant M\big(\log(2|t|)\big)^{1+\varrho} \tag{6}$$

lorsque $|t| \geqslant t_1$, $\sigma \geqslant \frac{1}{2}-\frac{a'}{2\log(2|t|)}$ et $|z| \leqslant \varrho$.

En effet, si $s \in \Delta^*$ et $\operatorname{Re} s > \sigma_0(\varrho)$, on a

$$\mathscr{H}^*(s, \varrho)(s-\tfrac{1}{2})^{-1-\varrho} = \mathscr{G}^*(s, \varrho)\exp\left\{(1+\varrho)\left(l(2s)+\operatorname{Log}\frac{1}{2s-1}\right)\right\},$$

de sorte que

$$|\mathscr{H}^*(s, \varrho)(s-\tfrac{1}{2})^{-1-\varrho}| \leqslant |\mathscr{G}^*(s, \varrho)|\exp\left\{(1+\varrho)\left|l(2s)+\operatorname{Log}\frac{1}{2s-1}\right|\right\},$$

et pour $|z| \leqslant \varrho$

$$\mathscr{H}(s, z)(s-\tfrac{1}{2})^{1-z} = \mathscr{G}(s, z)\exp\left\{(z-1)\left(l(2s)+\operatorname{Log}\frac{1}{2s-1}\right)\right\},$$

de sorte que

$$|\mathscr{H}(s, z)(s-\tfrac{1}{2})^{1-z}| \leqslant |\mathscr{G}(s, z)|\exp\left\{(1+\varrho)\left|l(2s)+\operatorname{Log}\frac{1}{2s-1}\right|\right\}.$$

Comme on l'a dit à la fin du paragraphe 3.1, il existe une constante K telle que, pour $s = \sigma+it$ avec $|t| \geqslant t_0$ et $\sigma \geqslant 1-\frac{a'}{\log|t|}$,

$$\left|l(s)+\operatorname{Log}\frac{1}{s-1}\right| \leqslant \log\log|t|+K.$$

Par suite, si $s = \sigma+it$ avec $|t| \geqslant t_1$ et $\sigma \geqslant \frac{1}{2}-\frac{a'}{2\log(2|t|)}$,

$$\left|l(2s)+\operatorname{Log}\frac{1}{2s-1}\right| \leqslant \log\log(2|t|)+K.$$

Par ailleurs, si $|t| \geqslant t_1$ et $\sigma \geqslant \frac{1}{2}-\frac{a'}{2\log(2|t|)}$, on a

$$\sigma \geqslant \tfrac{1}{2}\left(1-\frac{a'}{\log(2t_1)}\right) > \sigma_0(\varrho).$$

D'après le 7 du paragraphe 3.3 et le 3 du paragraphe 3.2, on sait qu'il existe $K' > 0$ tel que

$$|\mathscr{G}^*(\sigma+it, \varrho)| \leqslant K' \quad \text{pour } \sigma \geqslant \tfrac{1}{2}\left(1-\frac{a'}{\log(2t_1)}\right)$$

et

$$|\mathscr{G}(\sigma+it, z)| \leqslant K' \quad \text{pour} \quad \sigma \geqslant \tfrac{1}{2}\left(1-\frac{a'}{\log(2t_1)}\right) \quad \text{et} \quad |z| \leqslant \varrho.$$

Ainsi, en posant $M = K'e^{K(1+\varrho)}$, si $s = \sigma+it$ avec $|t| \geqslant t_1$ et $\sigma \geqslant \frac{1}{2} - \frac{a'}{2\log(2|t|)}$, on a (5), et aussi (6) pour $|z| \leqslant \varrho$.

3.6. Remarquons maintenant que, si $\varrho \in I$, du fait que $\sigma_0(\varrho) < \frac{1}{2}$ on a pour $\sigma > \frac{1}{2}$

$$\sum_{\substack{p,k\\ k\geqslant 3}} \frac{h_\varrho(p^k)}{p^{k\sigma}} < +\infty.$$

Comme $h_\varrho(p) = 0$ et $h_\varrho(p^2) = 1+\varrho$, on voit que l'on a aussi

$$\sum_{p,k} \frac{h_\varrho(p^k)}{p^{k\sigma}} < +\infty.$$

On a par suite $\sum_{p,k} \frac{|g_z(p^k)|}{p^{k\sigma}} < +\infty$ si $|z| \leqslant \varrho$, puisqu' alors $|g_z(p^k)| \leqslant h_\varrho(p^k)$.

Les fonctions g_z et h_ϱ étant multiplicatives, il résulte de là que, si $\varrho \in I$, la série de Dirichlet

$$\sum_1^{+\infty} \frac{h_\varrho(n)}{n^s}$$

est absolument convergente pour $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$, avec pour somme la valeur du produit infini absolument convergent

$$\prod\left(1+\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{h_\varrho(p^k)}{p^{ks}}\right)$$

(la série commençant à $k = 2$ du fait que $h_\varrho(p) = 0$), et la série de Dirichlet

$$\sum_1^{+\infty} \frac{g_z(n)}{n^s}$$

est absolument convergente pout $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$ et $|z| \leqslant \varrho$, avec pour somme la valeur du produit infini absolument convergent

$$\prod\left(1+\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{g_z(p^k)}{p^{ks}}\right).$$

En fait, si s est fixé, avec $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$, la série $\sum_1^{+\infty} \frac{g_z(n)}{n^s}$ est uniformément convergente pour $|z| \leqslant \varrho$.

En effet, si $|z| \leqslant \varrho$, comme les fonctions h_ϱ et g_z sont multiplicatives et comme

$$|g_z(p^k)| \leqslant h_\varrho(p^k) \quad \text{pour tout } p \text{ premier et tout } k \geqslant 1,$$

on a

$$|g_z(n)| \leqslant h_\varrho(n) \quad \text{pour tout } n \text{ (13)}.$$

Par suite, pout tout n et tout z tel que $|z| \leqslant \varrho$,

$$\left|\frac{g_z(n)}{n^s}\right| \leqslant \frac{h_\varrho(n)}{n^{\operatorname{Re} s}}.$$

3.6.1. Ceci montre en particulier que la série $\sum_1^{+\infty} \frac{g_z(n)}{n}$ et le produit infini

$$\prod\left(1+\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{g_z(p^k)}{p^k}\right)$$

sont absolument convergents et égaux pour $|z| \in I$ et que, quel que soit $\varrho \in I$, la série est uniformément convergente pour $|z| \leqslant \varrho$.

On voit ainsi que la formule

$$F(z) = \prod\left(1+\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{g_z(p^k)}{p^k}\right)$$

donnée dans l'énoncé du théorème fondamental définit bien la fonction F sur l'ensemble des z tels que $|z| \in I$, et que la fonction ainsi définie est holomorphe dans le disque ouvert $|z| < R$, et en outre continue sur le disque fermé $|z| \leqslant R$ si $R \in I$.

Nous devrons nous rappeler au paragraphe 5.1 que l'on a

$$F(z) = \sum_1^{+\infty} \frac{g_z(n)}{n}.$$

4. Evaluation de $G_z(x)$ et $H_\varrho(x)$. Tout au long de ce chapître et du chapître suivant, ϱ sera un nombre positif appartenant à I, fixé une fois pour toutes.

(13) Cette remarque nous servira à nouveau au paragraphe 4.2.1 et au paragraphe 5.8.

4.1. Remarquons d'abord que, si $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$, le produit infini

$$\prod\left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right)^{1+\varrho}\left(1+\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{h_\varrho(p^k)}{p^{ks}}\right)$$

est convergent et égal à $\mathscr{G}^*(s,\varrho)$ puisque $\operatorname{Re} s > \sigma_0(\varrho)$, et, comme le produit infini

$$\prod\left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right)^{-1-\varrho}$$

est aussi convergent et égal à

$$\exp\left\{(1+\varrho)\sum_{p,k}\frac{1}{kp^{2ks}}\right\} = \exp\left\{(1+\varrho)\left(l(2s)+\operatorname{Log}\frac{1}{2s-1}\right)\right\}$$
$$= 2^{-1-\varrho}\exp\left\{(1+\varrho)\left(l(2s)+\operatorname{Log}\frac{1}{s-\frac{1}{2}}\right)\right\},$$

on a

$$\prod\left(1+\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{h_\varrho(p^k)}{p^{ks}}\right) = 2^{-1-\varrho}\mathscr{G}^*(s,\varrho)\exp\left\{(1+\varrho)\left(l(2s)+\operatorname{Log}\frac{1}{s-\frac{1}{2}}\right)\right\}$$
$$= \mathscr{H}^*(s,\varrho)\,(s-\tfrac{1}{2})^{-1-\varrho}.$$

On a de même, pour $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$ et $|z| \leqslant \varrho$,

$$\prod\left(1+\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{g_z(p^k)}{p^{ks}}\right) = 2^{1-z}\mathscr{G}(s,z)\exp\left\{(z-1)\left(l(2s)+\operatorname{Log}\frac{1}{s-\frac{1}{2}}\right)\right\}$$
$$= \mathscr{H}(s,z)\,(s-\tfrac{1}{2})^{1-z}.$$

Ainsi les résultats du paragraphe 3.6 montrent que la série de Dirichlet

$$\sum_{1}^{+\infty}\frac{h_\varrho(n)}{n^s}$$

est absolument convergente pour $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$, avec pour somme

$$\mathscr{H}^*(s,\varrho)\,(s-\tfrac{1}{2})^{-1-\varrho},$$

et, si $|z| \leqslant \varrho$, la série

$$\sum_{1}^{+\infty}\frac{g_z(n)}{n^s}$$

est absolument convergente pour $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$, avec pour somme

$$\mathscr{H}(s,z)\,(s-\tfrac{1}{2})^{1-z}.$$

Alors, d'après une formule bien connue, si c est un nombre réel quelconque $> \frac{1}{2}$, on a pour $x > 0$

$$(7)\qquad \int_0^x H_\varrho(t)\,dt = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\mathscr{H}^*(s,\varrho)\,(s-\tfrac{1}{2})^{-1-\varrho}\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\,ds$$

et, si $|z| \leqslant \varrho$,

$$(8)\qquad \int_0^x G_z(t)\,dt = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\mathscr{H}(s,z)\,(s-\tfrac{1}{2})^{1-z}\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\,ds,$$

où les intégrales sont prises sur le segment de droite joignant les points $c-iT$ et $c+iT$.

4.1.1. Pour x et z fixés, les expressions sous les signes $\int$ sont des fonctions de s holomorphes dans le domaine simplement connexe constitué par l'intersection de Δ^* avec le demi-plan ouvert $\operatorname{Re} s > \sigma_0(\varrho)$. On peut donc, au lieu d'intégrer sur le segment $[c-iT, c+iT]$, intégrer sur tout autre chemin contenu dans ce domaine et allant du point $c-iT$ au point $c+iT$.

Soit a' un nombre réel satisfaisant à $0 < a' < a$ et soit t_1 un nombre réel $\geqslant t_0/2$ et tel que

$$1-\frac{a'}{\log(2t_1)} > 2\sigma_0(\varrho).$$

Posons $\dfrac{a'}{2\log(2t_1)} = \eta$, de sorte que $0 < \eta < \frac{1}{6}$ puisque $\sigma_0(\varrho) \geqslant \frac{1}{3}$.

Les nombres a' et t_1 sont supposés fixés une fois pour toutes. Ainsi η, tout comme ϱ, restera fixé dans toute la suite de ce chapitre et jusqu' à la fin du chapitre suivant.

Soient, d'autre part, r et ε deux nombres réels satisfaisant à

$$0 < r < \eta \quad \text{et} \quad 0 < \varepsilon < \operatorname{Arctg}\frac{t_1}{\eta}.$$

On voit que, si $T > t_1$, on peut remplacer chacune des intégrales qui figurent aux seconds membres de (7) et (8) par la somme des intégrales de la même expression sur les arcs orientés $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_9$ définis comme suit:

Γ_1 est le segment $\left[c-iT, \dfrac{1}{2}-\dfrac{a'}{2\log(2T)}-iT\right]$;

Γ_2 est l'arc décrit par le point $\dfrac{1}{2}-\dfrac{a'}{2\log(2|t|)}+it$ quand t croit de $-T$ à $-t_1$;

Γ_3 est le segment $[\frac{1}{2}-\eta-it_1, \frac{1}{2}-\eta-i\eta\operatorname{tg}\varepsilon]$;

Γ_4 est le segment $[\frac{1}{2}-\eta-i\eta\operatorname{tg}\varepsilon,\ \frac{1}{2}-re^{i\varepsilon}]$;

Γ_5 est l'arc de circonférence décrit par le point $\frac{1}{2}+re^{i\theta}$ quand θ croît de $-\pi+\varepsilon$ à $\pi-\varepsilon$;

Γ_6 est le segment $[\frac{1}{2}-re^{-i\varepsilon},\ \frac{1}{2}-\eta+i\eta\operatorname{tg}\varepsilon]$;

Γ_7 est le segment $[\frac{1}{2}-\eta+i\eta\operatorname{tg}\varepsilon,\ \frac{1}{2}-\eta+it_1]$;

Γ_8 est l'arc décrit par le point $\dfrac{1}{2}-\dfrac{a'}{2\log(2t)}+it$ quand t croît de t_1 à T;

Γ_9 est le segment $\left[\dfrac{1}{2}-\dfrac{a'}{2\log(2T)}+iT,\ c+iT\right]$.

On fera ensuite tendre ε vers zéro.

En raisonnant comme aux paragraphes 4.1.2 et 4.1.3 de notre article AS, on aboutit aux résultats suivants:

Désignons par γ_r l'arc constitué par la circonférence $|s-\frac{1}{2}|=r$ privée du point $\frac{1}{2}-r$, parcouru dans le sens direct.

Définissons la fonction Ψ_ϱ et, pour $|z|\leqslant\varrho$, la fonction Φ_z, sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par

$$\Psi_\varrho(x) = -\frac{\sin\pi\varrho}{\pi}\int_r^\eta \frac{\mathscr{H}^*(\frac{1}{2}-u,\varrho)u^{-1-\varrho}}{(\frac{1}{2}-u)(\frac{3}{2}-u)}x^{3/2-u}du + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\mathscr{H}^*(s,\varrho)(s-\tfrac{1}{2})^{-1-\varrho}\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}ds$$

et

$$\Phi_z(x) = -\frac{\sin\pi z}{\pi}\int_r^\eta \frac{\mathscr{H}(\frac{1}{2}-u,z)u^{1-z}}{(\frac{1}{2}-u)(\frac{3}{2}-u)}x^{3/2-u}du + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\mathscr{H}(s,z)(s-\tfrac{1}{2})^{1-z}\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}ds,$$

où r est un nombre positif quelconque $<\eta$ ([14]).

Posons

$$\int_0^x H_\varrho(t)\,dt = \Psi_\varrho(x)+w_\varrho^*(x) \tag{9}$$

et

$$\int_0^x G_z(t)\,dt = \Phi_z(x)+w(x,z). \tag{10}$$

([14]) On voit immédiatement que ces expressions sont indépendantes de r. Celà résulte d'ailleurs de la manière dont elles apparaîssent.

Alors il existe C_1 et $\beta>0$ tels que l'on ait

$$|w_\varrho^*(x)|\leqslant C_1x^{3/2}\exp(-2\beta\sqrt{\log x})\quad\text{pour}\quad x\geqslant 1 \tag{11}$$

et

$$|w(x,z)|\leqslant C_1x^{3/2}\exp(-2\beta\sqrt{\log x})\quad\text{pour}\quad x\geqslant 1\ \text{et}\ |z|\leqslant\varrho. \tag{12}$$

4.1.2. Remarquons que Ψ_ϱ est indéfiniment dérivable sur $]0,+\infty[$, ainsi que Φ_z pour $|z|\leqslant\varrho$, et on a

$$\Psi_\varrho'(x) = -\frac{\sin\pi\varrho}{\pi}\int_r^\eta \frac{\mathscr{H}^*(\frac{1}{2}-u,\varrho)u^{-1-\varrho}}{\frac{1}{2}-u}x^{1/2-u}du + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\mathscr{H}^*(s,\varrho)(s-\tfrac{1}{2})^{-1-\varrho}\frac{x^s}{s}ds, \tag{13}$$

$$\Psi_\varrho''(x) = -\frac{\sin\pi\varrho}{\pi}\int_r^\eta \mathscr{H}^*(\tfrac{1}{2}-u,\varrho)u^{-1-\varrho}x^{-1/2-u}du + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\mathscr{H}^*(s,\varrho)(s-\tfrac{1}{2})^{-1-\varrho}x^{s-1}ds,$$

$$\Phi_z'(x) = -\frac{\sin\pi z}{\pi}\int_r^\eta \frac{\mathscr{H}(\frac{1}{2}-u,z)u^{1-z}}{\frac{1}{2}-u}x^{1/2-u}du + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\mathscr{H}(s,z)(s-\tfrac{1}{2})^{1-z}\frac{x^s}{s}ds \tag{14}$$

et

$$\Phi_z''(x) = -\frac{\sin\pi z}{\pi}\int_r^\eta \mathscr{H}(\tfrac{1}{2}-u,z)u^{1-z}x^{-1/2-u}du + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\mathscr{H}(s,z)(s-\tfrac{1}{2})^{1-z}x^{s-1}ds, \tag{15}$$

r étant toujours un nombre réel quelconque satisfaisant à $0<r<\eta$.

En raisonnant comme au paragraphe 4.1.4 de AS, on voit qu'il existe $C_2>0$ tel que, si $x>e^{1/\eta}$, on a

$$|\Psi_\varrho''(x)|\leqslant C_2x^{-1/2}(\log x)^\varrho \tag{16}$$

et, pour $|z|\leqslant\varrho$,

$$|\Phi_z''(x)|\leqslant C_2x^{-1/2}(\log x)^{\varrho-2}<C_2x^{-1/2}(\log x)^\varrho. \tag{17}$$

Il existe de même $C_3>0$ tel que, si $x>e^{1/\eta}$, on a

$$|\Psi_\varrho'(x)|\leqslant C_3x^{1/2}(\log x)^\varrho. \tag{18}$$

4.2. Fixons maintenant un nombre réel x_0 au moins égal au plus grand des nombres

$$2e^{1/\eta}, \quad e^{2\varrho}, \quad 2e^{4\beta^2/9} \quad \text{et} \quad \exp\left\{\left(\frac{\log 2}{\beta}\right)^2\right\}.$$

4.2.1. Supposons que $x \geqslant x_0$, et soit ξ un nombre réel satisfaisant à $0 < \xi \leqslant x/2$.

Si $|z| \leqslant \varrho$, on a pour $x < t \leqslant x+\xi$

$$|G_z(t) - G_z(x)| = \Big|\sum_{x<n\leqslant t} g_z(n)\Big| \leqslant \sum_{x<n\leqslant t} h_\varrho(n) = H_\varrho(t) - H_\varrho(x).$$

Il en résulte que

$$\left|\frac{1}{\xi}\int_x^{x+\xi} G_z(t)\,dt - G_z(x)\right| = \left|\frac{1}{\xi}\int_x^{x+\xi} \big(G_z(t) - G_z(x)\big)\,dt\right|$$
$$\leqslant \frac{1}{\xi}\int_x^{x+\xi} \big(H_\varrho(t) - H_\varrho(x)\big)\,dt = \frac{1}{\xi}\int_x^{x+\xi} H_\varrho(t)\,dt - H_\varrho(x),$$

et par suite

$$|G_z(x) - \Phi_z'(x)| \leqslant \left|\frac{1}{\xi}\int_x^{x+\xi} G_z(t)\,dt - \Phi_z'(x)\right| + \frac{1}{\xi}\int_x^{x+\xi} H_\varrho(t)\,dt - H_\varrho(x).$$

Mais, comme $H_\varrho(t) \geqslant H_\varrho(x)$ pour $t \geqslant x$ et $H_\varrho(t) \leqslant H_\varrho(x)$ pour $t \leqslant x$, on a

$$\frac{1}{\xi}\int_{x-\xi}^{x} H_\varrho(t)\,dt \leqslant H_\varrho(x) \leqslant \frac{1}{\xi}\int_x^{x+\xi} H_\varrho(t)\,dt,$$

et par suite

$$\frac{1}{\xi}\int_x^{x+\xi} H_\varrho(t)\,dt - H_\varrho(x) \leqslant \frac{1}{\xi}\Big(\int_x^{x+\xi} H_\varrho(t)\,dt - \int_{x-\xi}^{x} H_\varrho(t)\,dt\Big).$$

On voit ainsi que l'on a pour $|z| \leqslant \varrho$

$$(19) \qquad |G_z(x) - \Phi_z'(x)|$$
$$\leqslant \left|\frac{1}{\xi}\int_x^{x+\xi} G_z(t)\,dt - \Phi_z'(x)\right| + \frac{1}{\xi}\Big(\int_x^{x+\xi} H_\varrho(t)\,dt - \int_{x-\xi}^{x} H_\varrho(t)\,dt\Big).$$

Maintenant, la formule (10) donne

$$\int_x^{x+\xi} G_z(t)\,dt = \Phi_z(x+\xi) - \Phi_z(x) + w(x+\xi, z) - w(x, z)$$
$$= \xi\Phi_z'(x) + \xi^2\int_0^1 (1-u)\Phi_z''(x+u\xi)\,du + w(x+\xi, z) - w(x, z),$$

d'où

$$\left|\frac{1}{\xi}\int_x^{x+\xi} G_z(t)\,dt - \Phi_z'(x)\right|$$
$$\leqslant \xi\left|\int_0^1 (1-u)\Phi_z''(x+u\xi)\,du\right| + \frac{|w(x+\xi, z)| + |w(x, z)|}{\xi}.$$

En tenant compte de (12) et (17) et remarquant que $t^{-1/2}(\log t)^\varrho$ est une fonction décroissante de t pour $t \geqslant e^{2\varrho}$ et que l'on a $(x+\xi)^{3/2} \leqslant (\frac{3}{2}x)^{3/2}$, on obtient

$$\left|\frac{1}{\xi}\int_x^{x+\xi} G_z(t)\,dt - \Phi_z'(x)\right|$$
$$\leqslant \tfrac{1}{2}C_2\,\xi x^{-1/2}(\log x)^\varrho + \big(1 + (\tfrac{3}{2})^{3/2}\big)C_1\frac{x^{3/2}}{\xi}\exp\big(-2\beta\sqrt{\log x}\big).$$

D'autre part, la formule (9) donne

$$\int_x^{x+\xi} H_\varrho(t)\,dt - \int_{x-\xi}^{x} H_\varrho(t)\,dt$$
$$= \Psi_\varrho(x+\xi) + \Psi_\varrho(x-\xi) - 2\Psi_\varrho(x) + w_\varrho^*(x+\xi) + w_\varrho^*(x-\xi) - 2w_\varrho^*(x)$$
$$= \xi^2\int_0^1 (1-u)\big(\Psi_\varrho''(x+u\xi) + \Psi_\varrho''(x-u\xi)\big)\,du + w_\varrho^*(x+\xi) + w_\varrho^*(x-\xi) - 2w_\varrho^*(x).$$

En tenant compte de (16) et de ce que $(x-\xi)^{-1/2} \leqslant \sqrt{2}\,x^{-1/2}$, on voit que

$$\left|\int_0^1 (1-u)\big(\Psi_\varrho''(x+u\xi) + \Psi_\varrho''(x-u\xi)\big)\,du\right| \leqslant \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{2})C_2 x^{-1/2}(\log x)^\varrho.$$

Par ailleurs, en tenant compte de (11) et remarquant que $t^{3/2} \times \exp(-2\beta\sqrt{\log t})$ est une fonction croissante de t pour $t \geqslant e^{4\beta^2/9}$, on obtient

$$|w_\varrho^*(x+\xi) + w_\varrho^*(x-\xi) - 2w_\varrho^*(x)| \leqslant \big(3 + (\tfrac{3}{2})^{3/2}\big)C_1 x^{3/2}\exp\big(-2\beta\sqrt{\log x}\big).$$

On voit ainsi que

$$\frac{1}{\xi}\Big(\int_x^{x+\xi} H_\varrho(t)\,dt - \int_{x-\xi}^{x} H_\varrho(t)\,dt\Big)$$
$$\leqslant \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{2})C_2\,\xi x^{-1/2}(\log x)^\varrho + \big(3 + (\tfrac{3}{2})^{3/2}\big)C_1\frac{x^{3/2}}{\xi}\exp\big(-2\beta\sqrt{\log x}\big).$$

Finalement, (19) montre que l'on a pour $|z| \leqslant \varrho$

$$(20)\qquad |G_z(x) - \Phi_z'(x)| \leqslant \tfrac{1}{2}(2+\sqrt{2})C_2\xi x^{-1/2}(\log x)^\varrho + \left(4+2\left(\tfrac{3}{2}\right)^{3/2}\right)C_1\frac{x^{3/2}}{\xi}\exp(-2\beta\sqrt{\log x}).$$

4.2.2. Remarquons par ailleurs que, comme

$$\xi H_\varrho(x) \leqslant \int_x^{x+\xi} H_\varrho(t)\,dt = \int_x^{x+\xi} \Psi_\varrho'(t)\,dt + w_\varrho^*(x+\xi) - w_\varrho^*(x),$$

on a, en utilisant (18) et (11),

$$H_\varrho(x) \leqslant C_3(x+\xi)^{1/2}\big(\log(x+\xi)\big)^\varrho + \left(1+\left(\tfrac{3}{2}\right)^{3/2}\right)C_1\frac{x^{3/2}}{\xi}\exp(-2\beta\sqrt{\log x}),$$

d'où

$$(21)\qquad H_\varrho(x) \leqslant C_4 x^{1/2}(\log x)^\varrho + \left(1+\left(\tfrac{3}{2}\right)^{3/2}\right)C_1\frac{x^{3/2}}{\xi}\exp(-2\beta\sqrt{\log x}),$$

où

$$C_4 = C_3\left(\tfrac{3}{2}\right)^{1/2}\left(1+\frac{\log(3/2)}{\log x_0}\right)^\varrho.$$

4.2.3. Jusqu'ici, ξ est un nombre réel arbitraire satisfaisant à $0 < \xi \leqslant x/2$.

En prenant dans (20) $\xi = x(\log x)^{-\varrho/2}\exp(-\beta\sqrt{\log x})$, ce qui est loisible puisque $\exp(-\beta\sqrt{\log x}) \leqslant \frac{1}{2}$, on voit que l'on a pour $|z| \leqslant \varrho$

$$|G_z(x) - \Phi_z'(x)| \leqslant C_5 x^{1/2}(\log x)^{\varrho/2}\exp(-\beta\sqrt{\log x}),$$

où

$$C_5 = \tfrac{1}{2}(2+\sqrt{2})C_2 + \left(4+2\left(\tfrac{3}{2}\right)^{3/2}\right)C_1.$$

En prenant dans (21) $\xi = x\exp(-2\beta\sqrt{\log x})$, on voit que l'on a

$$H_\varrho(x) \leqslant C_6 x^{1/2}(\log x)^\varrho, \quad \text{où} \quad C_6 = C_4 + \left(1+\left(\tfrac{3}{2}\right)^{3/2}\right)C_1.$$

4.2.4. Nous poserons maintenant, pour $|z| \in I$ et $x > 0$,

$$(22)\qquad G_z(x) = \Phi_z'(x) + \Omega_z(x).$$

Il est clair que la fonction Ω_z est à variation bornée sur tout intervalle fermé contenu dans l'intervalle $]0, +\infty[$.

D'après ce que l'on vient de voir, on a pour $x \geqslant x_0$ et $|z| \leqslant \varrho$

$$|\Omega_z(x)| \leqslant C_5 x^{1/2}(\log x)^{\varrho/2}\exp(-\beta\sqrt{\log x}).$$

Pour simplifier, nous introduirons un α arbitraire (mais qui restera fixé) satisfaisant à $0 < \alpha < \beta$.

On voit alors que l'on a pour $x \geqslant x_0$ et $|z| \leqslant \varrho$

$$(23)\qquad |\Omega_z(x)| \leqslant C_7 x^{1/2}\exp(-\alpha\sqrt{\log x}),$$

où

$$C_7 = C_5 \operatorname*{Sup}_{x\geqslant x_0}\left\{(\log x)^{\varrho/2}\exp\left(-(\beta-\alpha)\sqrt{\log x}\right)\right\}.$$

C'est cette inégalité que nous utiliserons dans la suite, ainsi que le fait, vu plus haut, que l'on a pour $x \geqslant x_0$

$$(24)\qquad H_\varrho(x) \leqslant C_6 x^{1/2}(\log x)^\varrho.$$

5. Evaluation de $\sum_{n\leqslant x} z^{f(n)}$. Si l'on se reporte à la définition de la fonction g_z, on voit que g_z n'est autre que la convolution de la fonction μ de Möbius avec la fonction multiplicative dont la valeur est $z^{f(n)}$.

On a donc pour chaque n

$$z^{f(n)} = \sum_{d|n} g_z(d),$$

et il en résulte que l'on a pour tout $x \geqslant 1$

$$(25)\qquad \sum_{n\leqslant x} z^{f(n)} = \sum_{mn\leqslant x} g_z(m).$$

Nous supposerons $|z| \leqslant \varrho$ et $x > x_0$.

Nous introduirons ici encore un nombre réel ξ à fixer ultérieurement. ξ devra cette fois satisfaire à $x_0 \leqslant \xi < x$.

Par un procédé classique, nous écrirons (25) sous la forme

$$(26)\qquad \sum_{n\leqslant x} z^{f(n)} = \sum_{m\leqslant\xi} g_z(m)E\left(\frac{x}{m}\right) + \sum_{m\leqslant x/\xi} G_z\left(\frac{x}{n}\right) - G_z(\xi)E\left(\frac{x}{\xi}\right),$$

où $E(X)$ désigne le plus grand entier $\leqslant X$.

5.1. On a

$$\sum_{m\leqslant\xi} g_z(m)E\left(\frac{x}{m}\right) = x\sum_{m\leqslant\xi}\frac{g_z(m)}{m} - \sum_{m\leqslant\xi} g_z(m)\left(\frac{x}{m} - E\left(\frac{x}{m}\right)\right)$$
$$= xF(z) - x\sum_{m>\xi}\frac{g_z(m)}{m} - \sum_{m\leqslant\xi} g_z(m)\left(\frac{x}{m} - E\left(\frac{x}{m}\right)\right)^{(15)}.$$

On peut écrire, d'après (22), (17) et (23),

$$\sum_{m>\xi}\frac{g_z(m)}{m} = \int_\xi^{+\infty}\frac{dG_z(t)}{t} = \int_\xi^{+\infty}\Phi_z''(t)\frac{dt}{t} + \int_\xi^{+\infty}\frac{d\Omega_z(t)}{t}$$
$$= \int_\xi^{+\infty}\Phi_z''(t)\frac{dt}{t} - \frac{\Omega_z(\xi)}{\xi} + \int_\xi^{+\infty}\Omega_z(t)\frac{dt}{t^2}.$$

(15) Cf. § 3.6.1.

On obtient ainsi

$$(27)\qquad \sum_{m\leqslant\xi} g_z(m)E\left(\frac{x}{m}\right) = xF(z) - x\int_{\xi}^{+\infty}\Phi_z''(t)\frac{dt}{t} + \frac{x}{\xi}\Omega_z(\xi) - $$
$$- x\int_{\xi}^{+\infty}\Omega_z(t)\frac{dt}{t^2} - \sum_{m\leqslant\xi} g_z(m)\left(\frac{x}{m} - E\left(\frac{x}{m}\right)\right).$$

5.2. On a d'après (22)

$$\sum_{n\leqslant x/\xi} G_z\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n\leqslant x/\xi}\Phi_z'\left(\frac{x}{n}\right) + \sum_{n\leqslant x/\xi}\Omega_z\left(\frac{x}{n}\right).$$

On peut écrire

$$\sum_{n\leqslant x/\xi}\Phi_z'\left(\frac{x}{n}\right) = \int_{1/2}^{x/\xi}\Phi_z'\left(\frac{x}{t}\right)dE(t) = \Phi_z'(\xi)E\left(\frac{x}{\xi}\right) + x\int_{1}^{x/\xi}\Phi_z''\left(\frac{x}{t}\right)\frac{E(t)}{t^2}dt$$
$$= \Phi_z'(\xi)E\left(\frac{x}{\xi}\right) + x\int_{1}^{x/\xi}\Phi_z''\left(\frac{x}{t}\right)\frac{dt}{t} - x\int_{1}^{x/\xi}\Phi_z''\left(\frac{x}{t}\right)\frac{t-E(t)}{t^2}dt.$$

En faisant le changement de variable $t = x/v$, on a

$$\int_{1}^{x/\xi}\Phi_z''\left(\frac{x}{t}\right)\frac{dt}{t} = \int_{\xi}^{x}\Phi_z''(v)\frac{dv}{v}.$$

On obtient ainsi

$$(28)\qquad \sum_{n\leqslant x/\xi} G_z\left(\frac{x}{n}\right)$$
$$= \Phi_z'(\xi)E\left(\frac{x}{\xi}\right) + x\int_{\xi}^{x}\Phi_z''(t)\frac{dt}{t} - x\int_{1}^{x/\xi}\Phi_z''\left(\frac{x}{t}\right)\frac{t-E(t)}{t^2}dt + \sum_{n\leqslant x/\xi}\Omega_z\left(\frac{x}{n}\right).$$

5.3. On peut écrire enfin, d'après (22),

$$(29)\qquad G_z(\xi)E\left(\frac{x}{\xi}\right) = \Phi_z'(\xi)E\left(\frac{x}{\xi}\right) + \Omega_z(\xi)E\left(\frac{x}{\xi}\right).$$

5.4. Les relations (26), (27), (28) et (29) donnent

$$\sum_{n\leqslant x} z^{f(n)} = xF(z) - x\int_{x}^{+\infty}\Phi_z''(t)\frac{dt}{t} - x\int_{1}^{x/\xi}\Phi_z''\left(\frac{x}{t}\right)\frac{t-E(t)}{t^2}dt +$$
$$+\left(\frac{x}{\xi} - E\left(\frac{x}{\xi}\right)\right)\Omega_z(\xi) - x\int_{\xi}^{+\infty}\Omega_z(t)\frac{dt}{t^2} + \sum_{n\leqslant x/\xi}\Omega_z\left(\frac{x}{n}\right) - \sum_{m\leqslant\xi} g_z(m)\left(\frac{x}{m} - E\left(\frac{x}{m}\right)\right).$$

5.5. La formule (15) donne pour $t > 0$

$$\frac{1}{t}\Phi_z''(t) = -\frac{\sin\pi z}{\pi}\int_{r}^{\eta}\mathscr{H}(\tfrac{1}{2}-u, z)u^{1-z}t^{-3/2-u}du +$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\mathscr{H}(s, z)(s-\tfrac{1}{2})^{1-z}t^{s-2}ds,$$

avec r réel quelconque satisfaisant à $0 < r < \eta$.

En intégrant sous les signes $\int$ de x à $+\infty$ et multipliant par x, on obtient

$$(30)\qquad x\int_{x}^{+\infty}\Phi_z''(t)\frac{dt}{t} = -\frac{\sin\pi z}{\pi}\int_{r}^{\eta}\frac{\mathscr{H}(\frac{1}{2}-u, z)u^{1-z}}{\frac{1}{2}+u}x^{1/2-u}du +$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\mathscr{H}(s, z)(s-\tfrac{1}{2})^{1-z}\frac{x^s}{1-s}ds.$$

5.6. Pour transformer le terme

$$x\int_{1}^{x/\xi}\Phi_z''\left(\frac{x}{t}\right)\frac{t-E(t)}{t^2}dt,$$

nous allons d'abord introduire de nouvelles fonctions.

5.6.1. Posons d'abord, pour $y > 0$ et $\operatorname{Re} s > 0$,

$$S(y, s) = \int_{y}^{+\infty}\frac{t-E(t)}{t^{s+1}}dt.$$

Pour y fixé, $S(y, s)$ est une fonction de s holomorphe dans le demi-plan $\operatorname{Re} s > 0$.

De plus, il est clair que, pour $\operatorname{Re} s = \sigma \geqslant \sigma_0 > 0$,

$$(31)\qquad |S(y, s)| \leqslant \frac{1}{\sigma y^{\sigma}} \leqslant \frac{1}{\sigma_0 y^{\sigma}}.$$

Remarquons maintenant que l'on a pour $\operatorname{Re} s > 1$

$$\zeta(s) = s\int_{1}^{+\infty}\frac{E(t)}{t^{s+1}}dt = s\int_{1}^{+\infty}\frac{dt}{t^s} - s\int_{1}^{+\infty}\frac{t-E(t)}{t^{s+1}}dt = \frac{s}{s-1} - s\int_{1}^{+\infty}\frac{t-E(t)}{t^{s+1}}dt,$$

et par suite

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{t-E(t)}{t^{s+1}}dt = \frac{1}{s-1} - \frac{\zeta(s)}{s}.$$

En raison de l'analyticité, ceci subsiste pour $\operatorname{Re} s > 0$, et l'on voit ainsi que, quel que soit $y > 0$, on a pour $\operatorname{Re} s > 0$

$$(32)\qquad \int_{1}^{y}\frac{t-E(t)}{t^{s+1}}dt = \frac{1}{s-1} - \frac{\zeta(s)}{s} - S(y, s).$$

5.6.2. Associons maintenant à chaque z tel que $|z| \leqslant \varrho$ la fonction T_z definie pour x et $y > 0$ par

$$T_z(x, y) = \frac{\sin \pi z}{\pi} \int_r^\eta \mathscr{H}(\tfrac{1}{2}-u, z) S(y, \tfrac{1}{2}-u) u^{1-z} x^{1/2-u} du - \\ - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \mathscr{H}(s, z) S(y, s) (s-\tfrac{1}{2})^{1-z} x^s ds,$$

avec r réel quelconque satisfaisant à $0 < r < \eta$. (Du fait que $\mathscr{H}(s, z) S(y, s) x^s$ est une fonction de s holomorphe dans le domaine intersection de Δ avec le demi-plan $\operatorname{Re} s > \sigma_0(\varrho)$, cette expression est indépendante de r.)

Par un raisonnement semblable à celui du paragraphe 4.1.4 de AS, on voit qu'il existe $C_8 > 0$ tel que, pour $|z| \leqslant \varrho$, $y > 0$ et $x/y > e^{1/\eta}$,

$$|T_z(x, y)| \leqslant C_8 \left(\frac{x}{y}\right)^{1/2} \left(\log \frac{x}{y}\right)^{\varrho-2}. \tag{33}$$

Il faut tenir compte de (31), remplacer ici le changement de variable $u = v/\log x$ par $u = v/\log \frac{x}{y}$, et prendre $r = 1/\log \frac{x}{y}$ au lieu de $r = 1/\log x$.

5.6.3. Ceci dit, revenons au terme que nous voulions transformer. La formule (15) donne, pout $t > 0$,

$$x\Phi_z''\left(\frac{x}{t}\right) \frac{t-E(t)}{t^2} = -\frac{\sin \pi z}{\pi} \int_r^\eta \mathscr{H}(\tfrac{1}{2}-u, z) u^{1-z} x^{1/2-u} \frac{t-E(t)}{t^{3/2-u}} du + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \mathscr{H}(s, z) (s-\tfrac{1}{2})^{1-z} x^s \frac{t-E(t)}{t^{s+1}} ds,$$

toujours avec r réel quelconque satisfaisant à $0 < r < \eta$.

En intégrant sous les signes $\int$ de 1 à x/ξ et tenant compte de (32) et de la définition de la fonction T_z, on obtient

$$x \int_1^{x/\xi} \Phi_z''\left(\frac{x}{t}\right) \frac{t-E(t)}{t^2} dt \\ = -\frac{\sin \pi z}{\pi} \int_r^\eta \mathscr{H}(\tfrac{1}{2}-u, z) \left(-\frac{1}{\frac{1}{2}+u} - \frac{\zeta(\frac{1}{2}-u)}{\frac{1}{2}-u}\right) u^{1-z} x^{1/2-u} du + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \mathscr{H}(s, z) \left(\frac{1}{s-1} - \frac{\zeta(s)}{s}\right) (s-\tfrac{1}{2})^{1-z} x^s ds + T_z\left(x, \frac{x}{\xi}\right).$$

5.7. Avec (30), ceci donne

$$-x \int_x^{+\infty} \Phi_z''(t) \frac{dt}{t} - x \int_1^{x/\xi} \Phi_z''\left(\frac{x}{t}\right) \frac{t-E(t)}{t^2} dt \\ = -\frac{\sin \pi z}{\pi} \int_r^\eta \mathscr{H}(\tfrac{1}{2}-u, z) \frac{\zeta(\frac{1}{2}-u)}{\frac{1}{2}-u} u^{1-z} x^{1/2-u} du + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \mathscr{H}(s, z) \frac{\zeta(s)}{s} (s-\tfrac{1}{2})^{1-z} x^s ds - T_z\left(x, \frac{x}{\xi}\right).$$

Nous définirons une fonction Φ_z^* sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par

$$\Phi_z^*(x) = -\frac{\sin \pi z}{\pi} \int_r^\eta \mathscr{H}(\tfrac{1}{2}-u, z) \frac{\zeta(\frac{1}{2}-u)}{\frac{1}{2}-u} u^{1-z} x^{1/2-u} du + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \mathscr{H}(s, z) \frac{\zeta(s)}{s} (s-\tfrac{1}{2})^{1-z} x^s ds$$

(toujours avec r réel quelconque satisfaisant à $0 < r < \eta$).

Ainsi la formule du paragraphe 5.4 donne finalement

$$\sum_{n \leqslant x} z^{f(n)} - xF(z) - \Phi_z^*(x) \\ = -T_z\left(x, \frac{x}{\xi}\right) + \left(\frac{x}{\xi} - E\left(\frac{x}{\xi}\right)\right) \Omega_z(\xi) - x \int_\xi^{+\infty} \Omega_z(t) \frac{dt}{t^2} + \\ + \sum_{n \leqslant x/\xi} \Omega_z\left(\frac{x}{n}\right) - \sum_{m \leqslant \xi} g_z(m) \left(\frac{x}{m} - E\left(\frac{x}{m}\right)\right).$$

5.8. Il résulte de (33) que l'on a

$$\left|T_z\left(x, \frac{x}{\xi}\right)\right| \leqslant C_8 \xi^{1/2} (\log \xi)^{\varrho-2} < C_8 \xi^{1/2} (\log \xi)^\varrho.$$

(23) montre que l'on a

$$\left|\left(\frac{x}{\xi} - E\left(\frac{x}{\xi}\right)\right) \Omega_z(\xi)\right| \leqslant C_7 \xi^{1/2} \exp(-a\sqrt{\log \xi}) < C_7 \xi^{1/2} (\log \xi)^\varrho$$

et

$$\left|x \int_\xi^{+\infty} \Omega_z(t) \frac{dt}{t^2}\right| \leqslant x \exp(-a\sqrt{\log \xi}) \int_\xi^{+\infty} C_7 \frac{dt}{t^{3/2}} = 2C_7 x \xi^{-1/2} \exp(-a\sqrt{\log \xi}),$$

et aussi, puisque $x/n \geqslant \xi$ pour $n \leqslant x/\xi$,

$$\Big|\sum_{n\leqslant x/\xi} \Omega_z\Big(\frac{x}{n}\Big)\Big| \leqslant C_7 x^{1/2}\exp(-a\sqrt{\log\xi}) \sum_{n\leqslant x/\xi}\frac{1}{n^{1/2}} \leqslant 2C_7 x\xi^{-1/2}\exp(-a\sqrt{\log\xi}).$$

Enfin, comme $|g_z(m)| \leqslant h_\varrho(m)$ pour tout m, on a

$$\Big|\sum_{m\leqslant\xi} g_z(m)\Big(\frac{x}{m}-E\Big(\frac{x}{m}\Big)\Big)\Big| \leqslant H_\varrho(\xi) \leqslant C_6\xi^{1/2}(\log\xi)^\varrho,$$

d'après (24).

En définitive, on voit que l'on a

$$\Big|\sum_{n\leqslant x} z^{f(n)} - xF(z) - \Phi_z^*(x)\Big| < (C_6+C_7+C_8)\,\xi^{1/2}(\log\xi)^\varrho + 4C_7 x\xi^{-1/2}\exp(-a\sqrt{\log\xi}).$$

Il existe $x_1 > 0$ tel que $x\exp(-a\sqrt{\log x}) \geqslant x_0$ lorsque $x \geqslant x_1$. Si $x \geqslant x_1$, on peut prendre $\xi = x\exp(-a\sqrt{\log x})$ et on obtient ainsi

$$\Big|\sum_{n\leqslant x} z^{f(n)} - xF(z) - \Phi_z^*(x)\Big| \leqslant C_9 x^{1/2}(\log x)^\varrho \exp\Big(-\frac{a}{2}\sqrt{\log x}\Big),$$

où

$$C_9 = C_6+C_7+C_8+4C_7\exp\{\operatorname*{Sup}_{x\geqslant x_1}(a\sqrt{\log x} - a\sqrt{\log x - a\sqrt{\log x}} - \varrho\log\log x)\}.$$

On a ainsi prouvé que, lorsque x tend vers $+\infty$, on a uniformément pour $|z| \leqslant \varrho$

$$\sum_{n\leqslant x} z^{f(n)} = xF(z) + \Phi_z^*(x) + O\Big(x^{1/2}(\log x)^\varrho\exp\Big(-\frac{a}{2}\sqrt{\log x}\Big)\Big).$$

5.9. Il est clair que, pour arriver au résultat final que nous avons en vue, il ne reste plus qu'à montrer que, quel que soit l'entier $N \geqslant 0$, on a uniformément pour $|z| \leqslant \varrho$

$$\Phi_z^*(x) = x^{1/2}(\log x)^{z-2}\Big\{\sum_{j=0}^{N}\frac{A_j(z)}{(\log x)^j} + O\Big(\frac{1}{(\log x)^{N+1}}\Big)\Big\},$$

c'est à dire

$$\Phi_z^*(x) = \sum_{j=0}^{N}\frac{x^{1/2}B_j(z)}{\Gamma(z-j-1)}(\log x)^{z-j-2} + O\big(x^{1/2}(\log x)^{\operatorname{Re} z-N-3}\big).$$

Ceci se fait en raisonnant exactement comme aux paragraphes 4.3.1 et 4.3.2 de AS.

6. Application du théorème fondamental à l'évaluation de $\nu_q(x)$. Comme application du théorème fondamental, nous allons maintenant établir le théorème suivant, qui contient comme cas particulier le résultat énoncé par Saffari, que nous avons indiqué dans l'introduction.

THÉORÈME. *Soit f une fonction arithmétique additive à valeurs entières $\geqslant 0$, satisfaisant à*

$$f(p) = 0 \text{ et } f(p^2) = 1 \text{ pour tout } p \text{ premier}.$$

q étant un entier $\geqslant 0$ donné, soit $\nu_q(x)$ le nombre des n au plus égaux à x pour lesquels $f(n) = q$.

Pour chaque $q \geqslant 1$, il existe un nombre $d_q \geqslant 0$ et des polynomes à coefficients réels $P_1, P_2, \ldots, P_j, \ldots$ de degré $\leqslant q-1$ tels que, quel que soit $m \geqslant 1$, on a quand x tend vers $+\infty$

$$\nu_q(x) = d_q x + x^{1/2}\sum_{j=1}^{m}\frac{P_j(\log\log x)}{(\log x)^{j+1}} + O\Big(x^{1/2}\frac{(\log\log x)^{q-1}}{(\log x)^{m+2}}\Big). \tag{34}$$

Le coefficient de X^{q-1} dans $P_j(X)$ est

$$\frac{(-1)^j j}{(q-1)!}\mathscr{F}^{(j-1)}\Big(\frac{1}{2}\Big),$$

où la fonction $\mathscr{F}$ est définie pour $\operatorname{Re} s > \frac{1}{3}$ et $s \neq 1$ par

$$\mathscr{F}(s) = \frac{2\zeta(s)}{s(2s-1)\zeta(2s)}\prod\Big(1+\frac{1}{p^s}\Big)^{-1}\Big(1+\frac{1}{p^s}+\sum_{\substack{k\geqslant 3\\ f(p^k)=0}}\frac{1}{p^{ks}}\Big),$$

ce qui donne en particulier dans le cas où $f(p^k) > 0$ pour tout $k \geqslant 3$

$$\mathscr{F}(s) = \frac{2\zeta(s)}{s(2s-1)\zeta(2s)}.$$

6.1. Avant de donner la démonstration, remarquons que, le coefficient de X^{q-1} dans $P_1(X)$ étant $\dfrac{-1}{(q-1)!}\mathscr{F}(\frac{1}{2})$, qui est $\neq 0$, on a quand x tend vers $+\infty$

$$\nu_q(x) - d_q x \sim \frac{-1}{(q-1)!}\mathscr{F}(\tfrac{1}{2})x^{1/2}\frac{(\log\log x)^{q-1}}{(\log x)^2}.$$

En particulier, dans le cas où $f(p^k) > 0$ pour tout $k \geqslant 3$,

$$\nu_q(x) - d_q x \sim \frac{-4}{(q-1)!}\zeta(\tfrac{1}{2})x^{1/2}\frac{(\log\log x)^{q-1}}{(\log x)^2}.$$

6.2. Passons maintenant à la démonstration.

6.2.1. On est dans les hypothèses du théorème fondamental.

Comme, pour chaque $j \geqslant 0$, $A_j(0) = 0$, on peut écrire pour $|z| < R$

$$A_j(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{j,k} z^k.$$

On va voir que l'on a la formule (34) avec

$$P_j(X) = \sum_{k=1}^{q} \frac{a_{j-1,k}}{(q-k)!} X^{q-k}$$

et d_q égal au coefficient de z^q dans le développement en série entière de $F(z)$ pour $|z| < R$.

En effet, quel que soit $m \geqslant 1$, on peut écrire pour tout z tel que $|z| \in I$ et tout $x > 1$

$$\sum_{n \leqslant x} z^{f(n)} = xF(z) + \sum_{j=0}^{m} x^{1/2} (\log x)^{z-j-2} A_j(z) + Q_m(x, z). \tag{35}$$

D'après la formule (2), on a quand x tend vers $+\infty$

$$Q_m(x, z) = O\big(x^{1/2} (\log x)^{\operatorname{Re} z - m - 3}\big)$$

et, quel que soit $\varrho > 0$ appartenant à I, le O est uniforme pour $|z| \leqslant \varrho$.

En prenant en particulier $\varrho = 1$, on voit que l'on a

$$Q_m(x) = O\big(x^{1/2} (\log x)^{-m-2}\big) \quad \text{uniformément pour } |z| < 1. \tag{36}$$

Pour x fixé, le premier membre de (35) est un polynome en z, où le coefficient de z^q est $\nu_q(x)$.

Au second membre, le terme $xF(z)$ et chacun des termes de la somme qui suit sont des fonctions de z holomorphes pour $|z| < R$. Il en est donc de même du terme $Q_m(x, z)$. Le coefficient de z^q est la somme des coefficients de z^q dans les développements en séries entières des différents termes.

On voit immédiatement que le coefficient de z^q dans le développement de $x^{1/2} (\log x)^{z-j-2} A_j(z)$ est

$$\frac{x^{1/2}}{(\log x)^{j+2}} P_{j+1}(\log\log x).$$

D'autre part, d'après l'inégalité classique de Cauchy, il résulte de (36) que le coefficient de z^q dans le développement de $Q_m(x, z)$ est $O\big(x^{1/2} (\log x)^{-m-2}\big)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

On obtient ainsi

$$\nu_q(x) = d_q x + \sum_{j=0}^{m} \frac{x^{1/2} P_{j+1}(\log\log x)}{(\log x)^{j+2}} + O\big(x^{1/2} (\log x)^{-m-2}\big),$$

ce qui donne bien (34).

6.2.2. Du fait que $\nu_q(x)$ est réel $\geqslant 0$, il résulte évidemment que d_q est réel $\geqslant 0$ et tous les polynomes P_j sont à coefficients réels, ce que l'on peut d'ailleurs voir directement.

6.2.3. Notons maintenant que, d'après la formule

$$A_j(z) = \frac{B_j(z)}{\Gamma(z-j-1)},$$

on a $a_{j,1} = (-1)^{j+1} (j+1)! B_j(0)$.

Le coefficient de X^{q-1} dans $P_j(X)$ est donc

$$\frac{(-1)^j j!}{(q-1)!} B_{j-1}(0).$$

$B_{j-1}(0)$ est le coefficient de $(s - \frac{1}{2})^{j-1}$ dans le développement de Taylor au voisinage du point $\frac{1}{2}$ de

$$\frac{2\zeta(s)}{s} \mathscr{G}(s, 0) \exp\big(-l(2s)\big) = \frac{2\zeta(s)}{s(2s-1)\zeta(2s)} \mathscr{G}(s, 0).$$

On a donc

$$B_{j-1}(0) = \frac{1}{(j-1)!} \mathscr{F}^{(j-1)}(\tfrac{1}{2}), \quad \text{où} \quad \mathscr{F}(s) = \frac{2\zeta(s)}{s(2s-1)\zeta(2s)} \mathscr{G}(s, 0).$$

Mais $\mathscr{G}(s, 0)$ est défini pour $\operatorname{Re} s > \sigma_0(0) = \frac{1}{3}$ par

$$\mathscr{G}(s, 0) = \prod \left(1 + \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \left(1 + \sum_{f(p^k)=0} \frac{1}{p^{ks}}\right)^{(16)}.$$

On obtient bien ce qui est dit dans l'énoncé du théorème.

6.3. Remarquons qu'en suivant la méthode utilisée par A. Selberg dans son article *Note on a paper by L. G. Sathe* (17) pour établir ses théorèmes 3 et 4 on pourrait obtenir des résultats du même genre, uniformes en q pour $1 \leqslant q \leqslant \varrho \log\log x$, où ϱ est un nombre positif quelconque appartenant à I.

Par exemple, la fonction A étant définie pour $|z| \in I$ par

$$A(z) = \frac{1}{z} A_0(z) \quad \text{si} \quad z \neq 0 \text{ et } A(0) = A'(0),$$

(16) Cf. note (10).

(17) Journal Indian Math. Soc. 18. (1954), p. 83–87

pour tout ϱ positif appartenant à I, on a quand x tend vers $+\infty$

$$\nu_q(x) - d_q x = \frac{x^{1/2}(\log\log x)^{q-1}}{(q-1)!(\log x)^2}\left(A\left(\frac{q-1}{\log\log x}\right) + O\left(\frac{q}{(\log\log x)^2}\right)\right)$$

uniformément pour $1 \leqslant q \leqslant \varrho \log\log x$.

7. Généralisations.

7.1. Le théorème fondamental pourrait être généralisé en supposant f à valeurs entières *pas forcément* $\geqslant 0$.

La conclusion serait alors une formule semblable à (2) mais valable seulement pour $|z| = 1$, la fonction F et les fonctions A_j étant définies sur la circonférence $|z| = 1$ et continues sur cette circonférence.

On pourrait encore en déduire un développement asymptotique de $\nu_q(x)$ analogue à (34), valable cette fois pour q quelconque appartenant à $\boldsymbol{Z}$. On l'obtiendrait en partant de ce que

$$\nu_q(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\Big(\sum_{n\leqslant x} e^{i\theta f(n)}\Big)e^{-qi\theta}\,d\theta.$$

Les polynomes P_j seraient remplacés par des fonctions entières de type exponentiel F_j telles que, quand $|X|$ tend vers $+\infty$,

$$F_j(X) = O(e^X|X|^{-1/2}).$$

Le

$$O\left(x^{1/2}\frac{(\log\log x)^{q-1}}{(\log x)^{m+2}}\right)$$

serait remplacé par

$$O\left(x^{1/2}\frac{(\log\log x)^{-1/2}}{(\log x)^{m+1}}\right).$$

7.2. On pourrait aussi évaluer la somme

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv l(\mathrm{mod}\,k)}} z^{f(n)}$$

et le nombre des $n \leqslant x$ tels que $n \equiv l(\mathrm{mod}\,k)$ et $f(n) = q$.

7.3. Enfin on pourrait ne plus supposer que l'on a $f(p) = 0$ et $f(p^2) = 1$ pour tout p, mais que l'on a $f(p) = 0$ et $f(p^2) = 0$ ou 1 pour tout p, l'ensemble des p pour lesquels $f(p^2) = 1$ étant un „bon ensemble" de densité positive, ce terme ayant la signification qui lui est attribuée dans AS (p. 139).

Reçu le 22. 4. 1972 (270)

ACTA ARITHMETICA
XXIII (1973)

Image sets of polynomials

by

K. K. Kubota (Lexington, Ky.)

W. Narkiewicz has shown ([11], [12]) that if K is a purely transcendental extension of a number field, then the only polynomials $P \in K[X]$ which admit infinite invariant sets in K (i.e. subsets E of K with $P(E) = E$) are the linear ones. He conjectured [13] that more generally if P_1 and P_2 are two polynomials over K such that there is an infinite subset $E \subseteq K$ satisfying $P_1(E) = P_2(E)$, then P_1 and P_2 have the same degree. In [5], this conjecture was verified in the case of algebraic number fields under the additional assumption that the polynomial of lower degree is injective on E. This was generalized by D. J. Lewis [9] to the case of finitely generated fields K and also to morphisms over such fields of projective n-space into itself.

However, as noted in [5], the conjecture as stated is false. $P_1(X) = X^2+X+1$, $P_2(X) = P_1(F(X))$ where $F(X) = X^2-X+1$, and E the set consisting of $0, 1, F(1), F(F(1)), \ldots$ was the counter-example given there. The main result of this paper states that under certain conditions this is the only possible kind of counter-example.

Theorem 1. *Let K be a field of characteristic zero such that the algebraic closure in K of any subfield finitely generated over the rationals $\boldsymbol{Q}$ is finitely generated. Suppose P_1 and P_2 are polynomials over K with degree $P_1 <$ degree P_2. If there is an infinite subset E of K satisfying $P_1(E) \subseteq P_2(E)$ or $P_2(E) \subseteq P_1(E)$ and if every component of $P_1(X)-P_2(Y) = 0$ containing an infinity of points of $E\times E$ has a polynomial parametrization, then $P_2(X) = P_1(F(X))$ for some polynomial F over K.*

The applicability of Theorem 1 depends on being able to verify that the components of $P_1(X)-P_2(Y) = 0$ which admit an infinity of points of $E\times E$, have polynomial parametrizations. In the proof of Theorem 1, it is shown that E contains a set which in addition to satisfying the requirements of E also is contained in a subring A of K finitely generated over the integers. But then one can apply M. Fried's characterization ([2], Th. 3 and its corollary) of genus 0 curves with separated variables having infinitely many A-valued points. (The corollary holds for a ring like A