La revue est consacrée à la Théorie des Nombres
The journal publishes papers on the Theory of Numbers
Die Zeitschrift veröffentlicht Arbeiten aus der Zahlentheorie
Журнал посвящен теории чисел

L'adresse de la Rédaction et de l'échange
Address of the Editorial Board and of the exchange
Die Adresse der Schriftleitung und des Austausches
Адрес редакции и книгообмена

ACTA ARITHMETICA
ul. Śniadeckich 8, 00-950 Warszawa

Les auteurs sont priés d'envoyer leurs manuscrits en deux exemplaires
The authors are requested to submit papers in two copies
Die Autoren sind gebeten um Zusendung von 2 Exemplaren jeder Arbeit
Рукописи статьей редакция просит предлагать в двух экземплярах

PRINTED IN POLAND

W R O C Ł A W S K A D R U K A R N I A N A U K O W A



ACTA ARITHMETICA
XXIII (1973)


# Sur la répartition modulo 1 des suites $f(p)$


par

GEORGES RHIN (Caen)



Soit $f$ un polynôme dont l'un des coefficients, différent de $f(0)$, est irrationnel. On démontre alors que la suite $(f(p_n))_{n\geqslant 1}$, où $(p_n)_{n\geqslant 1}$ désigne la suite croissante des nombres premiers, est équirépartie modulo 1.


**1. Introduction.** Dans son livre [6] I. M. Vinogradov démontre que la suite $(\alpha p_n)_{n\geqslant 1}$ est équirépartie modulo 1 si et seulement si $\alpha$ est irrationnel. En 1948 [7] le même auteur a donné des conditions suffisantes sur les coefficients d'un polynôme $f$ pour que la suite $(f(p_n))_{n\geqslant 1}$ soit équirépartie modulo 1. Nous démontrons dans cet article le théorème.

THÉORÈME 1. *La suite $(f(p_n))_{n\geqslant 1}$ est équirépartie modulo 1 si et seulement si le polynôme $f(x)-f(0)$ a un coefficient irrationnel.*

Le résultat dépend essentiellement du théorème (5–1) qui généralise le théorème 1 [7] de I. M. Vinogradov.

**2. Notations et lemmes preliminaires.** Soit $k$ un entier ($k\geqslant 2$) et soient $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ les $k+1$ coefficients réels du polynôme $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_k x^k$. Si le polynôme $f$ a un coefficient nul, en remplaçant ce coefficient par 1 nous ne changeons pas la répartition modulo 1 de la suite $f(p_n)$. Nous supposons donc que les coefficients $\alpha_i$ ($1\leqslant i\leqslant k$) sont non nuls et se mettent sous la forme

$$\alpha_i = \frac{a_i}{q_i} + \frac{\theta_i}{q_i\tau_i}$$

avec $a_i$, $q_i$ entiers, $(a_i, q_i) = 1$, $1\leqslant q_i\leqslant \tau_i$ et $|\theta_i|\leqslant 1$. Ceci est toujours possible lorsque les $\tau_i$ sont choisis assez grands. Nous désignons par $\varepsilon$ un réel tel que $0<\varepsilon<0.01$. Les notations $A = O(B)$ et $A \ll B$ signifient qu'il existe une constante $C$ positive qui ne dépend que de $k$ et de $\varepsilon$ telle que $|A|\leqslant CB$. $[A]$ désigne la partie entière de $A$, $\{A\}$ sa partie fractionnaire et $\|A\| = \min(\{A\}, 1-\{A\})$.

LEMME 2.1 ([3]). *Soit $g$ un polynôme à coefficients entiers*

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_k x^k.$$

*Si* $(b_1, \ldots, b_k, q) = 1$ *alors*

$$S(q, g) = \sum_{\substack{1 \leqslant x \leqslant q \\ (x,q)=1}} e_q(g(x)) \ll q^{1-\frac{1}{k}+\varepsilon}$$

*où* $e_q(t) = \exp\left(\dfrac{2\pi i t}{q}\right)$.

Lemme 2.2 ([1]). *Soient $u > 0$ et $x > 1$ deux réels et $l$ un entier premier avec l'entier positif $q$. Soit $\pi(x; l, q)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à $x$ et congrus à $l$ modulo $q$. Il existe alors une constante positive $C(u)$ ne dépendant que de $u$ et une constante positive $C_1$ telles que si $q \leqslant \log^u x$ on a*

$$\left|\pi(x; l, q) - \frac{\pi(x)}{\varphi(q)}\right| \leqslant C(u)\, x e^{-C_1\sqrt{\log x}}$$

*où $\varphi$ désigne l'indicateur d'Euler et $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à $x$.*

Nous désignerons par $N$ un entier $\geqslant 10$ et $r = \log N$.

La démonstration du théorème 1 se fait en trois étapes selon que tous les $q_i$ sont $\leqslant r$, ou $\leqslant \exp(Cr^\varepsilon)$ ou qu'il en existe un $> \exp(Cr^\varepsilon)$. Nous noterons $\Omega(q)$ le nombre de nombres premiers distincts qui divisent l'entier $q$, $\nu(q)$ le nombre de diviseurs de $q$ et $\mu$ la fonction de Möbius.

### 3. Les $q_i$ sont tous $\leqslant r$.

Proposition 3.1. *Supposons que pour $1 \leqslant i \leqslant k$ on ait:*

$$N^i \exp(-r^\varepsilon) \leqslant \tau_i \leqslant N^i$$

et

$$q_i \leqslant r.$$

*Posons*

$$S = \sum_{p \leqslant N} e(f(p)) \quad \textit{où} \quad e(t) = \exp(2\pi i t).$$

*Alors*

$$S \ll \frac{\pi(N)}{\varphi(q)} q^{1-\frac{1}{k}}$$

*où $q = p.p.c.m.(q_1, \ldots, q_k)$.*

Démonstration. Nous partageons l'intervalle $[1, N]$ en $[\exp(r^{1/4})]$ intervalles de longueur $A = N[\exp(r^{1/4})]^{-1}$, du type $I = ]N_1 - A, N_1]$. Si $p \in I$ nous avons $|p^i - N_1^i| \ll A N_1^{i-1}$ donc

$$\left| f(p) - \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{q_i} p^i - a_0 - \sum_{i=1}^{k} \frac{N_1^i \theta_i}{q_i \tau_i} \right| \ll A N_1^{-1} \exp(r^\varepsilon)$$

et

$$\left| \sum_{N_1 - A < p \leqslant N_1} e(f(p)) \right| \ll \left| \sum_{N_1 - A < p \leqslant N_1} e\left( \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{q_i} p^i \right) \right| + A^2 N^{-1} \exp(r^\varepsilon).$$



Par réduction au même dénominateur la somme du deuxième membre s'écrit:

$$S_1 = \sum_{N_1 - A < p \leqslant N_1} e_q(g(p))$$

où $g(x) = b_1 x + \ldots + b_k x^k$ avec $(b_1, \ldots, b_k, q) = 1$.

Puisque $q \leqslant r^k$ en utilisant le lemme 2.2 avec $u = k$ nous obtenons

$$S_1 \ll \left| \sum_{\substack{1 \leqslant l \leqslant q \\ (l,q)=1}} e_q(g(l)) \right| \cdot \frac{\pi(N_1) - \pi(N_1 - A)}{\varphi(q)} + Nq \exp(-C_1 \sqrt{\log N_1}).$$

Nous avons $\log N_1 \geqslant \log A \geqslant r - \sqrt{r}$, donc en utilisant le lemme 2.1

$$S_1 \ll \frac{A}{r\varphi(q)} q^{1-\frac{1}{k}+\varepsilon} + \frac{N}{r^{k+1}} \exp(-r^{1/4}) \quad \text{et} \quad S \ll \frac{\pi(N)}{\varphi(q)} q^{1-\frac{1}{k}+\varepsilon}.$$

### 4. Les $q_i$ sont tous $\leqslant \exp(Cr^\varepsilon)$.

Lemme 4.1. *Soit $a$ un entier non nul et $p$ un nombre premier ne divisant pas $a$. Soit $l$ un entier positif et*

$$S = \sum_{\substack{1 \leqslant x \leqslant p^l \\ (x,p)=1}} e_{p^l}(ax^k).$$

*Alors* $|S| \leqslant k p^{l/2}$.

Démonstration. Si $k = 2$, $S$ est une somme de Gauss et le résultat est connu. Si $k \geqslant 3$ et $l = 1$ le résultat est une conséquence du lemme 3, chap. II de [6]. Soit $\tau$ l'entier tel que $p^\tau | k$ et $p^{\tau+1} \nmid k$. Soit $l \geqslant \tau + 2$ et posons $x = p^{l-\tau-1} y + z$. La somme $S$ devient

$$S = \sum_{1 \leqslant z < p^{l-\tau-1}} \sum_{0 \leqslant y < p^{\tau+1}} e\left( \frac{az^k}{p^l} + \frac{akz^{k-1}y}{p^{\tau+1}} \right).$$

Puisque $(z, p) = 1$ et que $p^{\tau+1} \nmid k$ la somme

$$\sum_{0 \leqslant y < p^{\tau+1}} e\left( \frac{akz^{k-1}y}{p^{\tau+1}} \right) \quad \text{est nulle}$$

ainsi que la somme $S$. Il reste à examiner le cas où $2 \leqslant l \leqslant \tau + 1$, alors $|S| \leqslant p^l \leqslant p^\tau p \leqslant k p^{l/2}$.

Proposition 4.1. *Soient $b_0, b_1, \ldots, b_k$, $k+1$ entiers tels que $(b_1, \ldots, b_k, q) = 1$ et soient $\xi$ et $\eta$ deux fonctions à valeurs complexes. Posons*

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_k x^k,$$

$$X = \sum_{\substack{1 \leqslant x \leqslant q \\ (x,q)=1}} |\xi(x)|^2,$$

et

$$Y = \max_{\substack{1\leqslant y\leqslant q\\ (y,q)=1}} |\eta(y)|^2.$$

*Soit*

$$S = \sum_{\substack{1\leqslant x\leqslant q\\ (x,q)=1}} \sum_{\substack{1\leqslant y\leqslant q\\ (y,q)=1}} \xi(x)\eta(y)e_q\big(g(xy)\big)$$

*alors*

$$|S|^2 \ll XYq^{3-\frac{1}{k}+2\varepsilon}.$$

Démonstration. Nous avons

$$|S|^2 \leqslant X\sum_x\Big|\sum_y \eta(y)e_q\big(g(xy)\big)\Big|^2 \leqslant X\sum_x\sum_{y_1}\sum_{y_2}\eta(y_1)\overline{\eta(y_2)}e_q\big(g(xy_1)-g(xy_2)\big)$$

et

$$|S|^2 \leqslant XY\sum_{\substack{1\leqslant y_1\leqslant q\\ (y_1,q)=1}}\sum_{\substack{1\leqslant y_2\leqslant q\\ (y_2,q)=1}}\Big|\sum_{\substack{1\leqslant x\leqslant q\\ (x,q)=1}} e_q\big(g(xy_1)-g(xy_2)\big)\Big|.$$

Posons $\beta_i = b_i(y_1^i-y_2^i)$ pour $1\leqslant i\leqslant k$ et $h(x) = \beta_1x+\ldots+\beta_kx^k$. Soit $n = (\beta_1,\ldots,\beta_k,q)$, $m = \dfrac{q}{n}$ et $x = mz+t$ avec $0\leqslant t< m$. D'après le lemme 2.1 nous avons

$$\sum_{\substack{0\leqslant t<m\\ (t,m)=1}} e_m\left(\frac{h(x)}{n}\right) \ll m^{1-\frac{1}{k}+\varepsilon}$$

donc

$$|S|^2 \ll XY\sum_{n|q}\sum_{(\beta_1,\ldots,\beta_k,q)=n} nm^{1-\frac{1}{k}+\varepsilon}.$$

Il reste donc à calculer le nombre $\Phi(q,n)$ des couples $(y_1,y_2)$ qui satisfont le système $\mathscr{S}(q,n)$

$$\mathscr{S}(q,n)\begin{cases}1\leqslant y_i\leqslant q, & i=1,2,\\ (y_i,q)=1\\ \text{et } (\beta_1,\ldots,\beta_k,q)=n.\end{cases}$$

Si $(y_1,y_2)$ est une solution du système $\mathscr{S}(q,n)$ et si $x_i\equiv y_i \bmod n$ et $1\leqslant x_i\leqslant n$ $(i=1,2)$, le couple $(x_1,x_2)$ est une solution du système $\mathscr{S}(n,n)$ donc

$$\Phi(q,n)\leqslant m^2\Phi(n,n).$$

Posons $\omega(n) = \Phi(n,n)$. Il est alors facile de vérifier que $\omega$ est une fonction multiplicative. Il suffit donc, pour majorer $\omega(n)$, de majorer $\omega(p^l)$



lorsque $p^l|n$. Puisque $(b_1,\ldots,b_k,q)=1$ et que $n|q$ il existe pour chaque nombre premier divisant $n$ un indice $j$ $(1\leqslant j\leqslant k)$ tel que $(b_j,p)=1$. Nous avons donc

$$\omega(p^l)\leqslant p^{-l}\sum_{\substack{1\leqslant y_1\leqslant p^l\\ (y_1,p)=1}}\sum_{\substack{1\leqslant y_2\leqslant p^l\\ (y_2,p)=1}}\sum_{1\leqslant x\leqslant p^l} e_{p^l}\big(b_j(y_1^j-y_2^j)x\big)$$

$$\leqslant p^{-l}\Big[p^{2l}+\sum_{u=0}^{l-1}\sum_{p^u\|x}\sum_{y_1}\sum_{y_2} e_{p^l}\big(b_j(y_1^j-y_2^j)x\big)\Big]$$

où $p^u\|x$ signifie que $p^u|x$ et $p^{u+1}\nmid x$. D'après le lemme 4.1 nous avons

$$\Big|\sum_{\substack{1\leqslant y\leqslant p^l\\ (y,p)=1}} e_{p^l}(xb_jy^j)\Big|\leqslant jp^up^{\frac{l-u}{2}} \qquad \text{si } p^u\|x,$$

donc

$$\omega(p^l)\leqslant p^{-l}\Big[p^{2l}+\sum_{u=0}^{l-1}p^{l-u}k^2p^{l+u}\Big]\leqslant (l+1)k^2p^l.$$

Nous obtenons $\Phi(q,n)\leqslant m^2k^{2\Omega(n)}\nu(n)n$ et en reportant dans la majoration de $|S|^2$

$$|S|^2 \ll XY\sum_{n|q} q^2k^{2\Omega(n)}\nu(n)\left(\frac{q}{n}\right)^{1-\frac{1}{k}+\varepsilon} \ll XYq^{3-\frac{1}{k}+\varepsilon}\sum_{n|q}(k^{2\Omega(n)}n^{-\varepsilon})\nu(n)n^{\frac{1}{k}-1}.$$

D'après ([3], lemme 1.2, chap. 1) $k^{2\Omega(n)}n^{-\varepsilon}\ll 1$ et $\nu(n)n^{\frac{1}{k}-1}\ll n^{-\frac{1}{4}}$. Nous avons

$$\sum_{n|q} n^{-\frac{1}{4}} = \prod_{p|q}\sum_{l=0}^{l} p^{-\frac{l}{4}} < C^{\Omega(q)} \ll q^{\varepsilon}.$$

Nous obtenons donc

$$|S|^2 \ll XYq^{3-\frac{1}{k}+2\varepsilon}.$$

Lemme 4.2 ([6], lemme 4, chap. IX). *Soient $\gamma$ et $\gamma_1$ définis par*

$$\gamma = \exp(r^{1-\frac{3}{2}\varepsilon}), \qquad \gamma_1 = \exp(r^{1-2\varepsilon}).$$

*Supposons que*

$$0<q<\gamma_1,\quad 0\leqslant l<q,\quad (l,q)=1,\quad U>0,\quad W\geqslant\gamma.$$

*Soit $T$ le nombre des entiers $n$ congrus à $l$ modulo $q$ qui ne sont divisibles par aucun nombre premier $\leqslant\gamma_1$ et qui satisfont*

$$U<n\leqslant U+W.$$

*Alors*

$$T \ll W\frac{(rq)^{2\varepsilon}}{rq}.$$

THÉORÈME 4.1. *Supposons que*

$$q_1 \leqslant \exp(0.8r^{\varepsilon}) \quad et \quad q_i \leqslant \exp(0.2k^{-1}r^{\varepsilon}), \quad i = 2, \ldots, k.$$

*Soit*

$$S = \sum_{N-A<p\leqslant N} e\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{q_i}p^i\right)$$

*où* $\dfrac{N}{\gamma_1} \leqslant A < N$.

*Alors*

$$S \ll \frac{A(rq)^{5\varepsilon}}{rq^{1/2k}}, \quad où\ q = p.p.c.m.(q_1, \ldots, q_k).$$

Démonstration. La démonstration suit le même plan que celle du théorème 2a, chap. IX de [6]. Posons $\gamma_0 = \exp(r^{1-\varepsilon})$ donc $\gamma_1 < \gamma < \gamma_0$. Soit $P$ le produit de tous les nombres premiers $\leqslant \gamma_0$ qui ne divisent pas $q$. Alors

$$\sum_{\substack{N-A<z\leqslant N\\(z,P_q)=1}} e_q\big(g(z)\big) = \sum_{\substack{d|P\\d\leqslant N}} \mu(d)S_d \tag{4.1}$$

où

$$g(x) = b_1x+\ldots+b_kx^k \quad \text{et} \quad S_d = \sum_{\substack{\frac{N-A}{d}<m\leqslant\frac{N}{d}\\(m,q)=1}} e_q\big(g(dm)\big). \tag{4.2}$$

Nous obtiendrons d'abord une estimation du nombre de droite de (4.1) puis nous majorerons la différence entre le membre de gauche de (4.1) et la somme $S$.

Nous avons

$$S_d = \sum_{\substack{0\leqslant l<q\\(l,q)=1}} Z_d(l)e_q\big(g(l)\big)$$

où $Z_d(l)$ désigne le nombre des entiers $z$ qui vérifient

$$N-A < z \leqslant N, \quad z \equiv l \bmod q \quad \text{et} \quad z \equiv 0 \bmod d. \tag{4.3}$$

Puisque $(d, q) = 1$ nous avons $Z_d(l) = \dfrac{A}{dq}+O(1)$ d'où

$$S_d = \frac{A}{dq}\sum_{\substack{0\leqslant l<q\\(l,q)=1}} e_q\big(g(l)\big)+O(q)$$



et d'après le lemme 2.1

$$S_d \ll \frac{A}{dq}q^{1-\frac{1}{k}+\varepsilon}+q. \tag{4.4}$$

Nous utiliserons cette majoration lorsque $d \leqslant N^{4/5}$. Remarquons qu'en posant $Z_d = Z_d(1)$ nous obtenons

$$S_d = Z_dS(q, g)+O(q). \tag{4.5}$$

Si $d > N^{4/5}$

$$\gamma_0^{\Omega(d)} \geqslant d > N^{4/5} = \exp\left(\frac{4r}{5}\right)$$

donc $\Omega(d) > \frac{4}{5}r^{\varepsilon}$ et

$$\nu(d) = 2^{\Omega(d)} > \exp\left(\tfrac{4}{5}(\log 2)r^{\varepsilon}\right) > \exp(0.55r^{\varepsilon}).$$

Nous obtenons

$$\sum_{\substack{d|P\\N^{4/5}<d\leqslant N}} |S_d| \ll \sum_{N^{4/5}<d\leqslant N}\ \sum_{\frac{N-A}{d}<m\leqslant\frac{N}{d}} \nu(d)\exp(-0.55r^{\varepsilon})$$
$$\ll \exp(-0.55r^{\varepsilon})\sum_{N<N^{1/5}}\sum_{d}\nu(d)$$

où $d$ parcourt tous les entiers de l'intervalle $d_1 < d \leqslant d_1+h$ avec $h \leqslant A/m$ et $d_1+h \leqslant N/m$. D'après ([2], théorème 320, chap. XVIII) nous obtenons

$$\sum_{d_1<d\leqslant d_1+h} \nu(d) \ll \frac{Ar}{m}+\left(\frac{N}{m}\right)^{1/2}$$

donc

$$\sum_{\substack{d|P\\N^{4/5}<d\leqslant N}} |S_d| \ll \exp(-0.55r^{\varepsilon})\sum_{m<N^{1/5}}\left(\frac{Ar}{m}+\left(\frac{N}{m}\right)^{1/2}\right)$$
$$\ll \exp(-0.55r^{\varepsilon})(Ar^2+N^{3/5})$$
$$\ll \frac{A}{r\sqrt{q}} \quad \text{puisque } N^{3/5} < A \text{ et } \sqrt{q} < \exp(0.5r^{\varepsilon}).$$

La même majoration s'applique à

$$\sum_{\substack{d|P\\N^{4/5}<d\leqslant N}} Z_d$$

puisque $Z_d$ satisfait par définition (avec $l = 1$)

$$Z_d \leqslant \sum_{\frac{N-A}{d}<m\leqslant\frac{N}{d}} 1.$$

D'après (4.5) et les résultats qui précèdent

$$\sum_{\substack{d|P\\ d\leqslant N}} \mu(d)S_d = S(q,g)\sum_{d|P}\mu(d)Z_d + O(N^{4/5}q) + O\left(\frac{A}{r\sqrt{q}}\right).$$

Puisque $\sum_{\substack{d|P\\ d\leqslant N}}\mu(d)Z_d$ est exactement le nombre des entiers $z$ ci-dessus qui sont premiers avec $P$, d'après le lemme 4.2 ce nombre est $\ll A(rq)^{2\varepsilon}/rq$. Nous avons donc démontré que

$$\Big|\sum_{\substack{N-A<z\leqslant N\\ (z,P_q)=1}} e_q(g(z))\Big| \ll \frac{A(rq)^{2\varepsilon}}{rq}q^{1-\frac{1}{k}+\varepsilon} + N^{4/5}q + \frac{A}{r\sqrt{q}} \ll \frac{A(rq)^{3\varepsilon}}{rq^{1/k}}.$$

La condition $(z,P_q)=1$ signifie que chaque facteur premier de $z$ est supérieur à $\gamma_0$. Le nombre $D$ de ces entiers qui sont divisibles par un carré satisfait

$$D \ll \sum_{\gamma_0<p\leqslant\sqrt{N}}\left(\frac{A}{p^2}+1\right) \ll \frac{A}{\gamma_0}+\sqrt{N} \leqslant \frac{A}{r\sqrt{q}}$$

et peut être négligé. Soit

(4.6) $$H_t = \sum_{N-A<z_t\leqslant N} e_q(g(z_t))$$

où $z_t$ décrit les nombres produits de $t$ nombres premiers distincts supérieurs à $\gamma_0$. Puisque $N-A>\gamma_0$, $S=H_1$ et

$$\sum_{1\leqslant t\leqslant t_0} H_t \ll \frac{A(rq)^{3\varepsilon}}{rq^{1/k}} \quad \text{où } t_0 \ll r.$$

Il reste à majorer $H_t$ pour $t\geqslant 2$. Nous allons démontrer que

$$H_t \ll \frac{1}{t}\,\frac{A(rq)^{5\varepsilon}}{r^{1+\varepsilon}q^{1/2k}}$$

ce qui démontrera la majoration indiquée de $S$ puisque

$$\sum_{1\leqslant t\leqslant r}\frac{1}{t} \ll \log r \ll r^{\varepsilon}.$$

Soit $L_t = \sum_{N-A<pv\leqslant N} e_q(g(pv))$ où $p$ décrit les nombres premiers supérieurs à $\gamma_0$ et où $v$ décrit les produits de $t-1$ premiers distincts supérieurs à $\gamma_0$. Le nombre des termes tels que $(p,v)>1$ satisfait la même majoration que $D$ et les autres termes donnent $t$ fois le même terme de $H_t$.



Donc

(4.7) $$H_t = \frac{1}{t}L_t + O\left(\frac{A}{r\sqrt{q}}\right).$$

Il suffit donc de démontrer que

$$L_t \ll \frac{A(rq)^{5\varepsilon}}{r^{1+\varepsilon}q^{1/2k}} \quad \text{pour } t\geqslant 2.$$

Dans la somme $L_t$ nous avons $\gamma_0<p<N\gamma_0^{-t+1}$ puisque $v>\gamma_0^{t-1}$. Nous partageons cet intervalle en au plus $r$ intervalles du type (4.7) $Y<p\leqslant Y'$ où $2Y\leqslant Y'\leqslant 3Y$ et chacun de ces intervalles en un nombre $\ll Y\gamma^{-1}$ intervalles du type

(4.8) $$U<p\leqslant U+W \quad \text{où } \gamma\leqslant W\leqslant 2\gamma.$$

La partie $M$ de la somme $L_t$ qui correspond à l'un des intervalles (4.8) vérifie

(4.9) $$M = \sum_{U<p\leqslant U+W}\ \sum_{\frac{N-A}{U}<v\leqslant\frac{N}{U}} e_q(g(pv)) + O\left(\sum_p\left(\frac{NW}{Up}+1\right)\right)$$

puisque pour chaque $p$ l'erreur commise en remplaçant l'intervalle $\left]\frac{N-A}{p},\frac{N}{p}\right]$ par $\left]\frac{N-A}{U},\frac{N}{U}\right]$ est au plus $\frac{NW}{Up}+1$. Nous avons

$$\sum_p\left(\frac{NW}{Up}+1\right) \ll W\left(\frac{NW}{U^2}+1\right) = \frac{WA}{U}\left(\frac{NW}{AU}+\frac{U}{A}\right),$$

$$\frac{NW}{AU} \ll \gamma_1\frac{W}{U} \ll \frac{\gamma_1\gamma}{\gamma_0} \ll \frac{1}{r^2\sqrt{q}}$$

et

$$\frac{U}{A} \ll \frac{N\gamma_0^{-t+1}}{N\gamma_1^{-1}} \ll \frac{\gamma_1}{\gamma_0} \ll \frac{1}{r^2\sqrt{q}}.$$

Soit $\xi(l)$ le nombre des nombres premiers $p$ de la somme $M$ qui sont congrus à $l$ modulo $q$ et soit $\eta(h)$ le nombre des entiers $v$ congrus à $h$ modulo $q$. Puisque $W\geqslant\gamma$ et $\frac{A}{U}\geqslant(N\gamma_1^{-1})/(N\gamma_0^{-t+1})>\gamma$ et que $q\leqslant\exp(r^{\varepsilon})$ nous pouvons appliquer le lemme 4.2 donc

$$\xi(l) \ll \frac{W(rq)^{2\varepsilon}}{rq} \quad \text{et} \quad \eta(h) \ll \frac{A(rq)^{2\varepsilon}}{Urq}.$$

Nous avons

$$M = \sum_{\substack{1\leqslant l\leqslant q\\(l,q)=1}} \sum_{\substack{1\leqslant h\leqslant q\\(h,q)=1}} \xi(l)\eta(h)e_q\big(g(lh)\big)$$

et en appliquant la proposition 4.1

$$\begin{aligned} M &\ll \Big\{\sum_l |\xi(l)|^2 \max_h |\eta(h)|^2 q^{3-\frac{1}{k}+2\varepsilon}\Big\}^{1/2} \\ &\ll \Big\{q\frac{W^2(rq)^{4\varepsilon}}{r^2q^2}\,\frac{A^2(rq)^{4\varepsilon}}{Ur^2q^2}q^{3-\frac{1}{k}+2\varepsilon}\Big\}^{1/2} \\ &\ll \frac{WA}{Ur^2}\,\frac{(rq)^{5\varepsilon}}{r^{\varepsilon}q^{1/2k}}. \end{aligned}$$

La partie de la somme $L_t$ qui correspond à un intervalle (4.7) est

$$\ll \frac{WA}{U}\,\frac{(rq)^{5\varepsilon}}{r^{2+\varepsilon}q^{1/2k}}\,\frac{Y}{\gamma} \gg \frac{A(rq)^{5\varepsilon}}{r^2q^{1/2k}}$$

puisque $W \ll \gamma$ et $U \gg Y$. En ajoutant un nombre $\ll r$ de ces termes pour obtenir $L_t$ nous avons la majoration requise.

THÉORÈME 4.2. *Supposons que*

$$N^i\exp(-r^{\varepsilon}) \leqslant \tau_i \leqslant N^i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant k,$$
$$q_1 \leqslant \exp(0.8r^{\varepsilon})$$

*et*

$$q_i \leqslant \exp\Big(\frac{1}{10k}r^{\varepsilon}\Big), \qquad 2 \leqslant i \leqslant k.$$

*Soit*

$$S = \sum_{p\leqslant N} e\big(f(p)\big)$$

*alors*

$$S \ll \frac{\pi(N)(rq)^{5\varepsilon}}{q^{1/2k}}.$$

D é m o n s t r a t i o n. Nous partageons l'intervalle $[1, N]$ en $[\exp r^{1/2}]$ intervalles de longueur $A = N[\exp r^{1/2}]^{-1}$. Soit $I = ]N_1-A, N_1]$ un tel intervalle. Posons $r_1 = \log N_1$. Nous avons $r_1 \leqslant r$ et $r_1 \geqslant \log A \geqslant r-\sqrt{r}$ et de plus

$$N_1\exp(-\sqrt{r}) < A < N_1.$$

La contribution d'un intervalle $I$ à la somme $S$ est

$$\sum_{N_1-A<p\leqslant N_1} e\Big(\frac{g(p)}{q}+\alpha_0+\sum_{i=1}^{k}\frac{\theta_i p^i}{q_i\tau_i}\Big)$$



et

$$e\Big(\sum_{i=1}^{k}\frac{\theta_i p^i}{q_i\tau_i}\Big) = e\Big(\sum_{i=1}^{k}\frac{\theta_i N_1^i}{q_i\tau_i}\Big) + O\Big(\frac{A}{N}\exp(r^{\varepsilon})\Big).$$

Nous pouvons appliquer le théorème 4.1 à la somme

$$\sum_{N_1-A<p\leqslant N_1} e_q\big(g(p)\big)$$

puisque $q \leqslant \exp(0.9r^{\varepsilon}) \ll \exp(r_1^{\varepsilon})$ et $A \geqslant N_1\exp(-\sqrt{r}) > N_1\exp(-r_1^{1-2\varepsilon})$. Donc

$$\sum_{N_1-A<p\leqslant N_1} e\big(f(p)\big) \ll \frac{A(r_1q)^{5\varepsilon}}{r_1q^{1/2k}} + \frac{A^2}{N}\exp(r^{\varepsilon}) \ll \frac{A(rq)^{5\varepsilon}}{rq^{1/2k}}$$

puisque $(A/N)\exp(r^{\varepsilon}) \ll \exp(r^{\varepsilon}-\sqrt{r}) \ll r^{-1}q^{-1/2k}$. Nous obtenons alors

$$S \ll \exp(\sqrt{r})\frac{A(rq)^{5\varepsilon}}{rq^{1/2k}} \ll \frac{N(rq)^{5\varepsilon}}{rq^{1/2k}} \ll \frac{\pi(N)(rq)^{5\varepsilon}}{q^{1/2k}}.$$

**5. L'un des $q_i$ est $> \exp(cr^{\varepsilon})$.** Dans tout ce paragraphe nous poserons

$$\tau_1 = N\exp(-r^{\varepsilon}) \quad \text{et} \quad \tau_i = N^i\exp(-0.2r^{\varepsilon}), \quad 2 \leqslant i \leqslant k.$$

Nous supposerons en outre qu'il existe un indice $s$ $(1 \leqslant s \leqslant k)$ tel que $\alpha_s$ satisfasse l'une des conditions suivantes

I. $s \geqslant 2$ et $N^{\frac{s}{2}+\frac{1}{4}} \geqslant q_s \geqslant \exp(\log^4 r)$.

II. $s \geqslant 2$, $q_s > N^{\frac{s}{2}+\frac{1}{4}}$ et $\alpha_s$ s'écrit $\alpha_s = \dfrac{a_0'}{q_0'}+\dfrac{\eta}{q_0'q_1'}+\dfrac{\theta_1'}{q_1'\tau_1'}$ où $(a_0', q_0') = 1$, $(q_0', q_1') = 1$, $\eta\theta_1' \leqslant 0$, $\eta = \pm 1$, $|\theta_1'| < 1$ et $1 \leqslant q_0' \leqslant N^{\frac{s}{2}+\frac{1}{4}} \leqslant q_1' \leqslant \tau_1' \leqslant \tau_s$.

III. $s = 1$ et $q_1 \geqslant \exp(\log^4 r)$.

Nous définissons le réel $\delta$ par les conditions suivantes

I. $\delta = \log\min(N^{1/4}, q_s)$.

II. Si $q_0' < \exp(0.01r^{\varepsilon})$, $\delta = \log\min\Big(N^{1/4}, \dfrac{N^s}{q_1'}\Big)$, si $q_0' \geqslant \exp(0.01r^{\varepsilon})$, $\delta = \log\min(N^{1/4}, q_0')$.

III. $\delta = \log\min\Big(N^{1/4}, q_1; \dfrac{N}{q_1}\Big)$.

Nous posons

$$\varrho = \frac{\delta}{5} \quad \text{et} \quad \varrho_0 = \frac{\varrho}{k^2\Big(2+\log k\sqrt{\dfrac{r}{\delta}}\Big)}.$$

LEMME 5.1 [5]. *Soient $a$ et $n > 0$ deux entiers et soit*

$$S(n) = \sum_{a<x\leqslant a+n} e(\beta_0+\beta_1 x+\ldots+\beta_k x^k)$$

*où $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k$ sont réels. Alors si $h > 0$ et $l$ sont des entiers tels que $l \geqslant \frac{1}{2}k(k+1)+kh$ on a*

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 |S(n)|^{2l} d\beta_1 \ldots d\beta_k \leqslant K^h \log^h n\, n^{2l-\frac{1}{2}k(k+1)+\delta_h}$$

*où $\delta_h = \frac{1}{2}k(k+1)\left(1-\frac{1}{k}\right)^h$ et $K = 48^{2l}(l!)^2 l^k k^{\frac{1}{2}k(k-1)}$.*

LEMME 5.2. *Soient $\mathscr{G}$ et $\mathscr{H}$ deux ensembles d'entiers positifs et $t$ un entier positif qui vérifient les conditions*

$$\text{I} \quad \textit{et} \quad (t, q_s) = 1 \ \textit{et si} \ y \in \mathscr{G} \ (y, q_s) = 1,$$

*ou*

$$\text{II} \quad \textit{et} \quad (t, q_0') = 1 \ \textit{et si} \ y \in \mathscr{G} \ (y, q_0') = 1,$$

*ou* III.

*Soit $\psi$ une fonction à valeurs complexes telles que si $Y \leqslant N$ et $Y > Y'$ $\geqslant Y^{0.6}$.*

(5.1)
$$\sum_{Y-Y'<y\leqslant Y} |\psi(y)| \ll Y'r$$

*et*

(5.2)
$$\sum_{Y-Y'<y\leqslant Y} |\psi(y)|^2 \ll Y'r^3.$$

*Soit*

$$S = \sum_{y\in\mathscr{G}} \psi(y) \sum_{x\in\mathscr{H}} e\big(f(t^2xy)\big)$$

*où la sommation est restreinte aux couples $(x, y)$ qui vérifient*

$$t^2xy \leqslant N$$

*et*

$$C_2 N^{0.24} t^{-1} \leqslant y \leqslant C_3 N^{0.5} t^{-1}$$

*où $C_2$ et $C_3$ sont des constantes positives.*

*Alors*

$$S \ll r^{2.75} t^{-1.1} \exp(-\varrho_0) N.$$

**Démonstration.** Si $t > \exp(1.2\varrho_0)$ en partageant l'intervalle $[C_2N^{0.24}t^{-1}, C_3N^{0.5}t^{-1}]$ en au plus $r$ intervalles du type $]CM, M]$ avec



$\frac{1}{4} \leqslant C \leqslant \frac{1}{2}$ et en appliquant l'inégalité (5.1) nous obtenons

$$|S| \leqslant \sum_M \sum_{CM<y\leqslant M} |\psi(y)| \sum_{x\leqslant Nt^{-2}M^{-1}C^{-1}} 1$$
$$\ll \sum_M rNt^{-2} \ll r^2 Nt^{-1.1} \exp(-1.08\varrho_0).$$

Nous supposerons donc maintenant que $t \leqslant \exp(1.2\varrho_0)$.

Nous partageons un intervalle $]CM, M]$ en au plus $\Delta = \exp(\varrho_0)$ intervalles $]Y-Y_0, Y]$ où $Y_0 = (1-C)M\Delta^{-1}$. Soit $S(Y)$ la partie de la somme $S$ relative à un de ces intervalles.

En posant

$$\beta_j' = \beta_j'(y) = a_j t^{2j} y^j, \quad 1 \leqslant j \leqslant k$$

et

$$X = Nt^{-2} Y^{-1}$$

nous trouvons

$$S(Y) = \sum_{Y-Y_0<y\leqslant Y} \psi(y) S_y' \quad \text{où} \quad S_y' = \sum_{x\leqslant X} e\big(f(t^2yx)\big) + O(X\Delta^{-1}).$$

Nous avons en effet

$$Nt^{-2}y^{-1} - Nt^{-2}Y^{-1} \ll Nt^{-2}Y_0Y^{-2} \ll X\Delta^{-1}.$$

Pour $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_k) \in \boldsymbol{R}^k$ nous posons

$$S(\beta) = \sum_{x\leqslant X} e(\beta_1 x+\ldots+\beta_k x^k).$$

Si le point $\beta$ appartient au domaine $\Omega_y \subset \boldsymbol{R}^k$ défini par les inégalités:

$$|\beta_j - \beta_j'| \leqslant 0.5 X^{-j}\Delta^{-1}, \quad 1 \leqslant j \leqslant k,$$

alors

$$S_y' = e(a_0) S(\beta) + O(X\Delta^{-1}).$$

Si $l$ est un entier positif nous avons

$$|S_y'|^{2l} \ll l|S(\beta)|^{2l} + A^l X^{2l} \Delta^{-2l}$$

où $A$ est une constante positive qui ne dépend que de $k$ et de $\varepsilon$. En intégrant les deux membres dans le domaine $\Omega_y$ on a

$$\int_{\Omega_y} |S_y'|^{2l} d\beta \ll l \int_{\Omega_y} |S(\beta)^{2l}| d\beta + \operatorname{mes}\Omega_y A^l X^{2l} \Delta^{-2l}$$

avec $d\beta = d\beta_1 \ldots d\beta_k$. Donc

$$|S_y'|^{2l} \ll lX^{\frac{1}{2}k(k+1)} \Delta^k \int_{\Omega_y} |S(\beta)|^{2l} d\beta + A^l X^{2l} \Delta^{-2l}$$

et

$$\sum_{Y-Y_0<y\leqslant Y} |S'_y|^{2l}$$
$$\ll lX^{\frac{1}{2}k(k+1)}\Delta^k \int_0^1 \dots \int_0^1 \Big(\sum_{Y-Y_0<y\leqslant Y} \eta_y(\beta)\Big) |S(\beta)|^{2l} d\beta + Y_0 A^l X^{2l} \Delta^{-2l}$$

où $\eta_y$ désigne la fonction caractéristique de $\Omega_y$ modulo $\boldsymbol{Z}^k$ dans $\boldsymbol{R}^k$. $\sum_{Y-Y_0<y\leqslant Y} \eta_y(\beta)$ est majoré par le nombre des entiers $y'$ $(Y-Y_0<y'\leqslant Y)$ pour lesquels $\Omega_{y'}$ contient un point $\beta'$ tel que $\beta'-\beta \in \boldsymbol{Z}^k$. $y'$ vérifie alors l'équation

(5.3) $$\beta'_s(y')-\beta'_s(y) = b+O(X^{-s}\Delta^{-1}).$$

Nous montrerons que le nombre $A$ des solutions de (5.3) vérifie

(5.4) $$A \ll Y_0 \exp(-4.41\varrho).$$

L'équation (5.3) s'écrit

(5.5) $$t^{2s} a_s(y'^s - y^s) = b+O(X^{-s}\Delta^{-1}).$$

Étude de l'équation (5.5) dans le cas III. L'équation (5.5) entraîne alors l'équation

(5.6) $$t^2 \frac{a_1}{q_1}(y'-y) = b+O\left(X^{-1}\Delta^{-1}+\frac{t^2 Y_0}{q_1\tau_1}\right).$$

D'après ([6], lemme 9, chap. I) le nombre de solutions de (5.6) est majoré par

$$\ll (Y_0 q_1^{-1}+1)(X^{-1}\Delta^{-1}q_1+t^2 Y_0 \tau_1^{-1}+t^2)$$
$$\ll Y_0(X^{-1}\Delta^{-1}+X^{-1}\Delta^{-1}Y_0^{-1}q_1+Y_0 t^2 q_1^{-1}\tau_1^{-1}+t^2 q_1^{-1}+t^2\tau_1^{-1}+t^2 Y_0^{-1}).$$

Il suffit de montrer que chaque terme de la parenthèse est majoré par $\exp(-4.41\varrho)$. Nous avons

$$X^{-1}\Delta^{-1} = N^{-1}Yt^2\Delta^{-1} \ll N^{-0.5}t\Delta^{-1} \ll \exp(-5\varrho)$$

car $r \geqslant 20\varrho$. De même

$$X^{-1}\Delta^{-1}Y_0^{-1}q_1 \leqslant N^{-1}t^2 Y Y_0^{-1}\Delta^{-1}q_1 \ll q_1 N^{-1}t^2 \ll \exp(-4.76\varrho)$$

car $q_1 N^{-1} \leqslant \exp(-5\varrho)$, $t \leqslant \exp(1.2\varrho_0)$ et $\varrho_0 \leqslant 0.1\varrho$. De même $q_1^{-1} \leqslant \exp(-5\varrho)$ donc $t^2 q_1^{-1} \leqslant \exp(-4.76\varrho)$. D'autre part

$$Y_0 t^2 q_1^{-1}\tau_1^{-1} \leqslant N^{0.5}t\Delta^{-1}q_1^{-1}\tau_1^{-1}$$
$$\leqslant \exp(-4.8\varrho) \quad \text{car } \tau_1 \geqslant N^{0.5}.$$

Pour la même raison

$$t^2\tau_1^{-1} \leqslant \exp(-5\varrho).$$



D'après la définition de $S$ nous avons puisque $\varrho_0 \leqslant 0.084\varrho$

$$t^2 Y_0^{-1} \leqslant \Delta N^{-0.24}t^3 \leqslant \exp(-4.41\varrho)$$

ce qui montre que dans ce cas $A$ vérifie la majoration (5.4).

Étude de l'équation (5.5) dans le cas I. Nous supposerons seulement que $N^{\frac{s}{2}+\frac{1}{4}} \leqslant \tau_s \leqslant N^s \exp(-0.2r^\varepsilon)$. L'équation (5.5) entraîne

(5.7) $$t^{2s}\frac{a_s}{q_s}(y'^s-y^s) = b+O(X^{-s}\Delta^{-1}+t^{2s}Y_0 Y^{s-1}q_s^{-1}\tau_s^{-1}).$$

On sait que le nombre des solutions de l'équation

$$a_s t^{2s} y^s \equiv a \bmod q_s, \quad \text{avec } (y, q_s) = 1,$$

pour $a$ fixé est majoré par

$$O\big((Y_0 q_s^{-1}+1)q_s^{\varepsilon_0}\big), \quad \varepsilon_0 > 0$$

où $O$ ne dépend que de $\varepsilon_0$. Le nombre des $a$ qui conviennent est majoré par

$$O(X^{-s}\Delta^{-1}q_s+t^{2s}Y_0 Y^{s-1}\tau_s^{-1}+1)$$

donc si $\varepsilon_0$ ne dépend que de $k$ nous avons

$$A \ll (Y_0 q_s^{-1}+1)q_s^{\varepsilon_0}(X^{-s}\Delta^{-1}q_s+t^{2s}Y_0 Y^{s-1}\tau_s^{-1}+1),$$

(5.8) $$A \ll Y_0 q_s^{\varepsilon_0}(X^{-s}\Delta^{-1}+Y_0^{-1}X^{-s}\Delta^{-1}q_s+t^{2s}Y_0 Y^{s-1}q_s^{-1}\tau_s^{-1}+ \\ +t^{2s}Y^{s-1}\tau_s^{-1}+q_s^{-1}+Y_0^{-1}).$$

Prenons $\varepsilon_0 = 1/1000k$. Si $q_s \leqslant N^{1/4}$ on a

$$q_s^{\varepsilon_0} \leqslant \exp(5\varepsilon_0\varrho) \leqslant \exp(0.02\varrho)$$

et si $q_s \geqslant N^{1/4}$ on a

$$q_s^{\varepsilon_0} \leqslant N^{\varepsilon_0 s} \leqslant \exp\left(\frac{r}{1000}\right) \leqslant \exp(0.02\varrho).$$

Il suffit donc de démontrer que chaque terme de la parenthèse de (5.8) est majoré par $\exp(-4.43\varrho)$. On a

$$Y_0^{-1}X^{-s}\Delta^{-1}q_s \ll N^{-s}t^{2s}Y^{s-1}q_s \ll N^{-0.5s-0.5}q_s t^{s+1} \ll N^{-0.25}\exp\big(1.2(k+1)\varrho_0\big)$$
$$\ll \exp(-4.44\varrho)$$

puisque $(k+1)\varrho_0 < 0.3\varrho$. De même

$$t^{2s}Y_0 Y^{s-1}q_s^{-1}\tau_s^{-1} \leqslant t^s N^{0.5s}q_s^{-1}\tau_s^{-1} \leqslant t^s N^{-0.25}q_s^{-1} \leqslant \exp(1.2k\varrho_0-10\varrho)$$
$$\leqslant \exp(-5\varrho) \quad \text{puisque } k\varrho_0 \leqslant 0.2\varrho.$$

Nous avons aussi

$$t^{2s}Y^{s-1}\tau_s^{-1} \leqslant t^s N^{0.56}\tau_s^{-1} \leqslant t^s N^{-0.25} \leqslant \exp(-4.76\varrho) \qquad \text{puisque } \tau_s \geqslant N^{s/2+1/4}.$$

Les autres termes se majorent comme précédemment.

Étude de l'équation (5.5) dans le cas II et $q_0' \geqslant \exp(0.01r^\varepsilon)$. La démonstration se fait de la même façon que dans le cas précédent en posant

$$\alpha_s = \frac{a_0'}{q_0'} + \frac{\theta_0'}{q_0'\tau_0'} = \frac{a_0'}{q_0'} + \frac{\eta}{q_0'q_1'} + \frac{\theta_1'}{q_1'\tau_1'}$$

où

$$|\theta_1'| \leqslant 1 \quad \text{et} \quad N^{s/2+1/4} \leqslant q_1' \leqslant \tau_0' \leqslant N^s\exp(-0.2r^\varepsilon).$$

Étude de l'équation (5.5) dans le cas II et $q_0' < \exp(0.01r^\varepsilon)$. L'équation (5.5) s'écrit

$$t^{2s}\frac{a_0'}{q_0'}(y'^s - y^s) + \frac{t^{2s}\eta}{q_0'q_1'}(y'^s - y^s) + \frac{t^{2s}\theta_1'}{q_1'\tau_1'}(y'^s - y^s) = b + O(X^{-s}\Delta^{-1}).$$

Nous avons

$$\frac{t^{2s}\theta_1'}{q_1'\tau_1'}(y'^s - y^s) \ll t^{2s}Y^s\Delta^{-1}N^{-s-0.5} \ll X^{-s}\Delta^{-1}.$$

L'équation (5.5) est donc équivalente à l'équation

$$(5.9) \qquad t^{2s}\frac{a_0'}{q_s'}(y'^s - y^s) + \frac{t^{2s}\eta}{q_0'q_1'} = b + O(X^{-s}\Delta^{-1}).$$

Soit $n$ un entier $(0 \leqslant n < q_0')$ et soient $y_1$ et $y_2$ deux solutions de (5.9) congrues à $n$ modulo $q_0'$. On a alors

$$(5.10) \qquad t^{2s}\frac{a_0'}{q_0'}(y_2^s - y_1^s) + \frac{t^{2s}\eta}{q_0'q_1'}(y_2^s - y_1^s) = b_2 - b_1 + O(X^{-s}\Delta^{-1}).$$

Puisque $y_2^s - y_1^s \equiv 0 \bmod q_0'$ l'équation (5.10) devient

$$(5.11) \qquad \frac{t^{2s}\eta}{q_0'q_1'}(y_2^s - y_1^s) = b_3 + O(X^{-s}\Delta^{-1}).$$

Nous avons d'autre part

$$\frac{t^{2s}\eta}{q_0'q_1'}(y_2^s - y_1^s) \ll t^{2s}Y^sN^{-s/2-1/4} \ll t^sN^{-1/4} \leqslant \tfrac{1}{2}$$



pour $N$ assez grand. Nous avons donc $b_3 = 0$. Le nombre des solutions de (5.11) est donc

$$\ll X^{-s}\Delta^{-1}t^{-2s}Y^{-s+1}q_1' + 1$$
$$\ll Y_0(q_1'N^{-s} + Y_0^{-1}) \ll Y_0\exp(-4.68\varrho)$$

puisque $q_1'N^{-s} \leqslant \exp(-5\varrho)$. En faisant la somme pour tous les $n$ $(0 \leqslant n < q_0')$ nous obtenons

$$A \ll Y_0q_0'\exp(-4.68\varrho) \ll Y_0\exp(-4.43\varrho)$$

puisque $q_0' \leqslant \exp(0.01r^\varepsilon) \leqslant \exp(0.25\varrho)$.

Majoration de $|S(Y)|^{2l}$. En utilisant le lemme 5.1 avec

$$l = \left[\frac{1}{4}k(k+1) + kh + \frac{1}{2}\right] \quad \text{et} \quad h = \left[\frac{\log 8k(k+1)(r/\delta)}{-\log\left(1 - \frac{1}{k}\right)} + 1\right]$$

nous obtenons

$$(5.12) \qquad \sum_{Y-Y_0<y\leqslant Y}|S_y'|^{2l} \ll lX^{\frac{k(k+1)}{2}}\Delta^kY_0K^hr^hY_0^{2l-\frac{k(k+1)}{2}+\delta_h}\exp(-4.41\varrho) + \\ + A^lY_0X^{2l}\Delta^{-2l}.$$

Nous avons aussi

$$|S(Y)|^2 \leqslant \Big(\sum_{Y-Y_0<y\leqslant Y}|\psi(y)|^2\Big)\Big(\sum_{Y-Y_0<y\leqslant Y}|S_y'|^2\Big) \leqslant Br^3Y_0\sum_{Y-Y_0<y\leqslant Y}|S_y'|^2$$

où $B$ est la constante positive qui intervient dans l'inégalité (5.2). Donc

$$|S(Y)|^{2l} \leqslant B^lr^{3l}Y_0^{2l-1}\sum_{Y-Y_0<y\leqslant Y}|S_y'|^{2l}$$

et en utilisant (5.12)

$$|S(Y)|^{2l} \ll lB^lK^hr^{3l+h}\Delta^kY_0^{4l-\frac{k(k+1)}{2}+\delta_h}X^{\frac{k(k+1)}{2}}\exp(-4.41\varrho) + \\ + (AB)^lr^{3l}Y_0^{2l}X^{2l}\Delta^{-2l}.$$

Puisque $Y_0 \ll X\Delta^{-1}$ et $Y_0X \leqslant \frac{1-c}{c}Nt^{-2}\Delta^{-1} \leqslant 3Nt^{-2}\Delta^{-1}$ nous obtenons

$$|S(Y)|^{2l} \ll lB^lK^hr^{3l+h}3^{2l}(Nt^{-2}\Delta^{-1})^{2l}X^{\delta_h}\exp(-4.41\varrho) + \\ + (9AB)^lr^{3l}(Nt^{-2}\Delta^{-1})^{2l}\Delta^{-2l}.$$

**Majoration de** $|S(Y)|$. Démontrons que $l \leqslant 2k^2\left(2+\log k\sqrt{\frac{r}{\delta}}\right)$. Il suffit de vérifier que

$$\frac{1}{4}(k+1)+\frac{\log 8k(k+1)\frac{r}{\delta}}{-\log\left(1-\frac{1}{k}\right)}+1+\frac{1}{2k} \leqslant 2k\left(2+\log k\sqrt{\frac{r}{\delta}}\right).$$

Puisque $-\log\left(1-\frac{1}{k}\right) \geqslant \frac{1}{k}$, $\log\left(1+\frac{1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{k}$ et $\log 8 < 2.5$ nous obtenons

$$k\left(\frac{1}{4}+\log 8\right)+k\log\left(1+\frac{1}{k}\right)+\frac{5}{4}+\frac{1}{2k} \leqslant 4k$$

et $2.75k+2.5 \leqslant 4k$ ce qui est vérifié pour $k \geqslant 2$.

Nous avons donc $4\varrho \geqslant 2l\varrho_0$. D'après la définition de $h$ $r\delta_h \leqslant 0.08\delta = 0.4\varrho$ donc

$$X^h \leqslant \exp(0.4\varrho).$$

Puisque $l \ll \log r$, $h\log K \ll \log^3 r \leqslant 0.01\varrho$ lorsque $N$ est assez grand. Nous obtenons donc

$$|S(Y)|^{2l} \ll l(9B)^l r^{3l+\frac{l}{k}} N^{2l}t^{-4l}\exp(-4l\varrho_0)+(9AB)^l r^{3l}N^{2l}t^{-4l}\Delta^{-4l}$$

donc

$$|S(Y)| \ll r^{1.75}Nt^{-2}\Delta^{-2}$$

et $S \ll r^{2.75}Nt^{-2}\Delta^{-1}$ ce qui termine la démonstration.

LEMME 5.3. *Soit $\mathcal{D}$ un ensemble d'entiers positifs et $t$ un entier positif. Nous supposons que les conditions suivantes sont réalisées*

$$\text{I} \quad \textit{et} \quad t^k \leqslant \exp(0.21\varrho) \quad \textit{et si} \quad d\in\mathcal{D}(d, q_s) = 1,$$

*ou*

$$\text{II} \quad \textit{et} \quad t^k \leqslant \exp(0.21\varrho) \quad \textit{et si} \quad d\in\mathcal{D}(d, q_0') = 1$$

*ou*

$$\text{III} \ \textit{et} \ t = 1,\ q_1 \geqslant \exp(0.8r^s) \ \textit{et} \ q_i \leqslant \exp\left(\frac{0.04}{k}r^s\right) \ \textit{pour} \ 2 \leqslant i \leqslant k.$$

*Posons*

$$S_d = \sum_{M'<tx\leqslant M} e\big(f(dtx)\big)$$

*où $N^{0.75} \ll M \leqslant N$, $0.25M < M' \leqslant 0.5M$ et la sommation est restreinte au domaine*

$$0 \leqslant dtx \leqslant N.$$



*On pose*

$$S = \sum_{d\in\mathcal{D}} S_d$$

*alors on a*

$$S \ll r^{0.25}Nt^{-1}\exp(-\varrho_0).$$

**Démonstration.** Nous notons $S_1$ la partie de la somme $S$ pour laquelle $d \leqslant NM^{-1}\exp(-\varrho_0)$, alors si $M \leqslant N\exp(-\varrho_0)$

$$S_1 \ll \sum_{d\leqslant NM^{-1}\exp(-\varrho_0)} Mt^{-1} \ll Nt^{-1}\exp(-\varrho_0)$$

et sinon $S_1 = 0$.

Posons $S = S_1+S_2$ et majorons la somme $S_2$. Posons $\Delta = \exp(\varrho_0)$ et $Y = [Mt^{-1}\Delta^{-1}]$. Nous avons alors

$$S_d = \frac{1}{Y}\sum_{1\leqslant y\leqslant Y} S_y + O(Y)$$

où

$$S_y = \sum_{Z'<x\leqslant Z} e\Big(f\big(dt(y+x)\big)\Big)$$

et $Z' = M't^{-1}$, $Z = \min(Nd^{-1}t^{-1}, Mt^{-1})$.

En posant $Y_j = Y_j(y) = \dfrac{f^{(j)}(y)}{j!}$, $1 \leqslant j \leqslant k$ nous obtenons

$$f\big(dt(y+x)\big)-f(dty) = Y_1x+\ldots+Y_kx^k.$$

Nous posons

$$S(\beta) = \sum_{Z'<x\leqslant Z} e(\beta_1x+\ldots+\beta_kx^k).$$

Si le point $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_k)$ appartient au domaine $\Omega_y$ de $\boldsymbol{R}^k$ défini par

$$|\beta_j - Y_j| \leqslant 0.5Z^{-j}\Delta^{-1}, \quad 1 \leqslant j \leqslant k$$

alors

$$|S_y| = |S(\beta)|+O(Z\Delta^{-1})$$

et

$$|S_y|^{2l} \ll l|S(\beta)|^{2l}+A^{2l}Z^{2l}\Delta^{-2l} \qquad (l \geqslant 1)$$

où $A$ est une constante positive qui ne dépend que de $k$ et $\varepsilon$. De même que dans la démonstration du lemme 5.2 en intégrant sur le domaine $\Omega_y$ nous obtenons

$$|S_y|^{2l} \ll lZ^{\frac{1}{2}k(k+1)}\Delta^k\int_{\Omega_y}|S(\beta)|^{2l}d\beta+A^{2l}Z^{2l}\Delta^{-2l}$$

et

$$\sum_{1\leqslant y\leqslant Y}|S_y|^{2l} \ll lZ^{\frac{1}{2}k(k+1)}\Delta^k\int_0^1\ldots\int_0^1\Big(\sum_{1\leqslant y\leqslant Y}\eta_y(\beta)\Big)|S(\beta)|^{2l}d\beta+YA^{2l}Z^{2l}\Delta^{-2l},$$

où $\eta_y$ désigne la fonction caractéristique de $\Omega_y$ modulo $\boldsymbol{Z}^k$ dans $\boldsymbol{R}^k$. $\sum_{1\leqslant y\leqslant Y}\eta_y(\beta)$ est majorée par le nombre des entiers $y'$ $(1\leqslant y\leqslant Y)$ pour lesquels $\Omega_{y'}$ contient un point $\beta'$ tel que $\beta'-\beta\in\boldsymbol{Z}^k$. $y'$ vérifie alors le système

$$\text{(5.13)}\qquad \begin{cases} Y_{k-1}(y')-Y_{k-1}(y) = b_{k-1}+O(Z^{-k+1}\Delta^{-1}),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ Y_{s-1}(y')-Y_{s-1}(y) = b_{s-1}+O(Z^{-s+1}\Delta^{-1}),\end{cases}$$

lorsque $s\geqslant 2$. Le système (5.13) s'écrit

$$\begin{cases}\binom{k}{k-1}\alpha_k(y'-y) = b_{k-1}+O(Z^{-k+1}\Delta^{-1}),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \binom{k}{s-1}\alpha_k(y'^{k-s+1}-y^{k-s+1})+\ldots+\binom{s}{s-1}\alpha_s(y'-y) = b_{s-1}+O(Z^{-s+1}\Delta^{-1}).\end{cases}$$

Nous multiplions la première équation par 1! la deuxième par 2! etc. Nous retranchons à chacune des équations obtenues la première équation multipliée par l'entier

$$d_j=(k-1)\ldots(k-j+1)\frac{y'^j-y^j}{y'-y},\qquad 2\leqslant j\leqslant k-s+1,$$

qui est $\ll Y^{j-1}\ll Z^{j-1}$.

Nous obtenons alors le système

$$\begin{cases}2!\binom{k-1}{k-2}\alpha_{k-1}(y'-y) = b'_{k-2}+O(Z^{-k+1}\Delta^{-1})\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (k-s+1)!\binom{k-1}{s-1}\alpha_{k-1}(y'^{k-s}-y^{k-s})+\ldots\\ \qquad\ldots+(k-s+1)!\,s\alpha_s(y'-y) = b'_{s-1}+O(Z^{-s+1}\Delta^{-1})\end{cases}$$

où $b'_j=(k-j+1)!b_j-d_jb_{k-1}$. En répétant le procédé nous obtiendrons l'équation

$$\text{(5.14)}\qquad c_0\alpha_s(y'-y) = b+O(Z^{-s+1}\Delta^{-1})$$

où $c_0$ est un entier positif ne dépendant que de $k$ et de $s$ et $b$ est entier. Nous démontrerons que le nombre $A$ des solutions $y'$ de (5.14) vérifie

$$\text{(5.15)}\qquad A\ll Y\exp(-4.58\varrho).$$

**Étude du cas I.** Nous supposons seulement que $\tau_s\geqslant N^{\frac{s}{2}+\frac{1}{4}}$. L'équation (5.15) entraîne

$$\text{(5.16)}\qquad c_0t^sd^s\frac{a_s}{q_s}(y'-y) = b+O(Z^{-s+1}\Delta^{-1}+YN^{0.5s-0.25}M^{-s}q_s^{-1}).$$



D'après ([6], lemme 9, chap. I) nous avons

$$\begin{aligned}A&\ll(Yq_s^{-1}+1)(Z^{-s+1}\Delta^{-1}q_s+YN^{0.5s-0.25}M^{-s}+t^s)\\ &\ll Y(Z^{-s+1}\Delta^{-1}+Y^{-1}Z^{-s+1}\Delta^{-1}q_s+YN^{0.5s-0.25}M^{-s}q_s^{-1}+\\ &\qquad+N^{0.5s-0.25}M^{-s}+t^sq_s^{-1}+t^sY^{-1}).\end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que chaque terme de la parenthèse est majoré par $\exp(-4.58\varrho)$. Puisque $s\geqslant 2$ et $t^k\leqslant\exp(0.21\varrho)$ nous avons

$$Z^{-s+1}\Delta^{-1}\ll Z^{-1}\ll N^{-0.75}t\ll\exp(-5\varrho),$$

et

$$Y^{-1}Z^{1-s}\Delta^{-1}q_s\ll q_sZ^{-s}\ll q_sN_1^{-0.75s}t_1^s\ll N^{-0.25}t^s\ll\exp(-4.79\varrho).$$

Nous avons aussi

$$YN^{0.5s-0.25}M^{-s}q_s^{-1}\ll N^{0.5-0.25s}q_s^{-1}\ll q_s^{-1}\leqslant\exp(-5\varrho)$$

et $N^{0.5s-0.25}M^{-s}\ll N^{-0.75}\ll\exp(-5\varrho)$.

Les majorations de $t^sq_s^{-1}$ et $Y^{-1}$ sont évidentes.

**Étude de l'équation (5.14) dans le cas II et $q'_0\geqslant\exp(0.01r^s)$.** La démonstration se fait comme précédemment en posant

$$\alpha_s=\frac{a'_0}{q'_0}+\frac{\theta'_0}{q'_0\tau'_0}\qquad\text{avec } |\theta'_0|\leqslant 1 \text{ et } \tau'_0\geqslant q'_0.$$

**Étude de l'équation (5.14) dans le cas II et $q'_0<\exp(0.01r^s)$.** L'équation (5.14) s'écrit

$$\text{(5.17)}\qquad c_0t^sd^s\frac{a'_0}{q'_0}(y'-y)+c_0t^s\frac{d^s\eta}{q'_0q'_1}(y'-y)+c_0t^s\frac{d^s\theta'_1}{q'_1\tau'_1}(y'-y) = b+O(Z^{1-s}\Delta^{-1}).$$

Nous avons

$$c_0t^s\frac{d^s\theta'_1}{q'_1\tau'_1}(y'-y)\ll(NM^{-1})^sYN^{-s-0.5}\ll N^{-0.5}t^{-s}Z^{1-s}\Delta^{-1}\ll Z^{1-s}\Delta^{-1}.$$

L'équation (5.17) devient donc

$$\text{(5.18)}\qquad c_0t^sd^s\frac{a'_0}{q'_0}(y'-y)+c_0t^s\frac{d^s\eta}{q'_0q'_1}(y'-y) = b+O(Z^{1-s}\Delta^{-1}).$$

Soit $0\leqslant n<q'_0$ et soient $y_1$ et $y_2$ deux solutions de (5.18) congrues à $n$ modulo $q'_0$. Alors

$$\text{(5.19)}\qquad c_0t^s\frac{d^s\eta}{q'_0q'_1}(y_2-y_1) = b_3+O(Z^{1-s}\Delta^{-1})$$

où $b_3 = b_2 - b_1 - c_0 t^s d^s \frac{a_0'}{q_0'}(y_2 - y_1)$ est un entier. Puisque

$$t^s \frac{d^s \eta}{q_0' q_1'}(y_2 - y_1) \ll (NM^{-1})^s Y N^{-0.5s-0.25} \ll N^{0.5s-0.25} M^{1-s} \Delta^{-1} < \tfrac{1}{2}$$

pour $N$ assez grand, $b_3 = 0$. L'équation (5.19) a donc, pour $y_1$ fixé au plus

$$O(Z^{1-s}\Delta^{-1} t^{-s} d^{-s} q_1' + 1) \quad \text{solutions.}$$

En sommant pour $0 \leqslant n < q_0'$ nous obtenons

$$(5.20) \quad A \ll q_0'(Z^{1-s}\Delta^{-1}t^{-s}d^{-s}q_1' + 1) \ll Y(Y^{-1}Z^{1-s}\Delta^{-1}t^{-s}d^{-s}q_1' + Y^{-1})q_0'.$$

Puisque $q_0' \leqslant \exp(0.25\,\varrho)$ il suffit de montrer que chaque terme de la parenthèse est majoré par $\exp(-4.83\,\varrho)$. On a

$$Y^{-1}Z^{1-s}\Delta^{-1}t^{-s}d^{-s}q_1' \ll M^{-s}d^{-s}q_1' \ll q_1' N^{-s}\exp(s\varrho_0)$$

puisque $d \geqslant NM^{-1}\exp(-\varrho_0)$ et donc, sachant que $k\varrho_0 \leqslant 0.17\,\varrho$, on a

$$Y^{-1}Z^{1-s}\Delta^{-1}t^{-s}d^{-s}q_1' \ll \exp(-4.83\,\varrho).$$

La majoration de $Y^{-1}$ est évidente. En prenant les mêmes notations que dans la démonstration du lemme 5.2 et si $l$ et $h$ conservent les mêmes valeurs nous obtenons

$$\sum_{1 \leqslant y \leqslant Y} |S_y|^{2l} \ll l\Delta^k K^h r^h Z^{2l+\delta h} Y \exp(-4.58\,\varrho) + YA^{2l}Z^{2l}\Delta^{-2l}$$

et puisque $K^h \ll \exp(0.01\,\varrho)$, $Z^{\delta h} \ll \exp(0.4\,\varrho)$ et $\Delta^k \ll \exp(0.17\,\varrho)$ on a $\big(\sum_{1 \leqslant y \leqslant Y} |S_y|\big)^{2l} \ll lr^h Z^{2l} Y^{2l} \exp(-2l\varrho_0) + (YAZ\Delta^{-1})^{2l}$ donc

$$|S_d| \ll r^{0.25} Z\Delta^{-1} + Y \ll r^{0.25} Mt^{-1}\Delta^{-1}$$

et $S_2 \ll r^{0.25} Nt^{-1}\Delta^{-1}$ ce qui termine la démonstration du lemme dans les cas I et II.

**Étude du cas III.** Partageons l'intervalle $]Z', Z]$ en au plus $\exp(2\varrho)$ intervalles du type $]Y_1 - Y_0, Y_1]$ où $Y_0 = [M\exp(-2\varrho)]$. Si $x$ appartient à un tel intervalle

$$f(dx) - \frac{1}{q} g(dx) - \alpha_0 - \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} \frac{d^j Y_1^j}{q_j \tau_j} \theta_j \ll \max_{1 \leqslant j \leqslant k} (MN^{-1}d)^j \frac{\exp(-2\varrho)}{q_j(\tau_j N^{-1})}$$
$$\ll \exp(r^s - 7\varrho) + \exp(0.2\,r^s - 2\varrho) \ll \exp(-0.1\varrho) \leqslant \exp(-\varrho_0).$$

Si $S_d(Y_1)$ désigne la partie de la somme $S_d$ qui correspond à l'intervalle $[Y_1 - Y_0, Y_1]$ nous avons

$$|S_d(Y_1)| = |S_d'(Y_1)| + O\big(Y_0 \exp(-\varrho_0)\big)$$



où

$$S_d'(Y_1) = \sum_{Y_1 - Y_0 < x \leqslant Y_1} e_q\big(g(dx)\big).$$

Si $q'' = q \cdot q_1^{-1}$ nous avons

$$1 \leqslant q'' \leqslant \exp(0.04\,r^s).$$

Soit $0 \leqslant n < q''$ et soit $S_d'(Y_1, n)$ la partie de la somme $S_d'(Y_1)$ pour laquelle $x \equiv n$ modulo $q''$. Alors

$$|S_d'(Y_1, n)| = \Big|\sum_{\substack{Y_1 - Y_0 < x \leqslant Y_1 \\ x \equiv n \bmod q''}} e_{q_1}(a_1 dx)\Big|.$$

Si nous supposons $M > N\exp(-2\,\varrho)$ nous avons

$$dq'' \leqslant 4NM^{-1}\exp(0.25\,\varrho) \leqslant 4\exp(-1.75\,\varrho) < q_1$$

donc

$$S_d'(Y_1, n) \ll q_1.$$

Par conséquent

$$S_d(Y_1) \ll q_1 q'' + Y_0 \exp(-\varrho_0).$$

Puisque $q_1 q'' \leqslant N\exp(-4.75\varrho) \leqslant M\exp(-2\varrho - \varrho_0)$ on a

$$S_d \ll M\exp(-\varrho_0) \quad \text{et} \quad S_2 \ll N\exp(-\varrho_0).$$

Supposons maintenant que $M \leqslant N\exp(-2\varrho)$. Soit $S_2(Y_1, n)$ la partie de la somme $S_2$ pour laquelle $x \equiv n \bmod q''$. Alors

$$|S_2(Y_1, n)| \leqslant \sum_d \Big| \sum_{\frac{Y_1 - Y_0 - n}{q''} < y \leqslant \frac{Y_1 - n}{q''}} e_{q_1}(a_1 q'' dy)\Big| + O(Y_0 q''^{-1} NM^{-1}\Delta^{-1}).$$

Posons $\beta_0 = \frac{a_1 q'' d}{q_1} = \beta_0(d)$ et soit $\Omega_d$ l'ensemble des $\beta$ réels tels que

$$|\beta - \beta_0| \leqslant \tfrac{1}{2} H^{-1}\Delta^{-1}$$

où $H = Y_0 q''^{-1}$. Posons

$$S(\beta) = \sum_{\frac{Y_1 - Y_0 - n}{q''} < y \leqslant \frac{Y_1 - n}{q''}} e(\beta y).$$

Alors si $\beta \in \Omega_d$

$$\sum_y e_{q_1}(a_1 q'' dy) = S(\beta) + O(H\Delta^{-1})$$

et

$$\sum_d \Big| \sum_y e_{q_1}(a_1 q'' dy)\Big|^2 \ll H\Delta \int_0^1 \Big(\sum_d \eta_d(\beta)\Big) |S(\beta)|^2 d\beta + H^2 NM^{-1}\Delta^{-2}$$

où $\eta_d$ désigne la fonction caractéristique de $\Omega_d$ modulo 1. $\sum_d \eta_d(\beta)$ est donc majoré par le nombre $\Lambda$ des solutions de l'équation

$$\frac{a_1}{q_1} q''(d'-d) = b + O(H^{-1}\Lambda^{-1}).$$

D'après ([6], lemme 9, chap. I) nous avons

$$\begin{aligned}\Lambda &\leqslant (NM^{-1}q_1^{-1}+1)(H^{-1}\Lambda^{-1}q_1+q'')\\ &\leqslant NM^{-1}(H^{-1}\Lambda^{-1}+MN^{-1}H^{-1}\Lambda^{-1}q_1+q''MN^{-1}+q''q_1^{-1}).\end{aligned}$$

Démontrons que chaque terme de la parenthèse est majoré par $\exp(-3\varrho_0)$. Nous avons

$$\begin{aligned}H^{-1}\Lambda^{-1} &\leqslant q''\exp(2\varrho)M^{-1}\Lambda^{-1}\\ &\leqslant \exp(2.25\,\varrho)N^{-0.75}\Lambda^{-1} \leqslant \exp(-5\varrho)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}MN^{-1}H^{-1}\Lambda^{-1}q_1 &\leqslant q''\exp(2\varrho)(q_1N^{-1})\Lambda^{-1}\\ &\leqslant \exp(2.25\varrho)\exp(-5\varrho)\Lambda^{-1} \leqslant \exp(-2\,\varrho).\end{aligned}$$

Puisque $M \leqslant N\exp(-2\,\varrho)$ nous avons

$$q''MN^{-1} \leqslant \exp(-1.75\varrho).$$

La majoration de $q''\cdot q_1^{-1}$ est évidente. Nous obtenons

$$\sum_d \Big|\sum_y e_{q_1}(a_1q''dy)\Big|^2 \leqslant H^2NM^{-1}\Lambda^{-2}$$

donc

$$\sum_d \Big|\sum_y e_{q_1}(a_1q''dy)\Big| \leqslant HNM^{-1}\Lambda^{-1}$$

et

$$S_2(Y_1, n) \leqslant HNM^{-1}\Lambda^{-1}.$$

En sommant pour $0 \leqslant n < q''$ et pour tous les intervalles $]Y_1-Y_0, Y_1]$ nous obtenons $S_2 \leqslant N\Lambda^{-1}$, ce qui termine la démonstration du lemme 5.3.

LEMME 5.4 ([2], théorème 320, chap. XVIII et [8]). *Soit $1 < Y \leqslant N$ et $Y^{0.6} \leqslant Y' < Y$ alors*

$$\sum_{Y-Y'<y\leqslant Y} \nu(y) \leqslant Y'\cdot r$$

*et*

$$\sum_{Y-Y'<y\leqslant Y} \nu^2(y) \leqslant Y'\cdot r^3.$$



THÉORÈME 5.1. *Soient $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ $k+1$ nombres réels satisfaisant les conditions suivantes*

$$\alpha_i = \frac{a_i}{q_i} + \frac{\theta_i}{q_i\tau_i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant k,$$

$$(a_i, q_i) = 1, \ |\theta_i| \leqslant 1, \ 1 \leqslant q_i \leqslant \tau_i, \ 1 \leqslant i \leqslant k,$$

$$\tau_1 = N\exp(-r^s), \quad \tau_i = N^i\exp(-0.2r^s), \quad 2 \leqslant i \leqslant k.$$

*Il existe en outre un indice $s$ $(1 \leqslant s \leqslant k)$ tel que l'une des conditions suivantes soit réalisée*

I. $s \geqslant 2$ *et* $N^{\frac{s}{2}+\frac{1}{4}} \geqslant q_s \geqslant \exp(\log^4 r)$.

II. $s \geqslant 2$, $q_s > N^{\frac{s}{2}+\frac{1}{4}}$ *et* $\alpha_s$ *s'écrit* $\alpha_s = \dfrac{a_0'}{q_0'} + \dfrac{\eta}{q_0'q_1'} + \dfrac{\theta_1'}{q_1'\tau_1'}$ *où* $(a_0', q_0') = 1$,

$$(q_0', q_1') = 1, \eta\theta_1' \leqslant 0, \eta = \pm 1, |\theta_1'| < 1, 1 \leqslant q_0' \leqslant N^{\frac{s}{2}+\frac{1}{4}} \leqslant q_1' \leqslant \tau_1' \leqslant \tau_s.$$

III. $s = 1$, $q_1 \geqslant \exp(0.8r^s)$ *et* $q_i \leqslant \exp\left(\dfrac{0.04}{k}r^s\right)$, $2 \leqslant i \leqslant k$.

*Soit* $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_k x^k$ *et* $S = \sum_{p\leqslant N} e(f(p))$ *alors*

$$S \leqslant N\exp(102\log^2 r - \varrho_0)$$

*où $\varrho_0$ est défini au début du paragraphe 5.*

Démonstration. Nous posons $V = q_s$ dans le cas I, $V = q_0'$ dans le cas II et $V = 1$ dans le cas III. Soit $F$ le produit de tous les nombres premiers inférieurs à $N^{0.25}$ qui ne divisent pas $V$ et soit $W = F\cdot V$. Nous désignerons par $\mathcal{U}$ l'ensemble des entiers positifs $u$ premiers avec $W$. Si $\mathcal{U}_j$ est l'ensemble des entiers de $\mathcal{U}$ ayant $j$ facteurs premiers nous avons

$$\mathcal{U} = \bigcup_{1\leqslant j\leqslant 3} \mathcal{U}_j.$$

(Nous avons posé par convention $1 \in \mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_1^* = \mathcal{U}_1 - \{1\}$.) Si

$$\mathcal{S} = \sum_{\substack{u\in\mathcal{U}\\ u\leqslant N}} e(f(u))$$

nous avons $\mathcal{S} = \sum_{\substack{d|F\\ d\leqslant N}} \mu(d) \sum_{\substack{dm\leqslant N\\ (m,V)=1}} e(f(dm))$.

En posant $S_j = \sum_{\substack{u\in\mathcal{U}_j\\ u\leqslant N}} e(f(u))$ $(j = 1, 2, 3)$ nous obtenons les relations

$$\mathcal{S} = S_1 + S_2 + S_3 \quad \text{et} \quad S = S_1 + O(N^{0.25}).$$

Pour majorer $S$, il suffit donc de majorer $\mathcal{S}$, $S_2$ et $S_3$.

a) Majoration de $S_2$. Si

$$\mathscr{S}_2 = \sum_{\substack{uu' \leqslant N \\ u, u' \in \mathscr{U}_1^*}} e(f(uu'))$$

nous avons

$$S_2 = \tfrac{1}{2}\mathscr{S}_2 + O(\sqrt{N}).$$

Puisque

$$\mathscr{S}_2 = \sum_{\substack{uu' \leqslant N \\ u, u' \in \mathscr{U}_1^* \\ u \leqslant \sqrt{N}}} e(f(uu')) + \sum_{\substack{uu' \leqslant N \\ u, u' \in \mathscr{U}_1^* \\ u > \sqrt{N} \\ u' \leqslant \sqrt{N}}} e(f(uu'))$$

en appliquant le lemme 5.2 à la première somme avec $t = 1$, $y = u$ $x = u'$, $\psi(y) = 1$ et à la deuxième somme avec $y = u'$ et $x = u$ nous, obtenons

$$\mathscr{S}_2 \ll r^3 N \exp(-\varrho_0)$$

et $S_2$ vérifie la même majoration.

b) Majoration de $S_3$. Si

$$\mathscr{S}_3 = \sum_{\substack{uu' \leqslant N \\ u \in \mathscr{U}_1^* \\ u' \in \mathscr{U}_2}} e(f(uu'))$$

alors

$$S_3 = \tfrac{1}{3}\mathscr{S}_3 + O(N^{0.75}).$$

Dans $\mathscr{S}_3$, $u' \in \mathscr{U}_2$ donc $u' > \sqrt{N}$ et puisque $u \in \mathscr{U}_1^*$ $N^{0.25} < u < \sqrt{N}$. Nous pouvons alors appliquer le lemme 5.2 à $\mathscr{S}_3$ avec $t = 1$, $y = u$ et $x = u'$, ce qui donne

$$\mathscr{S}_3 \ll r^3 N \exp(-\varrho_0)$$

et $S_3$ vérifie la même majoration.

c) Majoration de $\mathscr{S}$. Nous pouvons écrire

$$\mathscr{S} = \mathscr{A}_0 - \mathscr{A}_1 \quad \text{où} \quad \mathscr{A}_i = \sum_{\substack{m \mid F \\ \mu(d) = (-1)^i}} \sum_{\substack{dm \leqslant N \\ (m, V) = 1}} e(f(dm)) \qquad (i = 0, 1).$$

Nous majorerons $\mathscr{A}_0$; $\mathscr{A}_1$ se majore de la même manière. L'intervalle $[1, N]$ peut être découpé en intervalles plus petits en nombre $\ll r$ du type $]M', M]$ où $0.25M < M' \leqslant 0.5M$. La partie $\mathscr{A}_0(M)$ de la somme $\mathscr{A}_0$ qui correspond à un intervalle $]M', M]$ peut se mettre sous la forme

$$\mathscr{A}_0(M) = \sum_{\substack{dm \leqslant N \\ M' < m \leqslant M \\ \mu(d) = 1}} e(f(dm)).$$



Nous considérons d'abord le cas $M \leqslant N^{0.24}$. D'après ([6], lemme 5, chap. IX) nous pouvons répartir les diviseurs $d$ de $F$ dans au plus $\exp(\log^2 r/\log(1.01))$ intervalles disjoints. Pour chaque intervalle il existe $\varphi$ pour lequel les nombres $d$ de l'intervalle vérifient

$$\varphi < d \leqslant \varphi^{1.01}.$$

Pour certains intervalles on aura $\varphi \leqslant N^{0.24}M^{-1}$. Pour chacun des autres intervalles il existe un nombre $\Gamma > 0$ et deux suites croissantes d'entiers $u$, $v$ tels que

$$N^{0.24}M^{-1} < u \leqslant N^{0.5}M^{-1}.$$

Tous les nombres de l'intervalle, pris chacun $\Gamma$ fois sont obtenus en formant les produits $uv$, avec $(u, v) = 1$.

Soit $\mathscr{A}'$ la partie de la somme $\mathscr{A}_0(M)$ qui correspond à l'intervalle considéré.

Si $\varphi \leqslant N^{0.24}M^{-1}$ nous avons

$$\mathscr{A}' \ll N^{(0.24)\cdot 1.01} \ll N\exp(-\varrho_0).$$

Si $\varphi > N^{0.24}M^{-1}$ on peut mettre $\mathscr{A}'$ sous la forme

$$\Gamma \mathscr{A}' = \sum_m \sum_u \sum_v e(f(muv)),$$

la sommation étant étendue aux valeurs de $m$, $u$ et $v$ qui vérifient

$$M' < m \leqslant M, \quad N^{0.24}M^{-1} < u \leqslant N^{0.5}M^{-1}, \quad muv \leqslant N, \quad (u, v) = 1.$$

Nous avons

$$\Gamma \mathscr{A}' = \sum_{t \mid F} \mu(t) \mathscr{A}'_t$$

où

$$\mathscr{A}'_t = \sum_m \sum_{u_1} \sum_{v_1} e(f(t^2 m u_1 v_1)),$$

$u_1$ et $v_1$ prenant les valeurs des nombres $u/t$ et $v/t$ avec $(u, v) = t$, la sommation étant étendue au domaine

$$M' < m \leqslant M, \quad N^{0.24}M^{-1}t^{-1} < u_1 \leqslant N^{0.5}M^{-1}t^{-1}, \quad t^2 m u_1 v_1 \leqslant N.$$

Le nombre $\psi(y)$ des solutions de l'équation $mu_1 = y$ est inférieur à $d(y)$. Par conséquent $\psi$ satisfait aux conditions du lemme 5.2. Nous avons

$$\mathscr{A}'_t = \sum_y \psi(y) \sum_x e(f(t^2 yx)),$$

la sommation étant étendue au domaine

$$N^{0.24}t^{-1} \ll y \ll N^{0.5}t^{-1}, \quad t^2 yx \leqslant N.$$

En appliquant le lemme 5.2 nous trouvons

$$\mathscr{A}'_t \leqslant r^3 N\Delta^{-1}t^{-1.1} \quad \text{où } \Delta = \exp(\varrho_0)$$

donc

$$\mathscr{A}' \leqslant r^3 N\Delta^{-1}\sum_t t^{-1.1} \leqslant r^3 N\Delta^{-1}.$$

Nous obtenons donc, lorsque $M \leqslant N^{0.24}$,

$$\mathscr{A}_0(M) \leqslant r^3 N\Delta^{-1}\exp\big(\log^2 r/\log(1.01)\big).$$

Supposons maintenant $N^{0.24} < M \leqslant N^{0.5}$. Nous pouvons appliquer le lemme 5.2 avec $t = 1$, $y = m$, $x = d$ à la somme $\mathscr{A}_0(M)$ donc

$$\mathscr{A}_0(M) \leqslant r^3 N\Delta^{-1}.$$

Si $N^{0.5} < M \leqslant N^{0.75}$ nous écrivons

$$\mathscr{A}_0(M) = \sum_{d>N^{0.24}} \sum_{\substack{M'<m\leqslant N\\ md\leqslant N}} e\big(f(dm)\big) + \sum_{d\leqslant N^{0.24}} \sum_{\substack{M'<m\leqslant N\\ md\leqslant N}} e\big(f(dm)\big).$$

Nous pouvons appliquer le lemme 5.2 à la première somme avec $t = 1$, $y = d$, $x = m$ puisque d'après la condition sur $M$, $N^{0.24} < d \leqslant N^{0.5}$. D'autre part la seconde partie est majorée par

$$MN^{0.24} \leqslant N^{0.99} \leqslant N\exp(-\varrho_0)$$

car $\varrho_0 \leqslant 0.005r$. Donc

$$\mathscr{A}_0(M) \leqslant r^3 N\Delta^{-1}.$$

Supposons enfin que $N^{0.75} < M \leqslant N$. Examinons d'abord le cas III. Nous pouvons appliquer le lemme 5.3 à la somme $\mathscr{A}_0(M)$ avec $x = m$ donc

$$\mathscr{A}_0(M) \leqslant r^3 N\Delta^{-1}.$$

Dans les cas II et III nous avons

$$\mathscr{A}_0(M) = \sum_d \sum_{t|V} \mu(t) S(d, t)$$

où

$$S(d, t) = \sum_{\substack{dtx\leqslant N\\ M'<tx\leqslant M}} e\big(f(dtx)\big).$$

Nous avons donc

$$\mathscr{A}_0(M) = \sum_{t|V} \mu(t)\mathscr{A}_t \quad \text{où} \quad \mathscr{A}_t = \sum_{\substack{d\\ dtx\leqslant N\\ M'<tx\leqslant M}} \sum_x e\big(f(dtx)\big).$$

Si $t^k \leqslant \exp(0.21\varrho)$ nous pouvons appliquer le lemme 5.3 à $\mathscr{A}_t$ et nous avons

$$\mathscr{A}_t \leqslant rN\Delta^{-1}t^{-1}.$$



Si $t^k > \exp(0.21\varrho)$ nous avons naturellement

$$\mathscr{A}_t \leqslant Nt^{-1}.$$

Nous obtenons

$$\mathscr{A}_0(M) \leqslant \sum_{t|V} rN^{-1}t^{-1} + \sum_{t|V} N\exp\left(-\frac{0.21}{k}\varrho\right).$$

Puisque

$$V < N^s, \qquad \sum_{t|V} t^{-1} \leqslant \sum_{t\leqslant N^s} t^{-1} \leqslant kr.$$

Nous avons d'autre part $\sum_{t|V} 1 = \nu(V) \leqslant V^{\varepsilon_1}$ en prenant $\varepsilon_1 = \dfrac{5}{(100k)^2}$.

Dans le cas I et $q_s \geqslant N^{0.25}$ nous obtenons

$$s\varepsilon_1 r \leqslant \frac{5r}{10^4 k} \leqslant 0.01\varrho$$

et si $q_s \leqslant N^{0.25}$, $q_s^{\varepsilon_1} \leqslant q_s^{0.002} \leqslant \exp(0.01\varrho)$.

Dans le cas II si $q'_0 > \exp(0.01r^s)$ nous avons la même démonstration que précédemment et si $q'_0 < \exp(0.01r^s)$ nous avons

$$q_0'^{\varepsilon_1} \leqslant \exp\left(\frac{5}{10^6k^2}r^s\right) \leqslant \exp\left(\frac{4r^s}{10^4}\right) = \exp(0.01\varrho).$$

Puisque $\dfrac{0.2\varrho}{k} \geqslant \varrho_0$ nous obtenons

$$\mathscr{A}_0(M) \leqslant r^2 N\Delta^{-1}.$$

Nous avons donc, puisqu'il y a au plus $\leqslant r$ intervalles $]M', M]$

$$S \leqslant r^4\exp\big(\log^2 r/\log(1.01)\big)N\Delta^{-1}.$$

Il est alors facile de vérifier que

$$r^4\exp\big(\log^2 r/\log(1.01)\big) \leqslant \exp(102\log^2 r),$$

ce qui termine la démonstration du théorème 5.1.

## 6. Fin de la démonstration du resultat principal.

Lemme 6.1. *Soient $A$ et $\tau$ des réels tels que $1 < A < \tau$ et soit $\alpha$ un réel tel que*

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| < \frac{1}{q\tau} \quad \textit{avec } (a, q) = 1 \textit{ et } 1 < q \leqslant \tau.$$

*Alors $\alpha$ satisfait l'une des deux conditions suivantes*

(i) $q \leqslant A$,

(ii) $q > A$ *et* $\alpha = \dfrac{a_0}{q_0} + \dfrac{\eta}{q_0q_1} + \dfrac{\theta_1}{q_1\tau_1}$, $a_0, q_0, q_1$ *entiers où* $(a_0, q_0) = 1$, $(q_0, q_1) = 1$, $\eta = \pm 1$, $|\theta_1| < 1$, $\eta\theta_1 \leqslant 0$ *et* $1 \leqslant q_0 \leqslant A \leqslant q_1 \leqslant \tau_1 \leqslant \tau$.

Démonstration. En développant $\frac{a}{q}$ en fraction continue il est clair qu'il existe deux entiers $m$ et $n$ tels que

$$q_m \leqslant A \leqslant q_{m+1} \leqslant q_{n+1},$$

$$\frac{a}{q} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \quad et \quad \alpha = \frac{a}{q} + \frac{(-1)^{n+1}\theta}{q\tau}$$

avec $0 \leqslant \theta < 1$ puisque nous pouvons choisir $n$ pair ou impair. Si $m = n$ nous avons

$$\frac{a}{q} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{p_n}{q_n} + \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}}$$

puisque $p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n$. Il suffit alors de remarquer que $\frac{\theta}{q\tau} < \frac{1}{q_{n+1}^2}$. Si $m \leqslant n-1$ il faut démontrer que

$$0 \leqslant (-1)^{n-m}\frac{\theta}{q_{n+1}\tau} + \frac{1}{q_{m+1}(a_{m+2}q_{m+1}+q_m)} < \frac{1}{q_{m+1}^2}.$$

Si $m = n-1$, $\frac{\theta}{q_{n+1}\tau} < \frac{1}{q_{n+1}^2} \leqslant \frac{1}{q_{m+2}^2}$ et puisque $a_{m+2} = a_{m+2}$

$$\frac{1}{q_{m+2}^2} < \frac{1}{q_{m+1}q_{m+2}} = \frac{1}{q_{m+1}(a_{m+2}q_{m+1}+q_m)} < \frac{1}{q_{m+1}^2}.$$

Si $m \leqslant n-2$

$$\frac{1}{q_{n+1}\tau} \leqslant \frac{1}{q_{m+3}^2} \leqslant \frac{1}{q_{m+1}(q_{m+2}+a_{m+3}^{-1}q_{m+1})} \leqslant \frac{1}{q_{m+1}q_{m+3}}.$$

D'autre part en posant $a_{m+3}+1 = y$ nous avons $q_{m+3} \geqslant yq_{m+1}$ et $q_{m+2} + a_{m+3}^{-1}q_{m+1} \geqslant \frac{y+1}{y}q_{m+1}$. Nous obtenons donc

$$\frac{1}{q_{m+3}^2} + \frac{1}{q_{m+1}(q_{m+2}+a_{m+3}^{-1}q_{m+1})} \leqslant \left(\frac{1}{(y+1)^2} + \frac{y}{y+1}\right)\frac{1}{q_{m+1}^2} < \frac{1}{q_{m+1}^2}.$$

Démonstration du théorème 1. D'après le critère de Weyl il suffit de démontrer que pour tout entier relatif $m$ non nul

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi(N)}\Big|\sum_{p\leqslant N} e(mf(p))\Big| = 0.$$

Si $f$ a un coefficient irrationnel, il en est de même pour $mf$. Il suffit donc de démontrer la propriété ci-dessus pour $m = 1$ et $\alpha_s$ irrationnel (pour un $s$ au moins $1 \leqslant s \leqslant k$). En remplaçant éventuellement les $\alpha_i$ nuls par des entiers et en posant $\varepsilon = (50k)^{-1}$ nous pouvons écrire les coefficients $\alpha_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ sous la forme

$$\alpha_i = \frac{a_i}{q_i} + \frac{\theta_i'}{q_i\tau_i} \qquad (a_i, q_i) = 1,\ |\theta_i| < 1,\ 1 \leqslant q_i \leqslant \tau_i$$

avec $\tau_1 = N\exp(-r^\varepsilon)$

$$\tau_i = N^i\exp(-0.2r^\varepsilon) \qquad (2 \leqslant i \leqslant k)$$

pourvu que $N$ soit plus grand qu'un nombre $N_0(f)$.

Puisque le coefficient $\alpha_s$ est irrationnel $\lim\limits_{N\to\infty} q_s = +\infty$.

a) Supposons que $q_i \leqslant r$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$ alors d'après la proposition 3.1 et ([4], Satz 5.1, chap. I)

$$S = \sum_{p\leqslant N} e(f(p)) \ll \frac{\pi(N)}{\varphi(q)}q^{1-\frac{1}{k}+\varepsilon} \ll \pi(N)q^{-\frac{1}{k}+2\varepsilon} \ll \frac{\pi(N)}{q^{1/2k}}$$

donc $S \ll \frac{\pi(N)}{q_s^{1/2k}}$.

b) Supposons maintenant que $q_1 \leqslant \exp(0.8r^\varepsilon)$ et $q_i \leqslant \exp\left(\frac{0.04}{k}r^\varepsilon\right)$ et que l'un des $q_j$ est $> r$.

Alors d'après le théorème 4.2 nous avons puisque $q > r$

$$S \ll \frac{\pi(N)(rq)^{5\varepsilon}}{q^{1/2k}} \ll \frac{\pi(N)}{r^{1/4k}}.$$

c) Supposons $q_1 > \exp(0.8r^\varepsilon)$ et $q_i \leqslant \exp\left(\frac{0.04}{k}r^\varepsilon\right)$ $(2 \leqslant i \leqslant k)$. En utilisant le théorème 5.1 dans le cas III nous obtenons

$$S \ll N\exp(102\log^2 r - \varrho_0).$$

De plus $\varrho_0 \geqslant 2r^{0.5\varepsilon}$ donc

$$S \ll \pi(N)\exp(-r^{0.5\varepsilon}).$$

d) Supposons enfin que l'on ait $q_s > \exp\left(\frac{0.04}{k}r^\varepsilon\right)$ avec $2 \leqslant s \leqslant k$. Nous pouvons alors utiliser le théorème 5.1 puisque l'un des cas I ou II s'applique d'après le lemme 6.1 donc $S \ll \pi(N)\exp(-r^{0.5\varepsilon})$ ce qui termine la démonstration du théorème 1.

**Bibliographie**


[1] T. Estermann, *Introduction to modern prime number theory*, Cambridge 1952.
[2] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, Oxford 1968.
[3] L. K. Hua, *Additive theory of prime numbers*, Translations of Mathematical Monographs 13, 1965.
[4] K. Prachar, *Primzahlverteilung*, Berlin 1957.
[5] E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann Zeta function*, Oxford 1951.
[6] I. M. Vinogradov, *The method of trigonometrical sums in the theory of numbers* (Translated from Russian), London 1954.
[7] — *Sur l'évaluation des sommes trigonométriques avec des nombres premiers*, Izv. Akad. Nauk. SSSR. Ser. Math. 12 (1948), p. 225–248.
[8] B. M. Wilson, *Proofs of some formulae enunciated by Ramanujan*, Proc. London Math. Soc. 2, 21 (1921), p. 235–255.


*Reçu le 16. 12. 1971* (246)

---

ACTA ARITHMETICA
XXIII (1973)

# On the problem of odd $h$-fold perfect numbers

by
M. M. Artuhov (Ordżonikidze)

**§ 1.** In this paper we generalize a known result, related to the existence problem of odd perfect numbers, which was first obtained by Dickson [3] and then rediscovered by Gradstein [5]. This result consists in Theorem IV of Gradstein's paper [5] and here it is quoted as Theorem A in § 3. All generalizations of this result are here obtained at the expence of an improvement of Gradstein's method. In order to prove his Theorem IV Gradstein first of all described a special class of arithmetical functions, for which he then established a general theorem (Theorem I in [5]). Here (cf. § 10) we shall also use this theorem, but in a more suitable wording for the subject (cf. § 6).

**§ 2.** It is usual to denote the sum of all different natural divisors of a natural number $N$ by $\sigma(N)$. If $(\sigma(N)-N)/N = h$, where $h$ is a natural number $\neq 1$, then $N$ is called a *multiply perfect number* and in the case $h = 1$ $N$ is simply called a *perfect number*. In this paper a number $N$ with $(\sigma(N)-N)/N = h$, $h$ natural ($= 1$ or $\neq 1$), will be called an *$h$-fold perfect number* (so the notions "a perfect number" and "a 1-fold perfect number" here coincide).

There are rather vast lists of even $h$-fold perfect numbers for $h = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ (cf. [1], [2], [4], [6], [7], [8]), however, we do not know whether there exists even one odd $h$-fold perfect number. Further, the question whether infinitely many such numbers exist, is still open. Theorem IV in [5] is just one of the known (at all not numerous) important results connected with the last problem.

Concerning the notation, we make the convention, that in this paper $h$, $n$ will always be used to denote natural numbers, $N$ will denote an *odd* natural number and the right-hand side of the equality $N = p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\dots p_n^{\beta_n}$ will represent the canonical factorization of $N$ ($p_1, p_2, \dots, p_n$ are different odd prime numbers, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ are natural numbers). The number $n$ occurring in this factorization will be called the *rank of $N$*, and $N$ itself will be called a *number of rank $n$*. For any (not necessarily multiply perfect) $N$ the real number $(\sigma(N)-N)/N = \lambda$ will be called the *measure of perfection of $N$* (so, if $\lambda = h$ is natural, then $N$ is an odd $h$-fold perfect number).