О пространствах связных и локально-связных во всех размерностях

Ю. Т. Лисица (Москва)

Abstract. The well-known Kuratowski-Dugundji'ss theorem is spread to the spaces which are connected and locally–connected in all dimensions: $Y \in C^{\infty} \cap LC^{\infty}$ (respectively $Y \in LC^{\infty}$) if and only if every map $f\colon A \to Y$ of any closed subset A of X such that $X \setminus A$ satisfies one of the following conditions a), b) has an extension on X (respectively on an open neighbourhood OA of A).

a) For every point $x \in X$ there is a neighbourhood Ox such that $\dim(Ox \cap X \setminus A) < \infty$;

b) $X \setminus A$ is weakly infinited imensional spaces in sense of Ju. M. Smirnov.

An analogue of P. S. Alexandrov's theorem about the characteristic of finite dimension by extensions of maps into the sphere is prooved for the condition a): $X \setminus A$ satisfies the condition a) if and only if every map $f\colon B \to Y_0$ of any closed subset B of X such that $B \supseteq A$ has an extension on X, where Y_0 is some special space constructed by K. Borsuk.

Известная теорема Куратовского-Дугунджи [4], [3], дающая характеристику пространств связных и локально-связных в размерности n ($C^n \cap LC^n$), а также пространств локально-связных в размерности n (LC^n), распространяется здесь на пространства связные и локально-связные во всех размерностях ($C^{\infty} \cap LC^{\infty}$), и, соответственно, на пространства лишь локально-связные во всех размерностях (LC^{∞}) (Теорема 1) (*).

Найденное нами характеристическое свойство (Определение 2) дополнения $X \setminus A$, позволяющее продолжать отображения (**) $f\colon A \to Y$ в пространства Y перечисленных классов, имеет размерностный характер, но является топологическим свойством вложения $i\colon X \setminus A \to X$, а не самого подпространства $X \setminus A$. Однако, это необходимо, если дополнительно желать в рассматриваемом бесконечномерном случае выполнения аналога теоремы П. С. Александрова [1] о продолжении отображений в сферы (Теорема 3). Роль бесконечномерной „сферы“ играет у нас видоизменение одного замечательного пространства Борсука [2].

В метризуемом случае можно за характеристическое свойство дополнения $X \setminus A$ принять чисто топологическое свойство подпространства $X \setminus A$

(*) Подобная характеристика, найденная Дугунджи [3] слишком слаба с нашей точки зрения: для нее не выполняется аналог теоремы П. С. Александрова, о котором говорится ниже.

(**) Под отображениями всюду понимаются непрерывные отображения.

быть слабо-бесконечномерным в смысле Ю. М. Смирнова [7] (Теорема 2). В общем случае мы требуем метризуемости лишь от пространств Y, а пространства X согласно результатам работы [5] можно считать паракомпактными и перистыми (одновременно).

1. Локально-конечномерные вложения (*).

Определение 1. Пространство X назовем *локально-конечномерным*, если каждая его точка обладает конечномерной окрестностью.

Замечание 1. Под окрестностью точки x понимается произвольное множество O_x, содержащее x в качестве внутренней точки. В нашем случае вполне-регулярных пространств можно понимать под окрестностью — без изменения смысла — и замыкание открытой окрестности точки x, а в основном для теории размерности случае нормальных пространств — и открытую окрестность. Последнее ясно из того, что всякая окрестность содержит открытую окрестность типа F_σ и что в нормальных пространствах верна счетная теорема суммы.

Определение 2. Вложение $H \subseteq X$ назовем *локально-конечномерным*, если каждая точка x пространства X обладает такой окрестностью O_x, что $\mathrm{rd}_X(H \cap O_x) < \infty$ [5].

Замечание 2. Относительную размерность $\mathrm{rd}_X\Gamma$ подпространства Γ по пространству X можно определить как $\sup\limits_{A \subseteq \Gamma} \dim(\beta A)$, где верхняя грань берется по всем вполне-замкнутым (**) в X множествам A, лежащим в Γ. Если X нормальное, то $\mathrm{rd}_X\Gamma = \sup\limits_{A \subseteq \Gamma} \dim A$, где A — замкнутые в X множества. Если же X — метризуемо, а Γ — открыто в X, то $\mathrm{rd}_X\Gamma = \dim\Gamma$.

Замечание 3. Под окрестностью — без изменения смысла — можно здесь понимать и открытую окрестность точки x, а в нашем случае вполне-регулярных пространств — и замыкание открытой окрестности точки x.

Лемма 1. *Нормальное пространство X локально-конечномерно тогда и только тогда, когда вложение $X \subseteq X$ локально-конечномерно.*

Это является непосредственным следствием равенства $\mathrm{rd}_X \overline{O}_x = \dim \overline{O}_x$, верного в нормальных пространствах, и замечаний 1, 2 и 3.

Лемма 2. *Если B замкнуто в нормальном пространстве X, если $\Gamma' \subseteq \Gamma \cap B$ и Γ локально-конечномерно вложено в X, то и Γ' локально-конечномерно вложено в X; в частности, если нормальное пространство X локально-конечномерно, то и всякое подпространство вложено в X локально-конечномерно.*

(*) Под пространствами мы здесь будем понимать только вполнерегулярные пространства, а под вложениями — гомеоморфизмы одного пространства H на часть другого пространства X. Ради простоты будем отождествлять H с его образом и писать $H \subseteq X$.

(**) Замкнутое множество A называется вполне-замкнутым [8], если всякое отображение $f\colon A \to I$ в отрезок I продолжается на все X. Это эквивалентно тому, что $\beta A \approx \overline{A}$, где замыкание берется в чеховском расширении βX пространства X.

Действительно, мы имеем диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} B & \subseteq & X \\ \cup\!\shortmid & & \cup\!\shortmid \\ \Gamma' & \subseteq & \Gamma \end{array}$$

Если $x \in B$, то существует в пространстве X такая окрестность O_x, что $\mathrm{rd}_X(\Gamma \cap O_x) < \infty$. Получим диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} B & \subseteq & X \\ \cup\!\shortmid & & \cup\!\shortmid \\ \Gamma' \cap O_x & \subseteq & \Gamma \cap O_x \end{array}$$

Так как B замкнуто в X, а X — нормально, то согласно замечанию 2 получим, что $\mathrm{rd}_X(\Gamma' \cap O_x) \leqslant \mathrm{rd}_X(\Gamma \cap O_x) < \infty$. Если же $x \notin B$, то положив $O_x = X \setminus B$ найдем снова, что $\mathrm{rd}_X(\Gamma' \cap O_x) < \infty$. Этим первая часть леммы доказана. Вторая часть является прямым следствием первой и леммы 1.

Лемма 3. *В паракомпактном пространстве X вложение $H \subseteq X$ локально-конечномерно тогда и только тогда, когда существует такое локально-конечное замкнутое покрытие $\{\Phi_\lambda\}$ пространства X, что $\mathrm{rd}_X(H \cap \Phi_\lambda) < \infty$ для каждого Φ_λ.*

В самом деле, если вложение $H \subseteq X$ локально-конечномерно, то существует такое покрытие $\{\Gamma_\lambda\}$ пространства X, что $\mathrm{rd}_X(H \cap \Gamma_\lambda) < \infty$. Вписав в него локально-конечное замкнутое покрытие — а это можно сделать в силу паракомпактности — мы получим искомое покрытие. Обратно, пусть существует такое локально-конечное замкнутое покрытие $\{\Phi_\lambda\}$ пространства X, что $\mathrm{rd}_X(H \cap \Phi_\lambda) < \infty$. В силу локальной-конечности у каждой точки x существует окрестность O_x, пересекающаяся лишь с конечным числом множеств Φ_λ. Это и есть искомые окрестности. Здесь мы воспользовались замечанием 1 и свойствами размерности $\dim$ для нормальных пространств.

Лемма 4. *Вложение $H \subseteq X$ открытого множества H метризуемого пространства X локально-конечномерно тогда и только тогда, когда H можно представить в виде такого объединения $H = \bigcup H_k$ счетного числа возрастающих открытых конечномерных множеств H_k, что всякая сходящаяся в X последовательность точек x из H почти вся (*) лежит в одном из слагаемых H_k.*

В самом деле, если вложение $H \subseteq X$ локально-конечномерно, то в силу замечаний 1 и 2 существует такое открытое покрытие $\{\Gamma_\lambda\}$ пространства X, что $\dim(H \cap \Gamma_\lambda) < \infty$. Множества $H_k = \bigcup\limits_{\dim(H \cap \Gamma_\lambda) \leqslant k} (H \cap \Gamma_\lambda)$ — открыты, покрывают все H и $\dim H_k \leqslant k$ в силу паракомпактности множеств H_k и теоремы суммы. Пусть последовательность точек x_i из H сходится к точке x. Тогда $x \in \Gamma_\lambda$ для некоторого λ и, следовательно, почти все точки x_i принадлежат пересечению $H \cap \Gamma_\lambda$. Так как $\dim(H \cap \Gamma_\lambda) < \infty$, то почти все точки x_i принадлежат и некоторому H_k.

(*) То есть за исключением конечного числа точек x_i.

Обратно, пусть пространство X и открытое множество H удовлетворяют условию леммы, а x — произвольная точка из X. Пусть $\{O_k\}$ — фундаментальная система окрестностей точки x. Покажем, что $H \cap O_k \subseteq H_k$ при некотором k. Если бы это было не так, то нашлась бы такая последовательность $\{x_i\}$, что $x_k \in (H \cap O_k) \setminus H_k$. Ясно, что $x_i \in H$ при всех i и что последовательность $\{x_i\}$ сходится. Но вопреки условию леммы она почти вся не лежит ни в одном из множеств H_k, так как множества H_k возрастают. Итак, существует такое k, что $(H \cap O_k) \subseteq H_k$. Но тогда $\mathrm{rd}_X(H \cap O_k) \leqslant k < \infty$. Этим мы доказали, в силу произвольности выбора точки x, что H вложено в X локально-конечномерно.

Замечание 4. Достаточность условия леммы справедлива и для произвольного множества H при естественном предположении, что множества H_k открыты лишь в H. Что же касается необходимой части, то она не верна даже для пространств со счетной базой. Впрочем, если в определении 2 заменить rd_X на привычное $\dim$, то вся лемма 4 снова станет справедливой и уже для произвольных множеств H.

2. Характеристика классов LC^∞ и $C^\infty \cap LC^\infty$.

Теорема 1. *Метризуемое пространство Y принадлежит классу LC^∞ (соответственно $C^\infty \cap LC^\infty$) тогда и только тогда, когда для всякого паракомпактного перистого пространства X и всякого замкнутого его подмножества A, у которого существует такая окрестность H, что $H \setminus A$ локально-конечномерно вложено в H, всякое отображение $f\colon A \to Y$ имеет продолжение $F\colon OA \to Y$ на некоторую окрестность OA множества A (соответственно на $OA = X$).*

Доказательство необходимости. Докажем ее сначала в предположении, что $H = X$. Локальный случай ($Y \in LC^\infty$). Пусть X и A удовлетворяют условиям теоремы (и $H = X$). Тогда по лемме 3 существует такое локально-конечное замкнутое покрытие $\{\Phi_\lambda\}$ пространства X, что $\mathrm{rd}_X(\Phi_\lambda \setminus A) < \infty$. Продолжение отображения $f\colon A \to Y$ построим по индукции, считая, что индексы λ — трансфинитные числа от 1 до τ. Рассмотрим частичное отображение $f_1 = f|_{A \cap \Phi_1}$ замкнутого в Φ_1 множества $A_1 = A \cap \Phi_1$ в метризуемое пространства Y. Так как $Y \in LC^{n(1)}$, где $n(1) = \mathrm{rd}_X(\Phi_\lambda \setminus A) - 1$, то по обобщенной теореме Куратовского-Дугунджи (см. [6], теорема 5) существует продолжение $\mathrm{ext} f_1\colon \bar{O}_1 \to Y$ отображения f_1, где O_1 — открытая в Φ_1 окрестность множества A_1. Переход к замыканию $\bar{O}_1$ здесь возможен в силу нормальности множества Φ_1. Так как на замкнутом множестве $A \cap \bar{O}_1$ отображения f_1 и $\mathrm{ext} f_1$ совпадают, то комбинация $F_1\colon A \cup \bar{O}_1 \to Y$ этих отображений — непрерывна. Ясно, что выполняется условие 1) F_1 — есть продолжение отображения f.

Предположим теперь, что уже построены окрестности O_λ множеств $A \cap \Phi_\lambda$ и отображения $F_\lambda\colon A \cup \bigcup_{\alpha \leqslant \lambda} \bar{O}_\alpha \to Y$ для всех λ, $1 \leqslant \lambda < \mu$, где $\mu \leqslant \tau$,

удовлетворяющее условию 2) при $\lambda < \lambda'$ отображение $F_{\lambda'}$ является продолжением отображения F_λ.

Построим отображение F_μ, в случае когда у μ существует предшествующий индекс $\mu - 1$. Рассмотрим частичное отображение $f_\mu = F_{\mu-1}|_{A_\mu}$, где $A_\mu = \Phi_\mu \cap (A \cup \bigcup_{\lambda<\mu} \bar{O}_\lambda)$. Множество A_μ замкнуто, так как в силу локальной конечности покрытия $\{\Phi_\lambda\}$ будет замкнуто объединение $\bigcup_{\lambda<\mu} \bar{O}_\lambda$. Так как $\Phi_\mu \setminus A_\mu \subseteq \Phi_\mu \setminus A$, то $d_X(\Phi_\mu \setminus A_\mu) \leqslant \mathrm{rd}_X(\Phi_\mu \setminus A) < \infty$ и $Y \in LC^{n(\mu)}$, где $n(\mu) = \mathrm{rd}_X(\Phi_\mu \setminus A_\mu) - 1$. Но тогда по той же обобщенной теореме Куратовского-Дугунджи существует продолжение $\mathrm{ext} f_\mu\colon \bar{O}_\mu \to Y$ отображения f_μ на некоторую окрестность $\bar{O}_\mu$ множества A_μ. Ясно, что O_μ в то же время является и окрестностью пересечения $A \cap \Phi_\mu$. Множество $(A \cup \bigcup_{\lambda<\mu} \bar{O}_\lambda) \cap \bar{O}_\mu$ замкнуто и лежит в A_μ и на нем отображения $\mathrm{ext} f_\mu$ и $F_{\mu-1}$ совпадают. Поэтому комбинация $F_\mu\colon A \cup \bigcup_{\lambda \leqslant \mu} \bar{O}_\lambda \to Y$ отображений $\mathrm{ext} f_\mu$ и $F_{\mu-1}$ непрерывна. Ясно, что F_μ является продолжением отображения $F_{\mu-1}$ и поэтому удовлетворяет условию 2). Построим теперь отображение F_μ в случае, когда μ — предельный индекс. Сначала определим отображение $F'_\mu\colon A \cup \bigcup_{\lambda<\mu} \bar{O}_\lambda \to Y$ полагая $F'_\mu(x) = F_\lambda(x)$, если $x \in A \cup \bigcup_{\alpha \leqslant \lambda} \bar{O}_\alpha$. Это не приводит к противоречию в силу условия 2). Отображение F'_μ непрерывно, так как система $\{A \cup \bar{O}_1, \bar{O}_\lambda\}$, $2 \leqslant \lambda < \mu$, локально-конечно и на каждом слагаемом F'_μ непрерывно. Теперь применим тот же прием, что и выше. Пусть $f'_\mu = F'_\mu|_{A_\mu}$, где $A_\mu = \Phi_\mu \cap (A \cup \bigcup_{\lambda<\mu} \bar{O}_\lambda)$. Так как $\mathrm{rd}_X(\Phi_\mu \setminus A_\mu) < \infty$, то $Y \in LC^{n(\mu)}$, где $n(\mu) = \mathrm{rd}_X(\Phi_\mu \setminus A_\mu) - 1$. Поэтому существует продолжение $\mathrm{ext} f'_\mu\colon \bar{O}_\mu \to Y$ отображения f'_μ на некоторую окрестность $\bar{O}_\mu$ множества A_μ. Ясно, что O_μ является окрестностью и для $A \cap \Phi_\mu$. Комбинация $F_\mu\colon A \cup \bigcup_{\lambda \leqslant \mu} \bar{O}_\lambda \to Y$ отображений $\mathrm{ext} f'_\mu$ и F'_μ будет искомым продолжением.

Итак, в силу принципа трансфинитной индукции можно считать, что построены отображения F_λ для всех λ от 1 до τ, удовлетворяющих условиям 1) и 2). Искомым продолжением будет отображение F_τ. Остается показать, что множество $OA = \bigcup_{\lambda \leqslant \tau} O_\lambda$ является окрестностью множества A. Для этого рассмотрим замкнутые множества $B_\lambda = \Phi_\lambda \setminus O_\lambda$ и, значит, замкнутое множество $B = \bigcup_{\lambda \leqslant \tau} B_\lambda$. Так как $B \cap A = \emptyset$ и $B \cup \bigcup_{\lambda \leqslant \tau} O_\lambda = X$, то $A \subseteq X \setminus B \subseteq OA$. Итак, необходимость в локальном случае (и при $H = X$) доказана. В глобальном случае, т. е. когда мы желаем продолжить отображение $f\colon A \to Y$ на все X, проходит (при $H = X$) то же доказательство, только каждый раз при построении продолжений F_λ можно считать, что $\bar{O}_\lambda = \Phi_\lambda$, а это возможно в силу условия $Y \in C^\infty \cap LC^\infty$. Этим необходимая часть в предположении, что $H = X$ полностью доказана.

Доказательство необходимости в общем случае. В силу нормальности существует такая окрестность U множества A, что $\overline{U} \subseteq H$. По той же причине найдется и такая окрестность V множества $X \setminus U$, что $A \cap \overline{V} = \emptyset$. Заметим, что $X \setminus (A \cup \overline{V}) \subseteq (X \setminus \overline{V}) \setminus A \subseteq U \setminus A \subseteq H \setminus A$. Применяя лемму 2 ко множествам $B = \overline{U}$, $\Gamma = \overline{U} \setminus A$ и $\Gamma' = X \setminus (A \cup \overline{V})$, получим, что $X \setminus (A \cup \overline{V})$ локально-конечномерно вложено в X. Пусть теперь дано произвольное отображение $f\colon A \to Y$. Продолжим его предварительно в отображение $f'\colon A \cup \overline{V} \to Y$, считая, что на $\overline{V}$ оно постоянно. Теперь мы находимся для отображения f' в условиях предположения ($H = X$), так как $X \setminus (A \cup \overline{V})$ локально-конечномерно вложено в X. Следовательно, f', а, значит, и f можно требуемым образом продолжить. Этим необходимая часть полностью доказана.

Доказательство достаточности. В силу монотонности размерности dim даже всякое множество конечномерного метризуемого пространства X вложено в X локально-конечномерно. Всякий компакт паракомпактен и перист. Поэтому в обоих случаях достаточность является непосредственным следствием соответствующей части классической теоремы Куратовского [4] (для компактов).

Замечание 5. Условие теоремы 1 можно усилить, потребовав, чтобы (паракомпактное и перистое) пространство X было локально-конечномерным, взамен условия наличия у множества специальной окрестности H.

В самом деле, необходимость таким образом измененной формулировки теоремы 1 в силу леми 1 и 3 доказывается как и в случае необходимости теоремы 1 при условии $H = X$, а достаточность вытекает из той же классической теоремы Куратовского.

Однако, это усиление несмотря на полученное освобождение от свойств вложения слишком сильно. Поэтому нам представляется очень интересным следующее усиление формулировки теоремы 1 для метризуемых пространств X:

Теорема 2. *Метризуемое пространство Y принадлежит классу LC^∞ (соответственно $C^\infty \cap LC^\infty$) тогда и только тогда, когда для всякого метризуемого пространства X и всякого такого замкнутого множества A, что $X \setminus A$ слабобесконечномерно в смысле Ю. М. Смирнова [7], всякое отображение $f\colon A \to Y$ имеет продолжение $F\colon OA \to Y$ на некоторую окрестность OA множества A (соответственно на $OA = X$).*

Доказательство. Достаточность. Пусть выполнено условие. В силу теоремы Е. Г. Скляренко (см. [6] стр. 202) разность $X \setminus A$ можно представить в виде объединения $\bigcup H_k \cup \Phi$, где $\{H_k\}$ — возрастающая последовательность открытых конечномерных множеств, а Φ — дополнительный компакт: $X \setminus A \setminus \Phi = \bigcup H_k$; причем, всякая последовательность $\{x_i\}$ точек x_i из $\bigcup H_i$ не имеющая предельных точек в $X \setminus A$ почти вся лежит в одном из множеств H_k. Пусть $H = \bigcup H_k$. Всякая последовательность $\{x_i\}$ точек x_i из H, сходящаяся к некоторой точке x из A не имеет предельных точек в $X \setminus A$ и поэтому почти вся лежит в одном из множеств H_k. Значит, для метризуемого подпространства $X' = A \cup H = X \setminus \Phi$ и открытого в нем множества H выполняются условия леммы 4. Но тогда множество $H = X' \setminus A$ локально-конечномерно вложено в X' и мы находимся в условиях теоремы 1.

Необходимость как и ранее тривиально следует из классической теоремы Куратовского. Теорема 2 доказана.

3. Характеристика локально-конечномерных вложений с помощью продолжения отображений. Для искомой характеристики нам понадобится следующее видоизменение примера компакта $Y_0 \in C^\infty \cap LC^\infty$, построенного Борсуком [2], стр. 43.

Рассмотрим в гильбертовом кубе:

$$I^\infty = \left\{x = \{x_i\}\colon\ 0 \leqslant x_i \leqslant \frac{1}{i}, \quad i = 1, 2, \ldots\right\}$$

вспомогательный компакт Z_0 — „основание“ компакта Y_0, для этого определим в I^∞ конечномерные кубы I^k:

$$I^k = \left\{x = \{x_i\}\colon\ x_1 = 0,\ \frac{1}{k+2} \leqslant x_2 \leqslant \frac{1}{k+1},\ 0 \leqslant x_i \leqslant \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right.$$
$$\left. \text{при } 2 \leqslant i \leqslant k+1,\ x_i = 0 \text{ при } i > k+1\right\}.$$

Обозначим через $\dot{I}^k$ границы этих кубов, гомеоморфные $(k-1)$ — мерным сферам, и положим $Z_0 = O \cup \bigcup\limits_k \dot{I}^k$, где O — точка с нулевыми координатами. Определим компакт Y_0 как конус над компактом Z_0 с вершиной a с координатами $\{1, 0, 0, \ldots\}$. В силу стягиваемости компакт Y_0 связен во всех размерностях, локальная-связность во всех размерностях компакта Y_0 доказывается точно так же как и в [9], стр. 172–173.

Теорема 3. *Открытое множество H паракомпактного пространства X с первой аксиомой счетности вложено в X локально-конечномерно тогда и только тогда, когда для всякого замкнутого в X множества A, содержащего $X \setminus H$, всякое отображение $f\colon A \to Y_0$ можно продолжить на все X.*

Доказательство достаточности. Допустим, что пространство X и открытое его множество H удовлетворяют условию, а утверждение теоремы для них не выполнено. Тогда существует такая точка x_0, что $\mathrm{rd}_X(H \cap O_{x_0}) = \infty$ для всех ее окрестностей O_{x_0}. В силу первой аксиомы счетности и регулярности существует такая фундаментальная система ее окрестностей O_p, $p = 1, 2, \ldots$, что $\overline{O}_{p+1} \subseteq O_p$. Пусть $B_p = \overline{O}_p \setminus O_{p+1}$. С помощью замкнутых множеств B_p найдем натуральные числа p_k и замкнутые множества Φ_k, $k=1,2,\ldots$, удовлетворяющие следующим трем условиям:

1) $p_{k+1}\geqslant p_k+2$,
2) $\Phi_k\subseteq H\cap B_{p_k}$,
3) $\dim\Phi_k\geqslant k$.

Для начала возьмем окрестность O_1. Так как $\mathrm{rd}_X(H\cap O_1)\geqslant 1$, то в $H\cap O_1$ существует такое замкнутое в X множество Φ_1', что $\dim\Phi_1'\geqslant 1$. Так как $\Phi_1'\subseteq\bigcup_{p\geqslant 1}B_p$, то в силу счетной теоремы суммы найдется такое число p_1, что $\dim(\Phi_1'\cap B_{p_1})\geqslant 1$. Ясно, что число p_1 и множество $\Phi_1=\Phi_1'\cap\cap B_{p_1}$ удовлетворяют условиям 2) и 3). Допустим, что уже найдены числа p_k и множества Φ_k, $k=1,2,\ldots,n$, удовлетворяющие условиям 1), 2) и 3). Возьмем окрестность O_{p_n+2}. Так как $\mathrm{rd}_X(H\cap O_{p_n+2})\geqslant n+1$, то существует такое замкнутое в X множество Φ_{n+1}', что $\Phi_{n+1}'\subseteq H\cap O_{p_n+2}$ и $\dim(\Phi_{n+1}')\geqslant n+1$. Так как $\Phi_{n+1}'\subseteq\bigcup_{p\geqslant p_n+2}B_p$, то в силу счетной теоремы суммы найдется такое число p_{n+1}, что $\dim(\Phi_{n+1}'\cap B_{p_{n+1}})\geqslant n+1$. Легко видеть, что число p_{n+1} и множество $\Phi_{n+1}=\Phi_{n+1}'\cap B_{p_{n+1}}$ удовлетворяют условиям 1), 2) и 3). Отсюда в силу принципа математической индукции заключаем, что числа p_k и множества Φ_k, удовлетворяющие условиям 1), 2) и 3), существуют для всех $k=1,2,\ldots$

Заметим, что в силу условия 1) и определения множеств B_k построенные нами множества Φ_k попарно не пересекаются. В силу условия 3) и известной теоремы П. С. Александрова [1] для каждого k существует такое замкнутое в Φ_k множество A_k и отображение $f_k\colon A_k\to\dot I^k$, что f_k не продолжаемо на Φ_k и тем более на X. Из условия 2) видим, что $A_k\subseteq\Phi_k\subseteq\bar O_{p_k}\subseteq O_{p_{k-1}}$. Множества A_k замкнуты в Φ_k, а значит, и в X, числа p_k возрастают в силу 1), окрестности O_k составляют фундаментальную систему окрестностей точки. Из всего этого легко следует, что множество $A'=x_0\cup\bigcup_{k\geqslant 1}A_k$ замкнуто в X. Но тогда замкнуто в X и множество $A=A'\cup(X\setminus H)$. Определим отображение $f\colon A\to Y_0$ следующими равенствами: $f(x)=f_k(x)$, если $x\in A_k$, $f(x)=O$, если $x\in X\setminus H$ или $x=x_0$. Так как расстояния $\varrho(I^k,O)$ стремятся к O с ростом k, то отображение f — непрерывно. По условию существует продолжение $F\colon X\to Y_0$ отображения f. Приведем это утверждение к противоречию. Для этого обозначим через π — естественную проекцию $\pi\colon Y_0\setminus\{a\}\to Z_0$, где a — вершина конуса Y_0, а Z_0 — основание, и, кроме того, определим ретракции $r_k\colon Z_0\to\dot I^k$ с помощью следующих формул для каждой точки $x=\{x_i\}$:

$$r_k(x)=\left\{0,\frac{1}{k+2},x_3,\ldots,x_{k+1},0,0,\ldots\right\},\qquad\text{если } x\in\{O\}\cup\bigcup_{i>k}\dot I^i,$$

$$r_k(x)=\left\{\{0,x_2,x_3,\ldots\}\right.,\qquad\text{если } x\in\dot I^k,$$

$$r_k(x)=\left\{0,\frac{1}{k+1},\min\left(x_3,\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right),\ldots,\min\left(x_{k+1},\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right),0,\ldots\right\},$$
$$\text{если } x\in\bigcup_{i<k}\dot I^i.$$

Теперь заметим, что в силу непрерывности продолжения F и того, что $F(x_0)=O$, найдется такая окрестность O_{p_k}, что $F(O_{p_k})\not\ni a$. Рассмотрим композицию $F_k=r_k\circ\pi\circ F|_{\Phi_k}$. Так как $\Phi_k\subset O_{p_k}$ и $a\notin F(O_{p_k})$, то эта композиция определена на Φ_k. Легко видеть, что она является продолжением отображения f_k, вопреки выбору этого отображения. Этим достаточность доказана.

Необходимость условия теоремы в случае перистого пространства X непосредственно вытекает из теоремы 1 и того, что $Y_0\in C^\infty\cup LC^\infty$.

Доказательство необходимости в случае, когда X только паракомпактное пространство. Доказательство повторяет соответствующее место в теореме 1. Укажем только как в случае паракомпактных пространств пользоваться теоремой Куратовского-Дугунджи. Пусть задано отображение $f_\mu\colon A_\mu\to Y_0$ такого замкнутого в паракомпактном пространстве Φ_μ множества A_μ, что $\mathrm{rd}_{\Phi_\mu}(\Phi_\mu\setminus A_\mu)\leqslant n(\mu)+1$. Так как Y_0 — компакт, то в силу факторизационной теоремы (см. [6]) существуют такие отображения $g\colon\Phi_\mu\to Z_\mu$ и $h\colon B_\mu\to Y_0$, что:

а) Z_μ — метризуемо, а B_μ — его замкнутое подмножество,
б) $g(A_\mu)\subseteq B_\mu$ и $f_\mu=h|_{gA_\mu}\circ g|_{A_\mu}$,
в) $w(Z_\mu)\leqslant w(Y_0)$ и $\dim\ (Z_\mu\setminus B_\mu)\leqslant\mathrm{rd}_{\Phi_\mu}(\Phi_\mu\setminus A_\mu)$.

Так как по условию теоремы $Y_0\in LC^\infty$ (соответственно $Y\in C^\infty\cap LC^\infty$), а следовательно, $Y_0\in LC^{n(\mu)}$ (соответственно $Y\in C^{n(\mu)}\cap LC^{n(\mu)}$), то по классической теореме Куратовского существует продолжение $H\colon OB_\mu\to Y_0$ (соответственно $H_\mu\colon Z_\mu\to Y_0$). Искомыми будут окрестность $OA_\mu=g^{-1}OB_\mu$ и отображение $F_\mu=H_\mu\circ g|_{OA_\mu}$ (соответственно $F_\mu=H_\mu\circ g$). С этим замечанием теорема 3 полностью доказана.

4. Бесконечномерные „сферы". Из лемм 1 и 2 и теоремы 2 легко получить важное для нас

Следствие. *Паракомпактное пространство X с первой аксиомой счетности локально-конечномерно тогда и только тогда, когда для всякого его замкнутого множества A всякое отображение $f\colon A\to Y_0$ продолжаемо на все X.*

Итак, компакт Y_0 характеризует локально-конечномерные пространства точно также, как n — мерная сфера характеризует пространства размерности $\leqslant n$. Поэтому мы осмелимся в этом § называть пространство Y_0, а вместе с ним и все другие метризуемые пространства Y, удовлетворяющие утверждению следствия теоремы 3 бесконечномерными „сферами". В силу классической теоремы Куратовского все бесконечномерные „сферы" связны и локально-связны во всех размерностях. Но сходство с конечномерными сферами не так далеко как хотелось бы видеть:

Теорема 4. *Всякое метризуемое локально-конечномерное пространство класса* $C^\infty \cap LC^\infty$ (*соответственно* LC^∞) *является абсолютным (соответственно окрестностным) ретрактом в классе метризуемых пространств.*

Доказательство. Пусть $Y \in LC^\infty$. Тогда и всякое его открытое множество $O \in LC^\infty$. Если же O конечномерно, то оно будет и абсолютным окрестностным ретрактом (см. [3], стр. 244). Согласно условию пространство Y кроме того и локально-конечномерно. Значит, имеет открытое покрытие, состоящее из абсолютных окрестностных ретрактов. Но тогда по обобщенной второй теореме Ханнера (см. [10]) абсолютным окрестностным ретрактом будет и все Y. Если вдобавок $Y \in C^\infty$, то по одной теореме Дугунджи [3] пространство Y будет и абсолютным ретрактом.

Из этой теоремы и теоремы Дугунджи получаем

Следствие. *Никакая бесконечномерная „сфера" не может быть абсолютным окрестностным ретрактом и не может быть локально-конечномерной.*

Заметим, наконец, что выбранное нами пространство Y_0 за некий эталон бесконечномерной „сферы" хотя и стягиваемо, но не локально-стягиваемо в отличие от конечномерных сфер и не однородно. Поэтому имеют интерес следующие три вопроса, поставленные Ю. М. Смирновым, которые мы приводим с его согласия:

Проблема 1. *Существуют ли однородные бесконечномерные „сферы"?*

Проблема 2 (*). *Существуют ли локально-стягиваемые бесконечномерные „сферы"??*

Проблема 3. *Существуют ли однородные локально-стягиваемые и стягиваемые компактные бесконечномерные „сферы"???*

В заключение хочу выразить мою признательность профессору Ю. М. Смирнову за его помощь и поддержку, оказанную при написании этой работы.

Литература

[1] P. Alexandroff, *On the dimension of normal spaces*, Proc. Roy. Soc. A. 189 (1947), pp. 11–39.
[2] К. Борсук, *Теория ретрактов*, Москва 1971.
[3] J. Dugundji, *Absolute neighborhood retracts and local connectedness in arbitrary metric spaces*, Comp. Math. 13 (1958), pp. 229–246.
[4] К. Куратовский, *Топология*, т. 2, Москва 1969.
[5] Ю. Т. Лисица, *Продолжение непрерывных отображений и факторизационная теорема*, Сиб. Матем. Журн. 14 (1) (1973), стр. 128–129.

(*) Проблема 2 (а вместе с тем и вроблема 3) решена недавно отрицательно С. Богатым.

[6] Е. Г. Скляренко, *О размерностных свойствах бесконечномерных пространств*, Изв. АН СССР, матем. 23 (1959), стр. 197–212.
[7] Ю. М. Смирнов, *О трансфинитной размерности*, Матем. Сб. 58 (100) (1962), стр. 415–422.
[8] — *О размерности пространств близости*, Матем. Сб. 38 (80) (1956), стр. 271–308.
[9] Hu Sze-tsen, *Theory of Retracts*, Detroit 1965.
[10] E. Tutaj, *Ageneralisation of the second theorem of O. Hanner*, Zesz. Nauk. Uniw. Jagiel. 203 (1969), pp. 109–112.

Reçu par la Rédaction le 7. 3. 1972