References added in proof:

[18] R. Y. T. Wong and N. Kroonenberg, *Unions of Hilbert cubes*, preprint.

[19] H. Toruńczyk, *Absolute retracts as factors of normed linear spaces*, to appear in Fund. Math.

INSTITUTE OF MATHEMATICS,
POLISH ACADEMY OF SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 6. 10. 1972

Аналог теоремы Куратовского-Дугунджи

Г. Л. Гарг (Москва)

Abstract. The paper is dedicated to the problem of extension of mappings in the category of metrizable uniform spaces and uniformly continuous mappings. Unless otherwise mentioned, all spaces and maps belong to this category.

Theorem 1. *For a complete space Y, the following three conditions are equivalent:*

i) $Y \in LC^n$, *where* $n \geqslant 0$;

ii) *for any closed subset A of X, where $X \setminus A$ is precompact and relative dimension $r\Delta d(X \setminus A) \leqslant n+1$, every mapping $f\colon A \to Y$ has an extension $f_U\colon U \to Y$ for some uniform neighborhood U of A;*

iii) *for every closed embedding $i\colon Y \to Z$ where $Z \setminus iY$ is precompact and $r\Delta d(Z \setminus iY) \leqslant n+1$, there exists retraction $r_U\colon U \to iY$ from some uniform neighborhood U of iY.*

Theorem 4. *If A is closed in X and $r\Delta d(X \setminus A) = 0$, there exists retraction $r\colon X \to A$; under these very conditions every mapping $f\colon A \to Y$ has an extension $F\colon X \to Y$ for arbitrary uniform spaces Y (not necessarily metrizable).*

Various variations of Theorem 1 are also proved. Examples showing the essentiality of the precompactness of $X \setminus A$ and the completeness of Y are given: Theorem 1 is not true if even one of these conditions is removed.

Настоящая работа посвящена вопросу о продолжении равномерно-непрерывных отображений

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & Y \\ X \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

для метризуемых пространств, где i — равномерное вложение, f — заданное отображение, а $\tilde{f}$ — искомое продолжение. Как известно, для непрерывных отображений подобная задача решена при следующих (достаточно широких) известных условиях Куратовского [7]: 1) A — замкнуто в X, 2) $\dim(X \setminus A) \leqslant n+1$, 3) $Y \in C^n \cap LC^n$. В изучаемом здесь случае (категория метризуемых равномерных пространств с равномерно-непрерывными отображениями) ситуация значительно сложнее, чем в топологическом случае (категория метризуемых топологических пространств с непрерывными отображениями), где верна классическая теорема Куратовского-Дугунджи [5], [7].

В настоящей работе приводятся примеры (см. примеры 1 и 2), показывающие, что в общем случае прямой аналог теоремы Куратовского-Дугунджи не имеет места. Поэтому мы доказываем аналог этой теоремы при некоторых ограничительных условиях. Краткое изложение полученных результатов опубликовано в заметке [1].

Если не сказано по-другому, всюду далее мы будем иметь дело с категорией метризуемых равномерных пространств с равномерно-непрерывными отображениями.

§ 1. Аналог теоремы Куратовского-Дугунджи. Вот утверждения, представляющиеся нам основными:

ТЕОРЕМА 1. *Для полного* [1] *пространства* Y *следующие три условия эквивалентны*:

i) $Y \in LC^n$ [2], *где* $n \geqslant 0$;

ii) *если* A — *замкнуто в пространстве* X, *а* $X\setminus A$ — *прекомпактно* [3] *и* $r\Delta d(X\setminus A) \leqslant n+1$ [4], *то всякое отображение* $f\colon A \to Y$ *продолжаемо в отображение* $f_U\colon U \to Y$, *где* U — *некоторая равномерная окрестность множества* A;

iii) *для всякого такого замкнутого вложения* $i\colon Y \to Z$ *в пространство* Z, *что* $Z\setminus iY$ — *прекомпактно и* $r\Delta d(Z\setminus iY) \leqslant n+1$, *существует ретракция* $r_U\colon U \to iY$, *где* U — *некоторая равномерная окрестность множества* iY.

(1) Существуют неполные пространства Y, для которых теорема неверна. См. пример 2.

(2) Топологическое пространство X называется *n-связным*, если каждое непрерывное отображение n-мерной сферы S^n в X можно продолжить на $(n+1)$-мерный шар I^{n+1}. Пространство X называется *локально n-связным*, если для всякой точки x из X и каждой окрестности U точки x существует такая окрестность V точки x, что каждое непрерывное отображение сферы S^n в окрестность V можно продолжить на шар I^{n+1} со значениями в U. Если X является k-связным для каждого $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, то говорят, что $X \in C^n$, а если X — локально k-связно для каждого $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, то говорят, что $X \in LC^n$.

(3) Равномерное пространство называется *прекомпактным* если в каждое равномерное покрытие можно вписать конечное равномерное покрытие. Для метризуемых пространств, свойство прекомпактности эквивалентно свойству полной ограниченности. Пополнение прекомпактного пространства является бикомпактом. Каждое подмножество, а так же равномерно непрерывный образ прекомпактного пространства является прекомпактным.

Теорема не верна, если мы не требуем прекомпактность разностей $X\setminus A$ и $Z\setminus iY$ в условиях ii) и iii) соответственно; см. пример 1.

(4) $r\Delta d(M)$ обозначаем *относительную большую размерность* подмножеств M равномерного пространства X. По определению $r\Delta d(M) = \operatorname{Sup}_B \Delta d(B)/B\bar{\delta}(X\setminus M)$, где Δd-большая размерность в смысле Исбелла [6], а δ — отношение близости, порожденное известным образом равномерной структурой пространства X. Если X — метризуемо (равномерным образом), а ϱ — некоторая его равномерная метрика, от отношение $B\delta C$ эквивалентно равенству $\varrho(B, C) = 0$ и; следовательно, $r\Delta d(M)) = \operatorname{Sup}_B \Delta d(B)/\varrho(B, X\setminus M) > 0$. Поскольку размерность Δd монотонна, то $r\Delta d(M) \leqslant \Delta d(M)$.

ТЕОРЕМА 1'. *Утверждения теоремы* 1 *останутся верными, если в условии* i) *заменить* LC^n *на* C^n *и* LC^n, *а в условиях* ii) *и* iii) *заменить окрестность* U *на пространства* X *и* Z, *соответственно*.

ТЕОРЕМА 1''. *Каждое из условий теорем* 1 *и* 1' *эквивалентно условию* ii') *полученному из условия* ii) *либо заменяя размерность* $r\Delta d(X\setminus A)$ *на* $\Delta d(X\setminus A)$, *либо требуя, что пространство* X *компактно* [5], *либо соединяя указанные выше замену и требование вместе*.

ТЕОРЕМА 1'''. *Если* Y — *полно и* $\Delta dY \leqslant n+1$, *то тогда каждому из условий теоремы* 1 *или* 1' *эквивалентно условие, полученное заменой в условии* iii) *размерности* $r\Delta d(Z\setminus iY)$ *на* $\Delta d(Z\setminus iY)$ [6].

Для доказательства этих утверждений нам понадобятся следующие леммы и одна теорема о равномерной ханнеризации [7].

ЛЕММА 1. *Пусть* X *и* Y — *метрические пространства. Пусть* X — *объединение замкнутых подмножеств* A *и* B, *одно из которых является компактом. Если отображения* $f_1\colon A \to Y$ и $f_2\colon B \to Y$ — *равномерно непрерывны и совпадают на пересечении* $A \cap B$, *тогда отображение* $f\colon X \to Y$, *определяемое условиями* $f|A = f_1$ *и* $f|B = f_2$, *равномерно непрерывно*.

Пусть cX — пополнение пространства X. Тогда cX метризуемо (равномерным образом), поскольку пространство X метризуемо. Для любого подмножества $M \subset X$, пусть $\bar{M}$ и $O_\varepsilon M$ обозначают замыкание и ε-окрестность множества M в cX. Тогда верна следующая

ЛЕММА 2. *Если* A *замкнуто в* X, $X\setminus A$ — *прекомпактно и* $r\Delta d(X\setminus A) \leqslant n$, *то* $\dim(cX\setminus A) \leqslant n$.

Доказательство. Множество $cX\setminus A$ можно представить в виде счетного объединения замкнутых подмножеств $cX\setminus O_{\varepsilon_i}A$, где ε_i положительные числа стремящиеся к нулю. Так как $O_{\varepsilon_i}A \supset \overline{O_{\varepsilon_i'}A}$ при $\varepsilon_i' < \varepsilon_i$ то

$$cX\setminus O_{\varepsilon_i}A \subset \overline{cX\setminus O_{\varepsilon_i'}A} \subset \overline{X\setminus O_{\varepsilon_i'}A}$$

(ведь $\bar{X}\setminus\bar{B} \subset \overline{X\setminus B}$). Поскольку, для метризуемых пространств размерность $\dim$ монотонна, то

$$\dim(cX\setminus O_{\varepsilon_i}A) \leqslant \dim(\overline{X\setminus O_{\varepsilon_i'}A}) = \Delta d(\overline{X\setminus O_{\varepsilon_i'}A}) =$$
$$= \Delta d(X\setminus O_{\varepsilon_i'}A) \leqslant r\Delta d(X\setminus A) \leqslant n$$

(так как $\overline{X\setminus O_{\varepsilon_i'}A}$ — компакт). Отсюда в силу теоремы суммы для размерности $\dim$, получаем: $\dim(cX\setminus A) \leqslant n$. Лемма доказана.

(5) Тогда разность $X\setminus A$ будет автоматически прекомпактной.

(6) Не известно, будет ли это верно без ограничения $\Delta dY \leqslant n+1$.

(7) Для доказательства леммы 1 и теоремы 2 „О равномерной ханнеризации“ см. [2]; для леммы 3 см. Исбелл [6, гл. 5, теорема 6].

Лемма 3. *Пусть $A\subset X$ где X — равномерное пространство. $\Delta dA\leqslant n$, и для каждого подмножества B пространства X, далекого (не близкого) от A также $\Delta dB\leqslant n$; тогда $\Delta dX\leqslant n$.*

Теорема 2. *Для всякого отображения $f\colon A\to Y$ замкнутого в пространстве X множества A в пространство Y существует пространство Z, отображение $F\colon X\to Z$ и замкнутое вложение $i\colon Y\to Z$ удовлетворяющие следующим условиям:*

α) *$i(fx)=Fx$, при $x\in A$,*

β) *на $X\setminus A$ отображение F является равномерно непрерывным гомеоморфизмом,*

γ) *на всяком множестве B, далеком от A, отображение F является равномерным гомеоморфизмом,*

δ) *$B\bar{\delta}A$ тогда и только тогда, когда $FB\bar{\delta}iY$,*

θ) *$F(X\setminus A)=Z\setminus iY$.*

Доказательство теоремы 1. Чтобы лучше провести доказательство, мы разделим его на две части следующим образом:

Предложение 1. *Для полного пространства Y, условие* i) *эквивалентно условию* ii).

Предложение 2. *Для любого пространства Y, условие* ii) *эквивалентно условию* iii).

Доказательство предложения 1. Докажем сначала, что условие i) вытекает из условия ii). Для этого, рассмотрим $(n+1)$-мерный куб $X=I^{n+1}$ и непрерывное отображение $f\colon A\to Y$, где A — замкнуто в X. Так как это отображение f — равномерно-непрерывно и

$$r\Delta d(X\setminus A)\leqslant\Delta d(X\setminus A)\leqslant\Delta dX=\dim X=n+1,$$

то в силу условия ii), отображение f продолжаемо на некоторую равномерную окрестность и, значит, на некоторую окрестность множества A в кубе X. Но тогда по теореме Куратовского выполнено условие i), т. е. $Y\in LC^n$. Выведем теперь из условия i) условие ii). Для этого рассмотрим пополнение cX пространства X, о котором говорится в ii) (оно метризуемо). Тогда $\overline{X\setminus A}$ — компактно и $\bar{A}$ является пополнением множества A. Поэтому отображение f продолжаемо в отображение $\bar{f}\colon\bar{A}\to Y$ (ведь Y — полно). Пересечение $B=\bar{A}\cap(\overline{X\setminus A})$ — компактно и лежит в $\overline{X\setminus A}$. Рассмотрим сужение $\bar{f}_B=\bar{f}|B\colon B\to Y$. Лемма 2 показывает, что $\dim(\overline{X\setminus A}\setminus B)\leqslant n+1$ (так как $\overline{X\setminus A}\setminus B\subset cX\setminus A$). Но тогда в силу условия i) и согласно классической теореме Куратовского, отображение $\bar{f}_B\colon B\to Y$ можно продолжить в непрерывное отображение $\tilde{f}_{U'}\colon U'\to Y$, где U' некоторая окрестность множества B в $\overline{X/A}$. Так как B — компактно, то U' является равномерной окрестностью. Можно считать, что U' замкнуто и, следовательно, компактно. Тогда отображение $\tilde{f}_{U'}$ — равномерно непрерывно и множество $U=\bar{A}\cup U'$ является равномерной окрестностью множества A в пространстве cX. В силу леммы 1, отображение $cf_U\colon U\to Y$, определяемое условиями $cf_U|\bar{A}=\bar{f}$ и $cf_U|U'=\tilde{f}_{U'}$ — равномерно непрерывно (так как U' — компактно, и на пересечение $B=\bar{A}\cap U'$ отображения $\bar{f}$ и $\tilde{f}_{U'}$ совпадают). Тогда сужение $f_U=cf_U|(U\cap X)$ является искомым продолжением отображения f на равномерную окрестность $U\cap X$ множества A в пространстве X. Этим доказано предложение 1.

Доказательство предложения 2. То что iii) вытекает из ii) — ясно (условие iii) является частным случаем условия ii), если положить $X=Z$, $A=Y$ и $f=i$). Выведем теперь из условия iii) условие ii). В этом существенную роль играет теорема 2 „о равномерной ханнеризации". Пусть $f\colon A\to Y$, где A замкнуто в X и $X\setminus A$ удовлетворяет условию ii). В силу теоремы 2, существует пространство Z — равномерная ханнеризация пространств X и Y относительно отображения f. Тогда в силу равномерной непрерывности отображения F, условия θ) и прекомпактности множества $X\setminus A$, множество $Z\setminus iY$ — прекомпактно. Из условий γ), δ) и θ) вытекает, что $r\Delta d(Z\setminus iY)=r\Delta d(X\setminus A)\leqslant n+1$ (8). Тогда в силу условия iii), существует некоторая равномерная окрестность U' множества iY в пространстве Z и ретракция $r_{U'}\colon U'\to iY$. Пусть $U=F^{-1}U'$, $F_U=F|U$ и $f_U=i^{-1}r_{U'}F_U$. Так как отображение F — равномерно непрерывно, то множество $U=F^{-1}U'$ является равномерной окрестностью множества A в пространстве X, а отображение $f_U\colon U\to Y$ — искомым продолжением отображения f. Этим доказано предложение 2.

Соединяя предложения 1 и 2, мы получаем теорему 1.

Доказательство теоремы 1′. Для теоремы 1′ нужны следующие предложения аналогичные предложениям 1 и 2:

Предложение 1′. *Для полного пространства Y, условия* i) *и* ii) *теоремы* 1′ *эквивалентны между собой.*

Предложение 2′. *Для любого пространства Y, условия* ii) *и* iii) *теоремы* 1′ *эквивалентны между собой.*

Для доказательства предложения 1′, заметим, что в доказательстве первой части предложения 1, нужно заменить равномерную окрестность на само пространство X. Во второй части предложения 1, опять нужно заменить окрестность U' на $\overline{X\setminus A}$, а тогда отображение $cf_X\colon cX\to Y$, определяемое отображениями $\bar{f}\colon\bar{A}\to Y$ и $\tilde{f}_{\overline{X\setminus A}}\colon\overline{X\setminus A}\to Y$, будет равномерно-непрерывно, в силу леммы 1. Сужение $f_X=cf_X|X$ будет искомым продолжением отображения f.

Также для доказательства предложения 2′, в доказательстве предложения 2 нужно заменить равномерную окрестность U' на само пространство Z, а тогда $f_X=i^{-i}r_ZF$ будет искомым продолжением отображения f.

(8) Равенство $\Delta d(Z\setminus iY)=\Delta d(X\setminus A)$ здесь может не выполняться; см. пример 1 в работе [2].

Этим доказаны утверждения 1′ и 2′, а следовательно теорема 1′.

Доказательство теоремы 1″. Для доказательства теоремы 1″, нужно только заметить, что из условия ii) следует условие ii′), а из ii′) следует i). В самом деле ii′) является лишь частным случаем условия ii). То, что i) вытекает из условия ii′), фактически доказано нами ранее (в доказательстве предложений 1 и 1′, так как рассматриваемое там пространство $X = I^{n+1}$ удовлетворяет условию ii′)). Этим и доказана теорема 1″.

Доказательство теоремы 1‴. Здесь нужно только заметить, что в предположении $\Delta dY \leqslant n+1$, неравенство $r\Delta d(Z\setminus iY) \leqslant n+1$ выполняется тогда и только тогда, когда $\Delta d(Z\setminus iY) \leqslant n+1$. Из $\Delta d(Z\setminus iY) \leqslant n+1$ следует $r\Delta d(Z\setminus iY) \leqslant n+1$ (по определению относительной размерности $r\Delta d$). Но в силу леммы 3,

$$\Delta dZ = \mathrm{Max}\{\Delta d(iY), r\Delta d(Z\setminus iY)\}.$$

Значит из неравенств $r\Delta d(Z\setminus iY) \leqslant n+1$ и $\Delta dY \leqslant n+1$ вытекает $\Delta dZ \leqslant \leqslant n+1$ и, в частности, $\Delta d(Z\setminus iY) \leqslant n+1$.

§ 2. Отказ от полноты пространства Y.

Отказаться в первой части теоремы 1 (т. е. в предложении 1) от условия полноты пространства Y нам удалось лишь в предположении полноты подпространства A:

Теорема 3. *Для всякого пространства Y следующие два условия эквивалентны:*

i) *$Y \in LC^n$, где $n \geqslant 0$;*

ii) *если A — полное подпространство пространства X, и разность $X\setminus A$ — прекомпактно* [9], *и $r\Delta d(X\setminus A) \leqslant n+1$, то всякое отображение f: $A \to Y$ продолжаемо в отображение f_U: $U \to Y$ где U некоторая равномерная окрестность множества A.*

Доказательство. Из доказательства первой части предложения 1 вытекает, что из ii) следует условие i) (так как каждое замкнутое подпространство A куба $X = I^{n+1}$ является полным (на самом деле компактом)). Полнотой пространства Y в этой части предложения 1 мы не пользуемся. Из второй части предложения 1 вытекает, что из i) следует ii) (так как в этом случае $\bar{A} = A$ и $\bar{f} = f$). Теорема 3 доказана.

Замечание. Разумеется, остаются верными в этих условиях и теоремы, аналогичные первой части теорем 1′ и 1″, с возможными видоизменениями условия ii), причем с равным правом вместо компактности пространства X можно пользоваться и полнотой.

[9] Теорема не верна если мы не требуем прекомпактность разности $X\setminus A$; см. пример 1.

§ 3. Примеры.

Приведем примеры, показывающие, что условие прекомпактности разности $X\setminus A$, а также условие полноты пространства Y в теореме 1 существенны: теорема 1 не верна, если выкинуть хотя бы одно из них.

Докажем сначала одно общее.

Предложение 3. *Пусть Y — произвольное метрическое пространство. Для того, чтобы выполнялось условие* ii) (*теоремы* 1), *где разность $X\setminus A$ не обязательно прекомпактна, необходимо, чтобы Y было ULC^n — пространством* [10].

Доказательство. Пусть X_k $(k \leqslant n)$ — следующее подпространство $(k+1)$-мерного эвклидова пространства E^{k+1}: это — объединение такого бесконечного семейства шаров I_i^{k+1} $(i = 1, 2, \ldots)$ что $\operatorname{diam} I_i^{k+1} = 1/i$ и $\varrho(I_i^{k+1}, I_j^{k+1}) \geqslant 1$ при $i \neq j$. Пусть A_k — объединение граничных сфер всех этих шаров. Тогда разность $X_k\setminus A_k$ — не прекомпактна, $\Delta d(X_k\setminus A_k) = k+1 \leqslant n+1$. Докажем, что если каждое отображение f^k: $A_k \to Y$ продолжаемо на некоторую равномерную окрестность множества A_k в пространство X_k то тогда Y должно быть ULC^n-пространством.

Пусть Y не является ULC^n-пространством. Тогда найдутся такие числа $k_0 \leqslant n$ и $\varepsilon > 0$ что для каждого $i = 1, 2, \ldots$ существует отображение f_i: $S_i^{k_0} \to Y$, что $\operatorname{diam} f_i(S_i^{k_0}) < 1/i$, не продолжаемо в отображении F_i: $I_i^{k_0+1} \to Y$ с $\operatorname{diam} F_i(I_i^{k_0+1}) < \varepsilon$. Определим отображение f: $A_{k_0} \to Y$ как отображение, которое на каждой сфере $S_i^{k_0}$ совпадает с отображением f_i. Легко проверить, что f — равномерно непрерывно. Тогда существует продолжение F отображения f, на некоторую равномерную окрестность множества A_{k_0}. Значит существует продолжение F_i: $I_i^{k_0+1} \to Y$ некоторого отображения f_i, причем $\operatorname{diam} F_i(I_i^{k_0+1}) < \varepsilon$ (ведь всякая равномерная окрестность множества A_{k_0} содержит бесконечное число шаров $I_i^{k_0+1}$). Получили противоречие. Этим интересующее нас предложение доказано.

Пример 1. Поскольку существуют метрические пространства (даже полные) которые являются LC^n-но не ULC^n-пространствами, то предложение 3 показывает, что без требования прекомпактности разности $X\setminus A$ в условии ii) теоремы 1 и 3 неверны (ведь пространство X, в частности, подпространство A — рассматриваемое в предложении 3 — полно).

Пример 2. Пусть X — полуинтервал $(0, 1]$, а Y — следующее подпространство плоскости E^2:

$$Y = \{(x, y) \in E^2\colon x = 0,\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \text{ или } 0 \leqslant x \leqslant 1,\ y = \frac{1}{2^i} \text{ при } i = 0, 1, 2, \ldots\}.$$

[10] Мы говорим, что метрическое пространство Y является ULC^n-пространством, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$ что каждое отображение f: $S^k \to Y$, где $\operatorname{diam} f(S^k) < \delta$ продолжаемо в отображении F: $I^{k+1} \to Y$, где $\operatorname{diam} F(I^{k+1}) < \varepsilon$ для $k = 0, 1, \ldots, n$.

Тогда Y — не полно. Пусть

$$A = \left\{\frac{1}{2^i}: i = 0, 1, \ldots\right\}.$$

Тогда Y удовлетворяет условию i) теоремы 1 для $n = 0$ т. е. $Y \in LC^0$. Но отображение $f\colon A \to Y$, отображающее каждую точку $1/2^i$ множества A в соответствующую точку $(1, 1/2^i)$ пространства Y, очевидно, равномерно непрерывно, но не продолжаемо (равномерным образом) не на одну равномерную окрестность множества A.

§ 4. Нульмерный случай: $r\Delta d(X \setminus A) = 0$. Если $r\Delta d(X \setminus A) = 0$, то верна следующая общая

Теорема 4. *Если A замкнуто в пространстве X и $r\Delta d(X\setminus A) = 0$, то существует ретракция $r\colon X \to A$; при этих же условиях всякое отображение $f\colon A \to Y$ в произвольное равномерное пространство Y имеет продолжение $F\colon X \to Y$* [11].

Для доказательства нужны следующие леммы:

Лемма 4. *Пусть X — метрическое пространство, A замкнуто в X и $r\Delta d(X\setminus A) = 0$. Тогда существует такое покрытие $\overline{\omega}$ для разности $X \setminus A$ что*

1. *на всяком множестве, далеком от A, покрытие $\overline{\omega}$ является равномерным,*

2. *для всякого элемента H покрытия $\overline{\omega}$ из $\varrho(H, A) < \varepsilon$ следуют что* $\operatorname{diam} H < \varepsilon$,

3. $\operatorname{Ord}\overline{\omega} = 1$ *(т. е. $\overline{\omega}$ — дискретное покрытие).*

Из условия 1 и 3 следует, что покрытие $\overline{\omega}$ является равномерно дискретным на каждом множестве далёком от A.

Доказательство леммы 4. Рассмотрим убывающую последовательность таких положительных чисел ε_i, что

$$\varepsilon_{i+1} < \frac{\varepsilon_i}{2} \leqslant \frac{1}{2^i} \quad \text{для каждого } i\,.$$

Пусть $X_1 = B_1 = X \setminus O_{\varepsilon_1}A$ и $\widetilde{r}^{(1)} = r^{(1)}$ — равномерное покрытие множества B_1, состоящее из равномерно дискретного семейства множеств $H^{(1)}$ диаметра меньшего чем $\varepsilon_1/4$ (такое покрытие для B_1 существует, так как $\Delta dB_1 = 0$). Далее, пусть $B_2 = O_{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}A \setminus O_{\varepsilon_2}A$ и пусть $r^{(2)}$ — равномерное покрытие множества B_2 состоящее из равномерно дискретного семейства множеств $H^{(2)}$ диаметра меньшего чем $\varepsilon_2/4$ и чем число Лебега покрытия $\widetilde{r}^{(1)}$. Заметим, что любой элемент $H^{(2)}$, покрытия $r^{(2)}$, может пересекаться не более чем с одним элементом $H^{(1)}$ покрытия $\widetilde{r}^{(1)} = r^{(1)}$. Для каждого $H^{(1)}$ из $\widetilde{r}^{(1)}$

[11] Частный случай этой теоремы приведен в работе [3].

определяем $\widetilde{H}^{(1)}$ как объединение множества $H^{(1)}$ с всеми теми элементами $H^{(2)}$ покрытия $r^{(2)}$, которые пересекаются с $H^{(1)}$. Семейство $\widetilde{r}^{(2)}$ состоящее из всех множеств $\widetilde{H}^{(1)}$ и тех $H^{(2)}$ из $r^{(2)}$, которые не пересекаются с X_1, является равномерным покрытием множества $X_2 = X_1 \cup B_2 = X \setminus O_{\varepsilon_2}A$ порядка $\operatorname{Ord}\widetilde{r}^{(2)} = 1$, кроме того $\widetilde{r}^{(2)}$ является продолжением покрытия $\widetilde{r}^{(1)}$ на X_2. Ясно, что каждое множество $\widetilde{H}^{(1)}$ имеет диаметр меньше чем $\varepsilon_1/2$. Продолжая этот процесс, мы получим (для каждого i) равномерное покрытие $\widetilde{r}^{(i)}$ множества $X_i = X_{i-1} \cup B_i = X \setminus O_{\varepsilon_i}A$, где $B_i = O_{(\varepsilon_{i-1}+\varepsilon_i)}A \setminus O_{\varepsilon_i}A$, состоящее из множеств $\widetilde{H}^{(1)}, \widetilde{H}^{(2)}, \ldots, \widetilde{H}^{(i-1)}, H^{(i)}$, где $\operatorname{diam} H^{(i)} < \varepsilon_i/4$ и $\operatorname{diam}\widetilde{H}^{(k)} < \varepsilon_k/2$ для $k \leqslant i-1$. $\operatorname{Ord}\widetilde{r}^{(i)} = 1$ и каждое из покрытий $\widetilde{r}^{(i+1)}$ является продолжением предыдущего покрытия $\widetilde{r}^{(i)}$ на множество $X_{i+1} = X \setminus O_{\varepsilon_{i+1}}A$. Мы определим $\overline{\omega}$ как покрытие множества $X \setminus A$ являющееся объединением всех покрытий $\widetilde{r}^{(i)}$. Легко проверить, что так получаемое покрытие $\overline{\omega}$ удовлетворяет всем условиям леммы 4. Лемма доказана.

Пусть дано вложение $X \subset Y$ [12]. Равномерное покрытие $\{U_\beta\}$ пространства Y называют *продолжением равномерного покрытия* $\{V_\beta\}$ [13] *пространства X на пространство Y*, если $V_\beta = U_\beta \cap X$ — для каждого V_β. По определению вложения, каждое равномерное покрытие любого подпространства имеет продолжение. Продолжение $\{U_\beta\}$ покрытия $\{V_\beta\}$ называют *изоморфным продолжением*, если их нервы изоморфны, т. е. любое конечное семейство множеств U_{β_i} имеет общую точку тогда и только тогда, когда они имеют общую точку в подпространстве X. Покрытие $\{U_\beta\}$ назовем *сильно изоморфным продолжением покрытия* $\{V_\beta\}$, если это верно для любого семейства множеств U_β, конечного или бесконечного.

Дальнейшая лемма касается продолжений равномерных покрытий, смотрите [2]:

Лемма 5. *Для любого подпространства X равномерного пространства Y, каждое равномерное покрытие $\{V_\beta\}$ имеет сильно изоморфное продолжение $\{U_\beta\}$ на некоторую равномерную окрестность X в Y. При этом можно потрбовать чтобы $U_\beta \subset \operatorname{St}(V_\beta, y)$* [14] *для любого данного равномерного покрытия y пространства Y.*

Доказательство теоремы 4. Чтобы определить искомую ретракцию $r\colon X \to A$ простроим счетную последовательность равномерных покрытий $\{\eta_i\}$ для пространства X.

Построение. Пусть (для каждого i) ω_i — равномерное покрытие множества A — состоящее из всех множеств U_i диаметра [15] меньшего $1/3^i$.

[12] X, Y — произвольные равномерные пространства.

[13] Множество индексов β для покрытия $\{V_\beta\}$ вообще говоря является частью множества индексов β для $\{U_\beta\}$.

[14] „Звездой“ $\operatorname{St}(A, \alpha)$ — множества A относительно покрытия α называют *объединение всех множеств из α, пересекающихся с A.*

[15] Всюду далее пространство X будет рассматриваться как метрическое пространство.

Тогда $\omega_{i+1} <_* \omega_i$ [16]. В силу леммы 5, существует сильно изоморфное (равномерное) продолжение $\widetilde{\omega}_i$ покрытия ω_i на некоторую равномерную окрестность $O_{\varepsilon_i}A$ множества A. Можно предполагать, что $\varepsilon_{i+1} < \varepsilon_i \leqslant 1/2^i$ и что $\widetilde{U}_{i+1} \subset \mathrm{St}(U_{i+1}, \widetilde{\omega}_i)$ [17] для любого U_{i+1} из ω_{i+1}, где $\widetilde{U}_{i+1} \cap A = U_{i+1}$. Для каждого элемента U_i покрытия ω_i определим $\tilde{\tilde{\tilde{U}}}_i$ как объединение множества U_i со всеми теми элементами H покрытия $\overline{\omega}$ (построенного в лемме 4 на множестве $X \setminus A$), которые содержатся в множестве $\widetilde{U}_i^*$ [18]. Для каждого индекса i определяем η_i как покрытие, состоящее из всех так получаемых множеств $\tilde{\tilde{\tilde{U}}}_i$, и всех тех элементов H покрытия $\overline{\omega}$, которые не содержатся ни в каком $\tilde{\tilde{\tilde{U}}}_i$. Тогда η_i — равномерное покрытие пространства X, причем имеет место вспомогательная

Лемма 6. *Если* $U_{i+1}^* \subset U_i$, *то* $\widetilde{U}_{i+1}^* \subset \widetilde{U}_i^*$ *и* $\tilde{\tilde{\tilde{U}}}_{i+1} \subset \tilde{\tilde{\tilde{U}}}_i$, *где* $U_{i+1}^* = \mathrm{St}(U_{i+1}, \omega_{i+1})$ *и* $\widetilde{U}_{i+1}^* = \mathrm{St}(\widetilde{U}_{i+1}, \widetilde{\omega}_{i+1})$.

Доказательство. Заметим что

$$\widetilde{U}_{i+1} \subset \mathrm{St}(U_{i+1}, \widetilde{\omega}_i) \quad \text{и} \quad \widetilde{V}_{i+1} \subset \mathrm{St}(V_{i+1}, \widetilde{\omega}_i) \quad \text{где} \quad U_{i+1}, V_{i+1} \in \omega_{i+1}.$$

Тогда из $\widetilde{V}_{i+1} \cap \widetilde{U}_{i+1} \neq \emptyset$ следует что $V_{i+1} \cap U_{i+1} \neq \emptyset$. Значит $V_{i+1} \subset U_{i+1}^*$. Тогда $\mathrm{St}(V_{i+1}, \widetilde{\omega}_i) \subset \mathrm{St}(U_{i+1}^*, \widetilde{\omega}_i)$ и поэтому $\widetilde{V}_{i+1} \subset \mathrm{St}(U_{i+1}^*, \widetilde{\omega}_i)$. Отсюда получаем, что

$$\widetilde{U}_{i+1}^* \subset \mathrm{St}(U_{i+1}, \widetilde{\omega}_i) \subset \mathrm{St}(U_i, \widetilde{\omega}_i) = \mathrm{St}(\widetilde{U}_i, \widetilde{\omega}_i) = \widetilde{U}_i^*,$$

поскольку $U_{i+1}^* \subset U_i$. Это доказывает первую часть леммы 6.

По определению $\tilde{\tilde{\tilde{U}}}_{i+1} = U_{i+1} \cup (\bigcup H)$ (объединение $\bigcup H$ берем не по всем множествам H, а лишь по таким, которые содержатся в $\widetilde{U}_{i+1}^*$). Ясно что $\tilde{\tilde{\tilde{U}}}_{i+1} \subset U_i \cup (\bigcup H)$ и значит $\tilde{\tilde{\tilde{U}}}_{i+1} \subset \tilde{\tilde{\tilde{U}}}_i$, так как из первой части леммы $H \subset \widetilde{U}_{i+1}^* \subset \widetilde{U}_i^*$, а тогда $H \subset \tilde{\tilde{\tilde{U}}}_i$. Лемма доказана.

Ретракция. Искомая ретракция $r \colon X \to A$ определяется следующим образом. Если H — любой элемент покрытия $\overline{\omega}$ (множества $X \setminus A$), не содержащийся ни в одном множестве $\tilde{\tilde{\tilde{U}}}_i$ ни одного из покрытий η_i, то определим $r(H)$ как произвольно взятую точку из множества A. Если H содержится в некотором множестве $\tilde{\tilde{\tilde{U}}}_i$ для некоторого η_i, то тогда можно выбрать такой максимальный индекс i_0, что $H \subset \tilde{\tilde{\tilde{U}}}_{i_0}$ для некоторого $\tilde{\tilde{\tilde{U}}}_{i_0}$ из η_{i_0}. Рассмотрим все те элементы $\tilde{\tilde{\tilde{U}}}_{i_0}^{\alpha}$ покрытия η_{i_0}, которые содержат H. Тогда $H \subset (\widetilde{U}_{i_0}^{\alpha})^*$ и значит пересечение $\bigcap\limits_{\alpha} (\widetilde{U}_{i_0}^{\alpha})^*$ (где $H \subset \widetilde{U}_{i_0}^{\alpha}$) — не пусто. Значит, и $\bigcap\limits_{\alpha} (U_{i_0}^{\alpha})^* \neq \emptyset$. Для такого H, мы определим $r(H)$ как произвольно взятую точку пересечения $\bigcap\limits_{\alpha} (U_{i_0}^{\alpha})^*$. Таким образом отображение r определено в каждой точке множества $X \setminus A$. На самом множестве A определим r как тождественное отображение. Докажем, что отображение r является искомой ретракцией, т. е. оно равномерно непрерывно. Пусть $\varepsilon > 0$. Существует такое i, что $1/3^i < \varepsilon$. Покажем, что диаметр r — образа всякого элемента равномерного покрытия η_{i+3} меньше чем ε. В самом деле, рассмотрим любой элемент типа $\tilde{\tilde{\tilde{U}}}_{i+3}$ покрытия η_{i+3}. Тогда любые множества H, H', лежащие в $\tilde{\tilde{\tilde{U}}}_{i+3}$ лежат и в $\widetilde{U}_{i+3}^*$. Пусть i_0 и i_0' — максимальные такие числа что $H \subset \tilde{\tilde{\tilde{V}}}_{i_0}$ и $H' \subset \tilde{\tilde{\tilde{V}}}_{i_0'}$ (для некоторых $\tilde{\tilde{\tilde{V}}}_{i_0} \in \eta_{i_0}$, и $\tilde{\tilde{\tilde{V}}}_{i_0'} \in \eta_{i_0'}$). Очевидно $i_0, i_0' \geqslant i+3$. Тогда $r(H) \in V_{i_0}^*$ и $r(H') \in V_{i_0'}^*$. Так как $H \subset \tilde{\tilde{\tilde{V}}}_{i_0}$ и $i_0 > i+2$, то по лемме 6 $H \subset \tilde{\tilde{\tilde{V}}}_{i+2}$ для некоторого $V_{i+2} \supset V_{i_0}^*$. Аналогично $H' \subset \tilde{\tilde{\tilde{W}}}_{i+2}$ для некоторого $W_{i+2} \supset V_{i_0'}^*$. Так как $H \subset \tilde{\tilde{\tilde{U}}}_{i+2}$, то $H \subset \tilde{\tilde{\tilde{U}}}_{i+2} \cap \tilde{\tilde{\tilde{V}}}_{i+2}$. Значит $\widetilde{U}_{i+2}^* \cap \widetilde{V}_{i+2}^* \neq \emptyset$, так как $H \neq \emptyset$. Тогда и $U_{i+2}^* \cap V_{i+2}^* \neq \emptyset$. Значит $U_{i+1} \cap V_{i+1} \neq \emptyset$, где $U_{i+1} \supset U_{i+1}^*$ и $V_{i+1} \supset V_{i+2}^*$. Аналогично, $U_{i+1} \cap W_{i+1} \neq \emptyset$, где $W_{i+1} \supset W_{i+2}^*$. Тогда $V_{i+1} \cup W_{i+1} \subset U_{i+1}^* \subset U_i$ для некоторого U_i из ω_i. Значит, $V_{i_0}^* \cup V_{i_0'}^* \subset U_i$. Тогда $r(H) \cup r(H') \subset U_i$. Следовательно, $r(\tilde{\tilde{\tilde{U}}}_{i+3}) \subset U_i$ и

$$\operatorname{diam} r(\tilde{\tilde{\tilde{U}}}_{i+3}) \leqslant \operatorname{diam} U_i < \frac{1}{3^i} < \varepsilon.$$

Если $H \in \eta_{i+3}$, то $\operatorname{diam} r(H) < \varepsilon$, так как образ $r(H)$ — одна точка. Итак, мы показали, что r — равномерно непрерывно. Это и доказывает теорему 4.

Замечание. Следует заметить, что все наши утверждения будут верны, если в каждом утверждении заменим Δd на равномерную размерность δd в смысле Смирнова [4].

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить глубокую благодарность Ю. М. Смирнову за постановку задачи и постоянный интерес к работе.

Литература

[1] Г. Л. Гарг, *Аналог теоремы Куратовского-Дугунджи для категорий метризуемых равномерных пространств с равномерно-непрерывными отображениями*, ДАН СССР, 195 (2) (1970), стр. 10–13.

[2] — *Одна теорема о равномерном вложении*, Укр. Мат. Жур. 24 (4) (1972), стр. 465–475.

[3] — *Необходимое и достаточное условие для того, чтобы метрическое пространство можно было равномерно ретрагировать на каждое его непустое замкнутое множество*, Сибирский Математический журнал 12 (1) (1971), стр. 222–225.

[4] Ю. М. Смирнов, *О размерности пространств близости*, Математический сборник, 30 (80) 3 (1956), стр. 283–302.

[16] Покрытие β звездно вписано в покрытие α — краткая запись $\beta <_* \alpha$ — если для любого B из β звезда $\mathrm{St}(B, \beta)$ содержится в некотором элементе покрытия α.

[17] $\widetilde{U}_{i+1}$ обозначает элемент продолженного покрытия $\widetilde{\omega}_{i+1}$, полученного из элемента U_{i+1} покрытия ω_{i+1}.

[18] $\widetilde{U}_i^* = \mathrm{St}(\widetilde{U}_i, \widetilde{\omega}_i)$.

[5] J. Dugundji, *Absolute neighborhood retracts and local connectedness in arbitrary metric spaces*, Comp. Math. 13 (1958), pp. 229–246.
[6] J. R. Isbell, *Uniform spaces*, Amer. Math. Soc. (1964).
[7] K. Kuratowski, *Sur les espaces localement connexes et péaniens en dimension n*, Fund. Math. 24 (1935), pp. 269–287.
[8] J. I. Nagata, *Modern Dimension Theory*, Amsterdam 1965.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СССР,
ПАНДЖАБИ УНИВЕРСИТЕТ, Патиала, Индия

Reçu par la Rédaction le 10. 10. 1972

Errata to the paper "A characterization of locally compact fields of zero characteristic" Fundamenta Mathematicae 76 (1972), pp. 149-155

by

Witold Więsław (Wrocław)

The purpose of the present note is to correct the statement "It is well known (see [8], [10]) that the only full, locally bounded non-trivial topologies on a field are topologies of type V...". This theorem was not proved in the paper. This fact was pointed out by Prof. Seth Warner. I wish to thank Prof. S. Warner for his comments. In connection with it some changes should be done in the paper. The above mentioned sentence should be omitted (pp. 149^{12}–149^{15}, 150^{8}–150^{11}, 151^{15}–151^{17}). The sentence "Let us remark that the topology $\mathcal{T}$ is induced in L by a non-Archimedean valuation..." (pp. 150_4–150_1, 151^1–151^5) should be read as: "Let us remark that the topology $\mathcal{T}$ is induced in L by a non-Archimedean pseudovaluation (cf. P. M. Cohn, *An invariant characterization of pseudovaluations on a field*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 50 (1954), pp. 159–177). Indeed, since $Q_p \subset L$ topologically and $p^n \to 0$ in $\mathcal{T}$ as $n \to \infty$, the set T of all topological nilpotents in L is non-void, whence open and bounded (since $\mathcal{T}$ is locally bounded) as it follows from Theorem 6.1′ (loc. cit.). Let us denote this pseudovaluation by $|a|$. We have

$$|\varepsilon t| \leqslant |\varepsilon||t| = |\varepsilon|_p|t| = |t| = |\varepsilon^{-1}(\varepsilon t)| \leqslant |\varepsilon^{-1}||\varepsilon t|$$
$$= |\varepsilon^{-1}|_p|\varepsilon t| = |\varepsilon t|, \; |\varepsilon t| = |t| .$$

Since $|a|$ is a non-Archimedean pseudovaluation, so $|\varphi_s(a)| = |a|$ for every $a \in Q_p(t)$."

Lemma 2 should be replaced by the following

LEMMA 2′. *Let E be a separable algebraic extension of F. Moreover, if E is a pseudovaluated extension of a real-valued field F, E and F both being complete, and the pseudovaluation of E extends the norm of F, then E is a finite extension of F, i.e. $[E: F] < \infty$.*

Instead of A. Ostrowski [12] there should be: I. Kaplansky, *Topological methods in valuation theory*, Duke Math. Journal, 14 (1947), pp. 527–541 (Th. 9).