STUDIA MATHEMATICA, T. XLV. (1973)

On a problem concerning joint approximate point spectra

by

W. ŻELAZKO (Warszawa)

Abstract. It is shown that the joint approximate point spectrum of a finite number of commuting endomorphisms of a complex Banach space is a non-empty subset of C^n.

In the paper [2] Dash studies a concept of joint spectrum of a commuting family of endomorphisms of the Hilbert space and states the question (Problem 2) whether the joint approximate point spectrum of a finite number of commuting operators is non-empty. Applying our result given in [5] we give a positive answer to this question.

The author is indebted to the referee for the information that the above problem has been solved by Bunce [1] and by Dash [3]. However the proof presented here is different, and covers the more general situation of an arbitrary Banach space, while both authors are concerned with the case of a Hilbert space.

We recall now the basic definitions and results.

DEFINITION 1. Let X be a complex Banach space and $L(X)$ — the algebra of all its continuous endomorphisms. Let $A = (A_1, \ldots, A_n)$ be a family of commuting elements of $L(X)$.

The joint approximate point spectrum $\sigma_\pi(A)$ of A is defined as

$$\begin{aligned}\sigma_\pi(A) &= \sigma_\pi(A_1, \ldots, A_n)\\ &= \Big\{(z_1, \ldots, z_n) \in C^n \colon \sum_{i=1}^{n} B_i(A_i - z_i I) \neq I \text{ for all } B_i \in L(X)\Big\},\end{aligned}$$

where I is the identity map (for properties of this spectrum in case when X is a Hilbert space cf [2]).

DEFINITION 2. A subset S of a commutative Banach algebra $\mathscr{A}$ with unit element is said to consist of joint topological divisors of zero if for every subset $(a_1, \ldots, a_n) \subset S$ there exists a sequence $(z_k) \subset \mathscr{A}$, $\|z_k\| = 1$ for $k = 1, 2, \ldots$, such that

$$\lim_{k\to\infty} \|z_k a_i\| = 0 \quad \text{for } i = 1, 2, \ldots, n.$$

The main result of the paper [5] says that if M is a maximal ideal of a commutative Banach algebra $\mathscr{A}$ belonging to its Shilov boundary $\Gamma(\mathscr{A})$, then M consists of joint topological divisors of zero (for the definition and properties of the Shilov boundary cf e.g. [4], the only property we need here is that $\Gamma(\mathscr{A})$ is never void for a commutative Banach algebra with unit element).

As a corollary to this result we obtain the solution of the mentioned above problem of Dash for an arbitrary complex Banach space X.

THEOREM. *Let X be a complex Banach space and $A_1, \ldots, A_n$ an n-tuple of pairwise commuting elements of $L(X)$. Then the joint approximate point spectrum $\sigma_\pi(A_1, \ldots, A_n)$ is a non-void subset of C^n.*

Proof. Let $\mathscr{A}$ be a commutative closed subalgebra of $L(X)$ containing the elements $A_1, \ldots, A_n$ and the identity operator. Let f be a multiplicative linear functional in $\Gamma(\mathscr{A})$ (we identify the multiplicative linear functionals with their kernels). It is sufficient to show that $(f(A_1), \ldots, f(A_n))$ belongs to the joint approximate point spectrum $\sigma_\pi(A_1, \ldots, A_n)$. We put $z_i = f(A_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, so that $A_i - z_i I$ belong to $M = f^{-1}(0)$ and thus by the main result of [5] there is a sequence of operators $(C_k) \subset \mathscr{A}$, $\|C_k\| = 1$, such that

$$\lim_k (A_i - z_i I) C_k = 0$$

for $i = 1, 2, \ldots, n$. If we had $\sum_{i=1}^{n} B_i(A_i - z_i I) = I$ for some $B_i \in L(X)$, then multiplying both sides by C_k on the right we would obtain

$$C_k = \sum_{i=1}^{n} B_i(A_i - z_i I) C_k;$$

this is impossible since the right hand tends to zero when k increases to infinity, while the norm of the left hand equals to one for every k.

References

[1] J. Bunce, *The joint spectrum of commuting non-normal operators*, Proc. Amer. Math. Soc. 29 (1971), pp. 499–505.

[2] A. T. Dash, *Joint spectra*, Stud. Math., this volume, pp. 225–237.

[3] — *A note on joint approximate point spectrum*, Indiana University and University of Guelph, preprint.

[4] C. E. Rickart, *General theory of Banach algebras*, Princeton 1960.

[5] W. Żelazko, *On a certain class of non-removable ideals in Banach algebras*, Stud. Math. 44 (1972), pp. 87–92.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUTE OF MATHEMATICS, POLISH ACADEMY OF SCIENCES

Received October 15, 1971 (462)

STUDIA MATHEMATICA, T. XLV. (1973)

Über Greensche Funktionen singulärer elliptischer Differentialoperatoren

von

BERND LANGEMANN (Rostock)

Zusammenfassung. Die Arbeit enthält einen Satz über die Einbettung des Raumes $W^{2m}_{2,q(x)}(R_n)$ (Sobolev-Raum mit Gewichtsfunktion) in $L_2(R_n)$ und eine Aussage über die Zugehörigkeit der Greenschen Funktionen von singulären elliptischen Differentialoperatoren zu Räumen $W^{k}_{2,q(x,y)}(R_n \times R_n)$, wobei k nicht notwendig ganzzahlig ist.

0. Einer Bemerkung von H. Triebel [13] zufolge, wird untersucht, unter welchen Voraussetzungen sich die Umkehroperatoren von singulären elliptischen Differentialoperatoren als Integraloperatoren schreiben lassen und welche Eigenschaften die Greenschen Funktionen dieser Operatoren besitzen. Grundlage der Überlegungen ist die Ungleichung

$$c_1 \|u\|_{W^{2m}_{2,q(x)}(R_n)} \leqslant \|Au\| \leqslant c_2 \|u\|_{W^{2m}_{2,q(x)}(R_n)},$$

deren Gültigkeit für die Operatoren $Q^m = (-\Delta + q(x))^m$, $q(x) \geqslant 1$, $m = 1, 2, \ldots$, und $A = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} a_\alpha(x) D^\alpha$, $N(A) = \{0\}$ bewiesen wird. Die Koeffizienten $a_\alpha(x)$ von A unterliegen einer Elliptizitätsbedingung und dürfen zusammen mit ihren partiellen Ableitungen „nicht zu groß" werden. Der Koeffizient $a_0(x)$ stimmt im wesentlichen mit $q(x)^m$ überein. Beide Operatoren werden im Raum $L_2(R_n)$ betrachtet und sind für Funktionen aus $C_0^\infty(R_n)$ definiert. Das Definitionsgebiet kann zu dem Sobolev-Raum mit Gewichtsfunktion $W^{2m}_{2,q(x)}(R_n)$ ausgedehnt werden. Mit Hilfe dieser Ungleichung können bekannte Eigenschaften von Q^m auf A übertragen werden. Als Zwischenergebnis erhält man dabei unter der Annahme, daß sich $q(x)$ für großes $|x|$ wie $|x|^s$, $s > 0$, verhält, eine Aussage über die Zugehörigkeit des Einbettungsoperators von $W^{2m}_{2,q(x)}(R_n)$ in $L_2(R_n)$ zu Klassen von vollstetigen Operatoren $\mathfrak{s}_{q,p}$. Es erweist sich, daß der Umkehroperator A^{-1} genau dann als Integraloperator mit einer Greenschen Funktion $G(x, y) \in L_2(R_n \times R_n)$ (Hilbert-Schmidt-Operator) geschrieben werden kann, wenn die Bedingung $m > \frac{n}{4}\left(1 + \frac{2}{s}\right)$ erfüllt ist. Ist noch