STUDIA MATHEMATICA, T. XLV. (1973)

Über die Halbbeschränktheit und das Spektrum des Operators $(-\Delta)^m + q(x)$

von

E. MÜLLER-PFEIFFER (Erfurt, DDR)

Zusammenfassung. Für das Potential $q(x)$ des elliptischen Differentialoperators $(-\Delta)^m + q(x)$, $m = 1, 2, \ldots$, der zunächst auf der Menge der finiten Funktionen $C_0^\infty(R_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, erklärt ist, werden Bedingungen in Abhängigkeit von m und n für die Halbbeschränktheit und wesentliche Selbstadjungiertheit des Operators angegeben. Weiterhin werden spektrale Eigenschaften der Friedrichsschen Eerweiterung des Operators untersucht, wobei insbesondere Fälle diskutiert werden, wo abzählbar viele bzw. endlich viele negative Eigenwerte endlicher Vielfachheit auftreten. Für spezifische quasibeschränkte Grundgebiete – es sind Gebiete Ω, für welche die Einbettung des Sobolevschen Raumes $\mathring{W}_2^m(\Omega)$ in $L_2(\Omega)$ kompakt ist – ist das Spektrum unter gewissen Bedingungen für das Potential $q(x)$ rein diskret.

Das reelle Potential $q(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R_n$, gehört lokal zum Hilbertraum $L_2(R_n)$ und wird im Satz 1 einer solchen Bedingung unterworfen, daß der (symmetrische) Operator $A = (-\Delta)^m + q(x)$, $D(A) = C_0^\infty(R_n)$, [1] halbbeschränkt nach unten ist. Diese Bedingung, die mit Hilfe der Sobolevschen Einbettungssätze [15] gewonnen wird, ist für $n > 4m$ auch hinreichend für die wesentliche Selbstadjungiertheit von A (Satz 2). Es folgen Betrachtungen darüber, wann das Spektrum des selbstadjungierten Operators $\bar{A}$, der im Falle der wesentlichen Selbstadjungiertheit von A mit dem Abschluß von A übereinstimmt, wie im Falle des Schrödingeroperators für das Wasserstoffatom aus der positiven λ-Halbachse (wesentliches Spektrum) und aus höchstens abzählbar vielen negativen Eigenwerten mit endlicher Vielfachheit besteht, deren einziger möglicher Häufungspunkt der Nullpunkt ist. Im weiteren wird ein Grundgebiet Ω für den Operator A betrachtet, das von spezifischer Art quasibeschränkt ist und den vorangegangenen Überlegungen besonders angepaßt erscheint. Für solche Grundgebiete erweist sich das Spektrum der Friedrichsschen Erweiterung $\bar{A}$ von A, $D(A) = C_0^\infty(\Omega)$, als rein diskret (Satz 4). Wenn das Maß von Ω endlich ist, ergibt sich aus dem Vergleich der quadratischen Formen von $(-\Delta)^m$ und A als Anwendung eines Satzes von Triebel [18] eine Aussage über die Verteilung der Eigenwerte von $\bar{A}$.

(1) $C_0^\infty(R_n)$ bezeichnet die Menge der im euklidischen Raum R_n beliebig oft differenzierbaren und finiten Funktionen.

Der Satz 6 bezieht sich auf ein Resultat von M. Š. Birman: In der Arbeit [2] werden Bedingungen dafür angegeben, daß das Spektrum des Schrödingeroperators auf der negativen λ-Halbachse aus höchstens endlich vielen Eigenwerten besteht. Wenn z.B. $n > 3$ ist, trifft das für die Friedrichssche Erweiterung des Operators $A = -\Delta + q(x)$, $D(A) = C_0^\infty(R_n)$, zu, sofern vom Potential $q(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, gefordert wird, daß $q(x) = o(|x|^{-2})$, $|x| \to \infty$, gilt und $q(x)$ in einer Kugel $K \subset R_n$ zum Banachraum $L_{\frac{n}{2}}(K)$ gehört. Im Satz 6 wird neben der Verallgemeinerung auf $m \geqslant 1$ dazu ergänzt, daß im Falle $\alpha = \dfrac{n}{2m} > 1$ das Verhalten von $q(x)$ für alle $x \in R_n$ durch die Zugehörigkeit zu $L_{2,\mathrm{loc}}(R_n) \cap L_\alpha(R_n)$ beschrieben werden kann, so daß überall im Raum R_n Singularitäten auftreten dürfen. Falls $\alpha > 2$ ist, ist A nach Satz 2 dann überdies wesentlich selbstadjungiert.

Es werden folgende Voraussetzungen gemacht und Bezeichnungen verwendet.

Wie schon bemerkt, sei das Potential $q(x)$ reellwertig und gehöre lokal zum Hilbertraum $L_2(R_n)$, $q(x) \in L_{2,\mathrm{loc}}(R_n)$. $D_j = -i\dfrac{\partial}{\partial x_j}$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_j \geqslant 0$ und ganz, $j = 1, \ldots, n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$.

$$\|u\|_{(2,m;\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|^2_{(\Omega)} + \|u\|^2_{(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{2}}$$

ist die Norm des Sobolevschen Raumes $W_2^m(\Omega)$ [15]. Dabei ist $\Omega \subset R_n$ ein Gebiet, über dessen Rand keine Voraussetzungen gemacht zu werden brauchen, und $\|\cdot\|_{(\Omega)}$ die Norm des Hilbertraumes $L_2(\Omega)$. Im Falle $\Omega = R_n$ setzen wir $\|\cdot\|_{(R_n)} = \|\cdot\|$ und entsprechend für Skalarprodukte $(\cdot,\cdot)_{(R_n)} = (\cdot,\cdot)$ sowie auch $\|\cdot\|_{(2,m;R_n)} = \|\cdot\|_{(2,m)}$. Die Norm des Banachraumes $L_\alpha(\Omega)$ soll mit $\|\cdot\|_{(\alpha,\Omega)}$ bezeichnet werden.

Der Operator A ist symmetrisch; es gilt folgender

Satz 1. *Der Operator $A = (-\Delta)^m + q(x)$, $D(A) = C_0^\infty(R_n)$, ist halbbeschränkt nach unten, wenn das Potential $q(x)$ folgende Voraussetzungen erfüllt:*

1) $n > 2m$:

$$\sup_{x \in R_n} \int_{|x-y| \leqslant r} |q(y)|^{\frac{n}{2m}} dy = o(1), \quad r \to 0. \tag{1}$$

2) $n = 2m$: *Für ein $\alpha > 1$ gilt*

$$\sup_{x \in R_n} \int_{|x-y| \leqslant 1} |q(y)|^\alpha dy < \infty. \tag{2}$$

3) $n < 2m$:

$$\sup_{x \in R_n} \int_{|x-y| \leqslant 1} |q(y)| dy < \infty. \tag{3}$$

Beweis. 1) $n > 2m$: Q_1 sei ein abgeschlossener Würfel der Kantenlänge Eins und $\varkappa > 0$ ein Parameter. Mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung und eines Sobolevschen Einbettungssatzes ([15], Satz S. 72, Bem. S. 73) wird wie folgt abgeschätzt

$$\Big|\int_{Q_1} q(\varkappa x)|u|^2 dx\Big| \leqslant \|q(\varkappa x)\|_{(\frac{n}{2m}, Q_1)} \|u\|^2_{(\frac{2n}{n-2m}, Q_1)} \leqslant M^2 \|q(\varkappa x)\|_{(\frac{n}{2m}, Q_1)} \|u\|^2_{(2,m;Q_1)}.$$

Durch die Variablentransformation $x_j = \varkappa x_j$, $j = 1, \ldots, n$, entsteht die entsprechende Abschätzung für einen Würfel $Q_\varkappa$ der Kantenlänge $\varkappa$,

$$\Big|\int_{Q_\varkappa} q(x)|u|^2 dx\Big| \leqslant M^2 \|q(x)\|_{(\frac{n}{2m}, Q_\varkappa)} \Big(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|^2_{Q_\varkappa} + \varkappa^{-2m}\|u\|^2_{Q_\varkappa}\Big). \tag{4}$$

Wird ein ε, $0 < \varepsilon < 1$, beliebig vorgegeben, so kann nach Voraussetzung (1) $\varkappa = \varkappa_\varepsilon$ so klein gewählt werden, daß in (4) $M^2\|q\|_{(\frac{n}{2m}, Q_{\varkappa_\varepsilon})} \leqslant \varepsilon$ wird für jeden Würfel $Q_{\varkappa_\varepsilon} \subset R_n$. Zerlegt man jetzt den Raum R_n in abzählbar viele Würfel $Q^{(\nu)}_{\varkappa_\varepsilon}$, $\bigcup_{\nu=1}^\infty Q^{(\nu)}_{\varkappa_\varepsilon} = R_n$, so kann die quadratische Form (Au, u), $u \in C_0^\infty(R_n)$, folgenderweise mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes nach unten abgeschätzt werden:

$$(Au, u) \geqslant \sum_{\nu=1}^\infty \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|^2_{(Q^{(\nu)}_{\varkappa_\varepsilon})} + \sum_{\nu=1}^\infty \int_{Q^{(\nu)}_{\varkappa_\varepsilon}} q|u|^2 dx \geqslant -\varepsilon\varkappa_\varepsilon^{-2m}\|u\|^2. \tag{5}$$

Damit ist die Halbbeschränktheit von A bewiesen.

2) $n = 2m$: Jetzt wird unter Verwendung des schon unter 1) benutzten Einbettungssatzes wie folgt abgeschätzt, $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = 1$:

$$\Big|\int_{Q_1} q(\varkappa x)|u|^2 dx\Big| \leqslant \|q(\varkappa x)\|_{(\alpha, Q_1)} \cdot \|u\|^2_{(2\beta, Q_1)} \leqslant M^2 \|q(\varkappa x)\|_{(\alpha, Q_1)} \cdot \|u\|^2_{(2,m;Q_1)}.$$

Durch eine Variablentransformation gewinnt man zu einem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ wie oben eine Abschätzung für einen Würfel $Q_{\varkappa_\varepsilon}$,

$$\Big|\int_{Q_{\varkappa_\varepsilon}} q(x)|u|^2 dx\Big| \leqslant \varepsilon \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|^2_{(Q_{\varkappa_\varepsilon})} + C_\varepsilon \|u\|^2_{(Q_{\varkappa_\varepsilon})}, \tag{6}$$

woraus durch Aneinanderlegen solcher Würfel wieder

$$|(qu, u)| \leqslant \varepsilon\big((-\Delta)^m u, u\big) + C_\varepsilon\|u\|^2, \quad u \in C_0^\infty(R_n),$$

entsteht. Analog wie unter 1) ergibt sich wieder die Halbbeschränktheit von A.

3) $n < 2m$: Aus

$$\Big|\int_{Q_1} q(\varkappa x)|u|^2 dx\Big| \leqslant \max_{x \in Q_1} |u(x)|^2 \cdot \|q(\varkappa x)\|_{(1, Q_1)} \leqslant M^2 \|q(\varkappa x)\|_{(1, Q_1)} \cdot \|u\|^2_{(2,m;Q_1)}$$

folgt wieder durch Variablentransformation die Abschätzung (6), aus der wie oben die Halbbeschränktheit von A folgt. Der Satz ist damit bewiesen.

Bemerkung. Aus dem Beweis ist zu ersehen, daß es im Falle $n > 2m$ ausreicht zu fordern, daß ein $\varkappa_0 > 0$ existiert, so daß für jeden Würfel $Q_{\varkappa_0} \subset R_n$ die Ungleichung

$$\|q\|_{\left(\frac{n}{2m}, Q_{\varkappa_0}\right)} \leqslant M^{-2}$$

besteht. Die Konstante M aus dem Einbettungssatz sei dabei minimal. Entsprechende Bemerkungen könnten weiter unten gemacht werden.

Hinsichtlich der wesentlichen Selbstadjungiertheit von A gilt folgender

Satz 2. *Der Operator* $A = (-\Delta)^m + q(x)$, $D(A) = C_0^\infty(R^n)$, *ist wesentlich selbstadjungiert, wenn das Potential* $q(x)$ *folgende Voraussetzungen erfüllt*:

1) $n > 4m$:

$$\sup_{x \in R_n} \int_{|x-y| \leqslant r} |q(y)|^{\frac{n}{2m}} dy = o(1), \quad r \to 0. \tag{7}$$

2) $n = 4m$: *Für ein* $r > 2$ *gilt*

$$\sup_{x \in R_n} \int_{|x-y| \leqslant 1} |q(y)|^{r} dy < \infty. \tag{8}$$

3) $n < 4m$:

$$\sup_{x \in R_n} \int_{|x-y| \leqslant 1} |q(y)|^{2} dy < \infty. \tag{9}$$

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich mit Hilfe der Einbettungssätze wie der Beweis des Satzes 2 in [11] für den Fall $m = 1$.

Bezeichnet jetzt $\bar{A}$ den Abschluß von A, so gilt bezüglich des Definitionsbereichs $D(\bar{A})$ folgender

Hilfssatz 1. *Wenn das Potential* $q(x)$ *die Voraussetzungen des Satzes* 2 *erfüllt, so sind die Normen* $\|\cdot\|_{(2,2m)}$ *und* $\|A\cdot\| + \|\cdot\|$ *äquivalent; es ist also dann* $D(\bar{A}) = W_2^{2m}(R_n)$. *Für jeden Punkt des wesentlichen Spektrums* ([2]) $C(\bar{A})$ *von* $\bar{A}$ *existiert eine Weylsche Folge* $\{u_\nu(x)\}_{\nu=1,2,\dots}$ [8, S. 7] *mit der Eigenschaft, daß alle Funktionen* $u_\nu(x)$ *in einem beliebig vorgegebenen beschränkten Gebiet* Ω *identisch verschwinden.*

Beweis. Es sei $n > 4m$:

$$\int_{Q_1} q^2(\varkappa x)\,|u|^2 dx \leqslant \Big(\int_{Q_1} |q(\varkappa x)|^{\frac{n}{2m}} dx\Big)^{\frac{4m}{n}} \Big(\int_{Q_1} |u|^{\frac{2n}{n-4m}} dx\Big)^{\frac{n-4m}{n}}$$
$$\leqslant M^2 \|q(\varkappa x)\|^2_{\left(\frac{n}{2m}, Q_1\right)} \|u\|^2_{(2,2m;Q_1)}.$$

([2]) Das wesentliche Spektrum ist die Menge derjenigen Punkte des Spektrums, die keine isolierten Eigenwerte endlicher Vielfachheit sind.

Die Transformation auf einen Würfel $Q_\varkappa$ der Kantenlänge $\varkappa$ ergibt dann

$$\int_{Q_\varkappa} q^2(x)\,|u|^2 dx \leqslant M^2 \|q(x)\|^2_{\left(\frac{n}{2m}, Q_\varkappa\right)} \cdot \Big(\sum_{|\alpha|=2m} \|D^\alpha u\|^2_{(Q_\varkappa)} + \varkappa^{-4m} \|u\|^2_{(Q_\varkappa)}\Big).$$

Ist ein ε, $0 < \varepsilon < 1$, beliebig vorgegeben, so kann wegen (7) durch Wahl eines hinreichend kleinen $\varkappa$ die Abschätzung

$$\|qu\|^2_{(Q_\varkappa)} \leqslant \varepsilon \sum_{|\alpha|=2m} \|D^\alpha u\|^2_{(Q_\varkappa)} + C_\varepsilon \|u\|^2_{(Q_\varkappa)}$$

erreicht werden. Durch Aneinanderlegen solcher Würfel erhält man dann

$$\|qu\|^2 \leqslant \varepsilon \sum_{|\alpha|=2m} \|D^\alpha u\|^2 + C_\varepsilon \|u\|^2, \qquad u \in C_0^\infty(R_n). \tag{10}$$

Auch in den Fällen $4m = n$ und $n < 4m$ verfährt man analog den Abschätzungen im Beweis des Satzes 1.

Mit Hilfe der Fouriertransformation und (10) erhält man jetzt

$$\|u\|^2_{(2,2m)} \leqslant C\big(\|(-\Delta u)^m\|^2 + \|u\|^2\big) \leqslant C\,(\|Au\|^2 + \|qu\|^2 + \|u\|^2)$$
$$\leqslant C\,(\|Au\|^2 + \|u\|^2) + \varepsilon \|u\|^2_{(2,2m)}, \qquad 0 < \varepsilon < 1. \text{ ([3])}$$

So folgt einerseits

$$c_1 \|u\|_{(2,2m)} \leqslant \|Au\| + \|u\|, \qquad c_1 > 0.$$

Andererseits ergibt sich analog

$$\|Au\| + \|u\| \leqslant c_2 \|u\|_{(2,2m)},$$

so daß der erste Teil des Hilfssatzes bewiesen ist. Was die Konstruktion der Weylschen Folge betrifft, so schließt man wie im Beweis des Hilfssatzes 2 in [11].

Da der Operator $\bar{A}$ auf $D(A) = C_0^\infty(R_n)$ eingeschränkt wesentlich selbstadjungiert ist, können die Funktionen $u_\nu(x)$ der Weylschen Folge aus $C_0^\infty(R_n)$ entnommen werden.

Wir untersuchen jetzt das Spektrum des Operators $\bar{A}$.

Satz 3. *Das Potential* $q(x)$ *erfülle die Voraussetzung*

$$\int_{|x-y| \leqslant 1} |q(y)|^{\alpha} dy = o(1), \qquad |x| \to \infty, \tag{11}$$

wobei

$$\alpha \begin{cases} = \dfrac{n}{2m}, & n > 4m, \\ > 2\;, & n = 4m, \\ = 2\;, & n < 4m \end{cases}$$

([3]) Positive Konstanten, deren Größenrelationen für die Abschätzung unwesentlich sind, werden häufig mit C bezeichnet.

ist. Dann ist der Operator $A = (-\Delta)^m + q(x)$, $D(A) = C_0^\infty(R_n)$, *halbbeschränkt nach unten und wesentlich selbstadjungiert. Das wesentliche Spektrum* $C(\bar{A})$ *von* $\bar{A}$ *besteht aus der positiven* λ*-Halbachse,* $C(\bar{A}) = [0, \infty)$. *Die negativen Eigenwerte sind von endlicher Vielfachheit und können sich höchstens bei* $\lambda = 0$ *häufen.*

Beweis. Die wesentliche Selbstadjungiertheit folgt unmittelbar aus Satz 2. Beim Nachweis der Halbbeschränktheit werden verschiedene Fälle unterschieden und die Bedingungen (1)–(3) des Satzes 1 aus (11) mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung abgeleitet. λ sei jetzt ein Punkt des wesentlichen Spektrums und $\{u_\nu\}_{\nu=1,2,\ldots}$ eine zugehörige Weylsche Folge mit den Eigenschaften $u_\nu(x) = C_0^\infty(R_n)$, $\nu = 1, 2, \ldots$, und $(u_\mu, u_\nu) = \delta_{\mu\nu}$ (Kroneckersymbol). Es sei zunächst $n > 4m$. Die Abschätzung (4) wird mit $\varkappa = 1$ für die Funktionen $u_\nu(x)$ verwendet. Wird ein ε, $0 < \varepsilon < 1$, beliebig vorgegeben, so kann nach Hilfssatz 1 wegen (11) die Folge $\{u_\nu(x)\}_{\nu=1,2,\ldots}$ so ausgewählt werden, daß die Abschätzung (5) in der Form

$$(Au_\nu, u_\nu) \geqslant -\varepsilon, \qquad \nu = 1, 2, \ldots,$$

gilt. Da aber (Au_ν, u_ν) gegen λ strebt, kann λ wegen der Willkür bei der Wahl von ε nicht negativ sein. Es gilt also $C(\bar{A}) \subset [0, \infty)$. In den Fällen $4m = n$ und $4m > n$ schließt man mit Hilfe der entsprechenden Abschätzungen aus dem Beweis des Satzes 1 analog.

Um $C(\bar{A}) \supset [0, \infty)$ zu erhalten, verwenden wir ein Kriterium von Glazman ([8], Theorem 10, S. 161). Danach gilt $C(\bar{A}) \supset [0, \infty)$, wenn für eine Folge von unbegrenzt wachsenden Würfeln Q_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, die Beziehung

$$\frac{1}{|Q_\nu|} \int_{Q_\nu} |q(y)|^2 dy = o(1), \qquad \nu \to \infty,$$

besteht. Diese Eigenschaft folgt aber sofort aus (11) für Würfel Q_ν, deren Abstand vom Nullpunkt mit $\nu \to \infty$ gegen Unendlich strebt. Satz 3 ist damit bewiesen.

Im folgenden setzen wir voraus, daß das Potential $q(x)$ lokal wesentlich beschränkt ist, $q(x) \in L_{\mathrm{loc}}^\infty(R_n)$, und daß es außerdem der Bedingung

$$(12) \qquad \int_{|x-y| \leqslant 1} |q(y)|^\beta dy = o(1), \qquad |x| \to \infty,$$

$$\beta \begin{cases} = \dfrac{n}{2m}, & n > 2m, \\ > 1\ , & n = 2m, \\ = 1\ , & n < 2m, \end{cases}$$

genügt. Dann ist A nach Satz 1 halbbeschränkt nach unten, und es kann die Friedrichssche Erweiterung $\bar{A}$ von A konstruiert werden, für deren Definitionsbereich

$$D(\bar{A}) = H_A \cap D(A^*)$$

gilt [20], wobei A^* der zu A adjungierte Operator ist und H_A den energetischen Raum von A bedeutet. Aus den Abschätzungen (4) und (5) folgt, daß für ein hinreichend großes c die Abschätzung

$$c_1 \|u\|^2_{(2,m)} \leqslant \big((A + cE)u, u\big) \leqslant c_2 \|u\|^2_{(2,m)}, \qquad c_1, c_2 > 0, \quad u \in D(A),$$

gilt, so daß der energetische Raum mit dem Sobolevschen Raum $W_2^m(R_n)$ zusammenfällt. Die Funktionen aus $D(A^*)$ liegen lokal in $W_2^{2m}(R_n)$, was aus den Überlegungen in ([12], S. 89) sofort folgt. Wie in [12] schließt man, daß für jeden Punkt λ des wesentlichen Spektrums $C(\bar{A})$ von $\bar{A}$ eine Weylsche Folge $\{u_\nu\}_{\nu=1,2,\ldots}$ existiert, deren Funktionen $u_\nu(x)$ in einem beliebig vorgegebenen beschränkten Gebiet identisch verschwinden. Die Abschätzungen im Beweis des Satzes 1 gelten auch, wenn man $\bar{A}$ an Stelle von A und die Funktionen $u_\nu(x) \in D(\bar{A})$ verwendet. Wir behandeln den Fall $n > 2m$. Es wird in (4), (5) $\varkappa = 1$ gesetzt und ein ε, $0 < \varepsilon < 1$, beliebig vorgegeben. Wenn die Funktionen $u_\nu(x)$ entsprechend so gewählt werden, daß sie in einer hinreichend großen Kugel mit dem Ursprung als Mittelpunkt identisch verschwinden, so gilt wegen (12) die Abschätzung (5) in der Form

$$(\bar{A}u_\nu, u_\nu) \geqslant -\varepsilon, \qquad \nu = 1, 2, \ldots,$$

wenn man noch $(u_\nu, u_{\nu'}) = \delta_{\nu\nu'}$ voraussetzt. Da aber $(\bar{A}u_\nu, u_\nu)$ gegen λ strebt, kann λ nicht negativ sein, da ε beliebig vorgegeben war. Es gilt also $C(\bar{A}) \subset [0, \infty)$. In den beiden anderen Fällen schließt man mit Hilfe der entsprechenden Abschätzungen im Beweis des Satzes 1 analog. Es gilt also folgender

Hilfssatz 2. *Das Potential sei lokal wesentlich beschränkt und erfülle die Bedingung* (12). *Dann ist der Operator* A *halbbeschränkt nach unten, und für das wesentliche Spektrum der Friedrichsschen Erweiterung* $\bar{A}$ *gilt* $C(\bar{A}) \subset [0, \infty)$.

Wir betrachten jetzt ein Gebiet $\Omega \subset R_n$ mit folgender Eigenschaft: Wenn K_x die Einheitskugel im R_n mit x als Mittelpunkt bedeutet, so gelte für das Maß $|\Omega \cap K_x|$ von $\Omega \cap K_x$ die Grenzbeziehung

$$(13) \qquad |\Omega \cap K_x| = o(1), \qquad |x| \to \infty.$$

Insbesondere ist dann Ω quasibeschränkt ([8], S. 160). Für die quadratische Form des Operators

$$A_\Omega = (-\Delta)^m + E, \qquad D(A_\Omega) = C_0^\infty(\Omega),$$

gilt offenbar

$$\|u\|^2_{(2,m;\Omega)} \leqslant (A_\Omega u, u) \leqslant C\|u\|^2_{(2,m;\Omega)}, \qquad u \in C_0^\infty(\Omega),$$

so daß der energetische Raum H_{A_Ω} mit dem Sobolevschen Raum $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$(4) zusammenfällt,

$$H_{A_\Omega} = \overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega).$$

Wir zeigen jetzt, daß das Spektrum der Friedrichsschen Erweiterung $\bar{A}_\Omega$ von A_Ω rein diskret ist. Wir nehmen an, daß $C(\bar{A}_\Omega) \neq \emptyset$ ist, und wählen einen Punkt $\Lambda \in C(\bar{A}_\Omega)$. Dann betrachten wir den Operator

$$A_\Omega - (\Lambda+1)E, \quad D(A_\Omega - (\Lambda+1)E) = C_0^\infty(\Omega),$$

und seine Friedrichssche Erweiterung $\bar{A}_\Omega - (\Lambda+1)E$. Offenbar gehört der Punkt $\lambda = -1$ zu $C(\bar{A}_\Omega - (\Lambda+1)E)$. Denkt man sich die Funktion $q_\Omega(x) = -\Lambda$, $x \in \Omega$, durch Null auf ganz R_n fortgesetzt, so genügt wegen (13) die so fortgesetzte Funktion $q(x)$ der Bedingung (12):

$$\|q\|_{(\beta, K_x)} \leqslant |\Lambda| \cdot |\Omega \cap K_x|^{\frac{1}{\beta}} = o(1), \qquad |x| \to \infty.$$

Deshalb liegt nach Hilfssatz 2 auf der negativen λ-Halbachse kein Punkt des wesentlichen Spektrums von $\bar{A}$ (5). Nach dem Variationsprinzip von Courant gilt dann das gleiche auch für den Operator $\bar{A}_\Omega - (\Lambda+1)E$, womit sich ein Widerspruch ergeben hat. Es ist also $C(\bar{A}_\Omega) = \emptyset$. Damit folgt nach einem Satz von Rellich [13] der

Hilfssatz 3. *Erfüllt des Gebiet Ω die Bedingung* (13), *so ist die Einbettung von $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$ in $L_2(\Omega)$ kompakt, $m = 1, 2, \ldots$*

Dieser Hilfssatz führt zum Beweis des

Satzes 4. *Ω erfülle die Bedingung* (13). *Das Potential $q(x)$ gehöre lokal zu $L_2(\Omega)$, und sein Negativteil $q_-(x) = \min(q(x), 0)$ genüge der Voraussetzung*

$$\int_{\Omega \cap K_x} |q_-(y)|^\beta dy = o(1), \qquad |x| \to \infty, \tag{14}$$

mit

$$\beta \begin{cases} = \dfrac{n}{2m}, & n > 2m, \\ > 1, & n = 2m, \\ = 1, & n > 2m. \end{cases}$$

(4) $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$ entsteht aus $C_0^\infty(\Omega)$ durch Vervollständigung in der $\|\cdot\|_{(2,m;\Omega)}$-Norm.

(5) $\bar{A}$ ist hier die Friedrichssche Erweiterung von $A = (-\Delta)^m + q(x)$, $D(A) = C_0^\infty(R_n)$.

Dann ist das Spektrum der Friedrichsschen Erweiterung $\bar{A}_\Omega$ des Operators $A_\Omega = (-\Delta)^m + q(x)$, $D(A_\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$, rein diskret.

Beweis. Die Funktionen $u \in C_0^\infty(\Omega)$ und $q(x)$ werden durch Null auf ganz R_n fortgesetzt. Wegen (14) sind die Voraussetzungen (1)–(3) des Satzes 1 für $q_-(x)$ erfüllt, so daß die Abschätzungen (4) und (5) für den Operator $A_- = (-\Delta)^m + q_-(x)$ und die Funktionen $u \in C_0^\infty(\Omega)$, die durch Null fortgesetzt sind, gelten. Für ein hinreichend großes c ergibt sich dann daher

$$c_1\|u\|^2_{(2,m;\Omega)} \leqslant \big((A_- + cE)u, u\big)_{(\Omega)} \leqslant c_2\|u\|^2_{(2,m;\Omega)}, \qquad c_1, c_2 > 0, \; u \in C_0^\infty(\Omega),$$

so daß der energetische Raum mit dem Sobolevschen Raum $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$ zusammenfällt. Da nach Hilfssatz 3 die Einbettung von $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$ in $L_2(\Omega)$ kompakt ist, folgt aus dem schon benutzten Satz von Rellich, daß das Spektrum der Friedrichsschen Erweiterung des Operators

$$A_- = (-\Delta)^m + q_-(x), \quad D(A_\infty) = C_0^\infty(\Omega),$$

rein diskret ist. Mit Hilfe des Variationsprinzips von Courant folgt daraus die Behauptung des Satzes.

Korollar. *Ω sei beschränkt, und $q(x)$ gehöre zu $L_{2,\mathrm{loc}}(\Omega) \cap L_\beta(\Omega)$, wobei*

$$\beta \begin{cases} = \dfrac{n}{2m}, & n > 2m, \\ > 1, & n = 2m, \\ = 1, & n < 2m. \end{cases}$$

ist. Dann ist das Spektrum der Friedrichsschen Erweiterung des nach unten halbbeschränkten Operators $A = (-\Delta)^m + q(x)$, $D(A) = C_0^\infty(\Omega)$, rein diskret.

Wenn das Maß $|\Omega|$ von Ω endlich ist, kann mit Hilfe eines Satzes von Triebel ([18], Satz 8) eine Aussage über die Verteilung der Eigenwerte des Operators $\bar{A}$ gemacht werden. Es gilt diesbezüglich folgender

Satz 5. *Es sei $|\Omega| < \infty$, und $q_-(x) = \min(q(x), 0)$ erfülle die Voraussetzungen* (14) *des Satzes* 4. *Dann verteilen sich die Eigenwerte $\lambda_i (i = 1, 2, \ldots)$ der Friedrichsschen Erweiterung $\bar{A}$ des Operators $A = (-\Delta)^m + q(x)$, $D(A) = C_0^\infty(\Omega)$, so, daß $\sum_{i=1}^{\infty}{}' |\lambda_i|^{-r} < \infty$* (6), *$r > \dfrac{n}{2m}$, gilt.*

Beweis. Der Satz ist nach [18] richtig für den Operator $(-\Delta)^m$, $D[(-\Delta)^m] = C_0^\infty(\Omega)$. Aus der im Beweis des Satzes 4 bewiesenen Ab-

(6) $\sum_{i=1}^{\infty}{}' |\lambda_i|^{-r}$ bedutet, daß der Summand $|\lambda_{i_0}|^{-r}$ weggelassen wird, falls $\lambda_{i_0} = 0$ ist.

schätzung

$$c_1 \|u\|^2_{(2,m;\Omega)} \leqslant \big((A_- + cE)u, u\big)_{(\Omega)}, \quad u \in C_0^\infty(\Omega), \; c_1 > 0,$$

folgt

$$c_1 \|u\|^2_{(2,m;\Omega)} \leqslant \big((A + cE)u, u\big)_{(\Omega)},$$

so daß sich aus dem Variationsprinzip von Courant zunächst die Gültigkeit des Satzes für den Operator $\bar{A} + cE$ ergibt. Aus der Konvergenz von $\sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i + c)^{-r}$ folgt dann die Konvergenz von $\sum_{i=1}^{\infty}{}' |\lambda_i|^{-r}$.

Bemerkung. Es sei auf die Folgerungen (vergl. ([18], S. 329) für die Greensche Funktion von $\bar{A} + cE$ hingewiesen, die sich aus der Konvergenz von $\sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i + c)^{-r}$ z.B. in den Fällen $m > \frac{n}{4}$ und $m > \frac{n}{2}$ ergeben.

Das Grundgebiet sei jetzt wieder der gesamte Raum R_n. Es gilt der

Satz 6. *Es sei $n > 2m$ und $q(x) \in L_{2,\mathrm{loc}}(R_n) \cap L_{\frac{n}{2m}}(R_n)$. Dann ist der Operator $A = (-\Delta)^m + q(x)$, $D(A) = C_0^\infty(R_n)$, halbbeschränkt nach unten, und für $n > 4m$ ist er wesentlich selbstadjungiert. Das Spektrum der Friedrichsschen Erweiterung $\bar{A}$ von A setzt sich aus dem wesentlichen Spektrum $C(\bar{A}) = [0, \infty)$ und aus höchstens endlich vielen negativen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ zusammen. Diese Eigenwerte sind von endlicher Vielfachheit.*

Beweis. Aus Satz 1 folgt sofort die Halbbeschränktheit und aus Satz 2 für $n > 4m$ die wesentliche Selbstadjungiertheit. Wir zeigen zunächst, daß auf der negativen λ-Halbachse höchstens endlich viele Eigenwerte liegen. Beim Beweis dieses Sachverhaltes verfolgen wir im wesentlichen die Beweisschritte von M. Š. Birman für den Fall $m = 1$ in [2]. Es sei

$$p(x) = \begin{cases} \max\big(1, |q_-(x)|\big), & |x| \leqslant 1, \\ \max\big(|x|^{-n}, |q_-(x)|\big), & |x| > 1. \end{cases}$$

Dann definiert

$$\|u\|_p = \Big(\int_{R_n} p\,|u|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}$$

eine Norm. Außerdem wird die Norm

$$\|u\|_* = \Big(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|^2 + \int_{|x|\leqslant 1} |u|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}$$

verwendet. Es gilt dann folgender

Hilfssatz 4. *Sind die Voraussetzungen des Satzes 6 erfüllt, so ist jede in der Metrik $\|\cdot\|_*$ beschränkte Menge aus $W_2^m(R_n)$ in der Metrik $\|\cdot\|_p$ relativ kompakt.*

Beweis. Die Abschätzung (4) aus dem Beweis des Satzes 1 gilt auch für die Funktionen $u(x)$ aus $W_2^m(R_n)$. Außerdem kann in (4) für $q(x)$ die Funktion $p(x)$ eingesetzt werden. $\varepsilon(>0)$ sei beliebig vorgegeben. Da $\|p\|_{(\frac{n}{2m}, R_n)} < \infty$ ist, gibt es einen Würfel Q_L der Kantenlänge $L = L(\varepsilon)$ und mit dem Ursprung als Mittelpunkt, so daß für jeden Würfel $Q_\varkappa$, der Q_L nicht schneidet, nach (4) die Abschätzung

$$\int_{Q_\varkappa} p\,|u|^2\,dx \leqslant \varepsilon\Big(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|^2_{(Q_\varkappa)} + \varkappa^{-2m}\|u\|^2_{(Q_\varkappa)}\Big) \tag{15}$$

gilt. Denkt man sich das Äußere des Würfels Q_L von $2n$ Halbräumen H_j, $j = 1, \ldots, 2n$, überdeckt, so folgt aus (15) mit $\varkappa \to \infty$, daß für jeden dieser Halbräume die Abschätzung

$$\int_{H_j} p\,|u|^2\,dx \leqslant \varepsilon \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|^2_{(H_j)}, \quad j = 1, \ldots, 2n,$$

gilt, woraus

$$\int_{R_n \setminus Q_L} p\,|u|^2\,dx \leqslant 2n\varepsilon \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|^2_{(R_n \setminus Q_L)}$$

folgt. Also gilt auch

$$\int_{R_n \setminus Q_L} p\,|u|^2\,dx \leqslant 2n\varepsilon\,\|u\|^2_*, \quad u \in W_2^m(R_n). \tag{16}$$

Zwecks Abschätzung von $\int_{Q_L} p\,|u|^2\,dx$ wird eine Zahl $N > 0$ beliebig angenommen und die Punktmenge

$$\Omega_N = \{x \mid x \in Q_L \text{ und } p(x) \geqslant N\}$$

definiert. Dann gilt

$$\int_{\Omega_N} p\,|u|^2\,dx \leqslant \|p\|_{(\frac{n}{2m}, \Omega_N)} \cdot \|u\|^2_{(\frac{2n}{n-2m}, Q_L)} \leqslant C\,\|p\|_{(\frac{n}{2m}, \Omega_N)} \cdot \|u\|^2_{(2,m;Q_L)}. \tag{17}$$

Nun ist

$$\|u\|^2_{(2,m;Q_L)} \leqslant C\Big(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|^2_{(Q_L)} + \int_{|x|\leqslant 1} |u|^2\,dx\Big). \tag{18}$$

(18) folgt unmittelbar aus dem in ([15], S. 75) dargestellten Beweis für die Äquivalenz der Normen $\|\cdot\|^{(0)}_{W_p^{(l)}}$ und $\|\cdot\|^{(1)}_{W_p^{(l)}}$, wenn man beachtet, daß in der Formel 7.12 ([15], S. 59) die Kugel C, bezüglich deren Punkte der Würfel Q_L sternförmig ist, die Einheitskugel $K_1 = \{x \mid |x| \leqslant 1\}$ sein kann. Mittels (18) folgt aus (17)

$$\int_{\Omega_N} p\,|u|^2\,dx \leqslant C\,\|p\|_{(\frac{n}{2m}, \Omega_N)} \cdot \|u\|^2_*.$$

Wird nun N hinreichend groß gewählt, so erreicht man

$$\int_{\Omega_N} p\,|u|^2\,dx \leqslant \varepsilon\,\|u\|_*^2, \quad u \in W_2^m(R_n). \tag{19}$$

Schließlich ergibt sich nochmals mit Hilfe von (18)

$$\int_{\Omega_L \setminus \Omega_N} p\,|u|^2\,dx \leqslant N\,\|u\|_{(Q_L)}^2 \leqslant N\,\|u\|_{(2,m;Q_L)}^2 \leqslant NC\,\|u\|_*^2. \tag{20}$$

Aus (16), (19) und (20) erhält man insgesamt

$$\int_{R_N} p\,|u|^2\,dx \leqslant C\,\|u\|_*^2, \quad u \in W_2^m(R_n). \tag{21}$$

Die Behauptung des Hilfssatzes folgt jetzt aus den Abschätzungen (16) und (19) und der Vollstetigkeit der Einbettung von $W_2^m(Q_L)$ in $L_2(Q_L)$ ([15], S. 86), die in der Abschätzung (20) wirksam wird.

Der Operator $A_p = (-\Delta)^m - p(x)$, $D(A_p) = C_0^\infty(R_n)$, ist nach Satz 1 halbbeschränkt nach unten, und es gilt $D(\bar{A}_p) \subset W_2^m(R_n)$. Die Annahme, daß der selbstadjungierte Operator $\bar{A}_p$ unendlich viele negative Eigenwerte $\mu_1, \mu_2, \ldots$ besitzt, wird zum Widerspruch geführt. Die den μ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, entsprechenden Eigenfunktionen mögen $u_\nu(x)$ heißen, von denen wir $(u_\nu, u_{\nu'}) = \delta_{\nu\nu'}$ vorraussetzen. Ist $w = \sum_{\nu=1}^{\infty} \omega_\nu u_\nu$ ein Element des durch diese Eigenfunktionen aufgespannten Unterraumes $U \subset L_2(R_n)$, so gilt

$$0 \geqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu_\nu |\omega_\nu|^2 = (\bar{A}_p w, w) \geqslant \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha w\|^2 - (pw, w),$$

woraus

$$\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha w\|^2 \leqslant (pw, w), \quad w \in U, \tag{22}$$

folgt. Wird jetzt die Folge der Eigenfunktionen $\{u_\nu(x)\}_{\nu=1,2,\ldots}$ bezüglich der Metrik $(pu, u)^{\frac{1}{2}}$ orthonormiert, wobei die Folge $\{v_\nu(x)\}_{\nu=1,2,\ldots}$, $(pv_\nu v_{\nu'}) = \delta_{\nu\nu'}$ entstehen möge, so gilt wegen (22)

$$\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha v_\nu\|^2 + (pv_\nu v_\nu) \leqslant 2, \quad \nu = 1, 2, \ldots,$$

woraus sich

$$\|v_\nu\|_* \leqslant \sqrt{2}, \quad \nu = 1, 2, \ldots,$$

ergibt. Die Menge $\{v_\nu\}_{\nu=1,2,\ldots}$ ist daher einerseits in der Metrik $\|\cdot\|_*$ beschränkt, andererseits aber in der Metrik $(pu, u)^{\frac{1}{2}}$ nicht relativ kompakt, was nach dem Hilfssatz 4 nicht sein kann. Es kann also nur endlich viele negative Eigenwerte von $\bar{A}_p$ geben. Mit Hilfe des Variationsprinzips von Courant folgt, daß auch $\bar{A}$ nur endlich viele negative Eigenwerte besitzen kann, die überdies von endlicher Vielfachheit sein müssen.

Es bleibt $C(\bar{A}) = [0, \infty)$ zu zeigen. Dies folgt aus einem Satz aus der Störungstheorie quadratischer Formen. Die quadratische Form

$$B[u, u] = \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|^2 + \|u\|^2 = \|u\|_{(2,m)}^2$$

ist positiv definit und abgeschlossen auf $W_2^m(R_n)$.

$$G[u, u] = \int_{R_n} |q|\,|u|^2\,dx$$

definiert eine Halbmetrik mit den Eigenschaften:

1) $D[B] = W_2^m(R_n) \subset D[G]$ (7) und $G[u, u] \leqslant C\,\|u\|_{(2,m)}^2$, $u \in W_2^m(R_n)$. Das folgt aus der Abschätzung (21) mit $|q(x)|$ für $p(x)$.

2) Eine in der Metrik $\|\cdot\|_{(2,m)}$ beschränkte Menge ist in der Metrik $G[\cdot, \cdot]$ relativ kompakt. Das entnimmt man dem Beweis des Hilfssatzes 4.

3) $\left|\int_{R_n} q(x)\,|u|^2\,dx\right| \leqslant G[u, u]$, $u \in W_2^m(R_n)$.

Die Form (qu, u) ist somit relativ vollstetig bzgl. der Metrik $\|\cdot\|_{(2,m)}$. Die die Formen $B[u, u]$ und $B[u, u] + (qu, u)$ erzeugenden Operatoren

$$B = (-\Delta)^m + E, \quad D(B) = W_2^m(R_n) \quad \text{und } B_q,\ D(B_q) \subset W_2^m(R_n)$$

besitzen das gleiche wesentliche Spektrum, $C(B) = C(B_q) = [1, \infty)$. Für das wesentliche Spektrum des uns interessierenden Operators $\bar{A}$ gilt offenbar dann $C(\bar{A}) = [0, \infty)$. Damit ist der Satz 6 vollständig bewiesen.

Bemerkung. Die Sätze 1, 2, 4 und 5 bleiben gültig, wenn man $(-\Delta)^m$ durch den formalen elliptischen Operator

$$T = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

mit folgenden Eigenschaften ersetzt [3]:

1) Die Koeffizienten $a_\alpha(x)$ sind im Raum R_n meßbare und beschränkte Funktionen, $|\alpha| \leqslant 2m$.

2) Die Koeffizienten von höchster Ordnung ($|\alpha| = 2m$) sind gleichmäßig stetig.

3) Es gilt

$$\sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x)\,\xi^\alpha \geqslant c_0\,|\xi|^{2m}, \quad c_0 > 0, \quad x \in R_n,$$

(7) $D[B]$ und $D[G]$ sind die Definitionsbereiche von $B[u, u]$ und $G[u, u]$.

für jeden reellen Vektor $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Dabei ist

$$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n} \quad \text{und} \quad |\xi|^{2m} = (\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2)^m.$$

4) T ist formal selbstadjungiert.

Es gilt die a-priori Abschätzung ([3], Theorem 2)

$$\|u\|^2_{(2,2m)} \leqslant C(\|Tu\|^2 + \|u\|^2), \quad u \in C_0^\infty(R_n),$$

und die Gårdingsche Ungleichung ([3], Theorem 16)

$$(Tu, u) \geqslant c_1 \|u\|^2_{(2,m)} - c_2 \|u\|^2, \quad c_1 > 0,\ c_2 \geqslant 0,\ u \in C_0^\infty(R_n).$$

Mit Hilfe dieser Ungleichungen und der Abschätzungen aus den Beweisen der Sätze 1, 2, 4, 5 sowie unter Verwendung des Variationsprinzips von Courant folgt dann leicht die Behauptung dieser Bemerkung.

Literatur

[1] E. Balslev, *The singular spectrum of elliptic differential operators in $L^p(R_n)$*, Math. Scand. 19 (1966), S. 193–210.
[2] M. Š. Birman, *O čisle sobstvennych značenij v zadače kvantovogo rassejanija*, Vestnik LGU No. 13 ser. mat. mech. i astron. No. 3 (1961), S. 163–166.
[3] F. E. Browder, *On the spectral theory of elliptic differential operators I*, Math. Ann. 142 (1961), S. 22–130.
[4] C. Clark, *On the continuous spectrum of a differential operator*, Arch. Rational Mech. Anal. 21 (1966), S. 163–168.
[5] N. Dunford and I. T. Schwartz, *Linear operators II*, New York, London 1963.
[6] M. S. P. Eastham, *Conditions for the spectrum in eigenfunction theory to be bounded below and discrete for $\lambda < 0$*, J. London Math. Soc. 42 (1967), S. 672–678.
[7] — *Conditions for the spectrum in eigenfunction theory to be bounded below and discrete for $\lambda < 0$ II*, J. London Math. Soc. 44 (1969), S. 177–182.
[8] I. M. Glazman, *Direct methods of qualitative spectral analysis of singular differential operators*, Jerusalem 1965.
[9] G. Hellwig, *Differentialoperatoren der mathematischen Physik* Berlin, Göttingen, Heidelberg 1964.
[10] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Berlin, Heidelberg, New York 1966.
[11] E. Müller-Pfeiffer, *Über die Lokalisierung des wesentlichen Spektrums des Schrödingeroperators*, Math. Nachr. 46 (1970), S. 157–170.
[12] — *Über das wesentliche Spektrum elliptischer Differentialoperatoren*, Math. Nachr. 47 (1970), S. 87–100.
[13] F. Rellich, *Halbbeschränkte gewöhnliche Differentialoperatoren zweiter Ordnung*, Math. Ann. 122 (1951), S. 343–368.
[14] M. Schechter, *On the invariance of the essential spectrum of an arbitrary operator II*, Ricerche Mat. 16 (1967), S. 3–26.
[15] S. L. Sobolev, *Einige Anwendungen der Funktionalanalysis auf Gleichungen der mathematischen Physik*, Berlin 1964.

[16] H. Stetkaer-Hansen, *A generalisation of a theorem of Wienholtz concerning essential selfadjointness of singular elliptic operators*, Math. Scand. 19 (1966), S. 108–112.
[17] F. Stummel, *Singuläre elliptische Differentialoperatoren in Hilbertschen Räumen*, Math. Ann. 132 (1956), S. 150–176.
[18] H. Triebel, *Differenzierbarkeitseigenschaften Greenscher Funktionen elliptischer Differentialoperatoren*, Math. Zeitschr. 90 (1965), S. 325–338.
[19] E. Wienholtz, *Halbbeschränkte partielle Differentialoperatoren zweiter Ordnung vom elliptischen Typus*, Math. Ann. 135 (1958), S. 50–80.
[20] K. Yosida, *Functional analysis*, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1965.

Received September 7, 1971 (328)