PODSTAWOWE DEFINICJE I FAKTY

Definicja 1. Rodzinę zbiorów $\mathcal{I}$ podzbiorów ustalonego zbioru X nazywamy σ-ideałem (właściwym i niegłównym), gdy:

(1) $A \subseteq B \wedge B \in \mathcal{I} \longrightarrow A \in \mathcal{I}$,
(2) $\forall n \in \mathbb{N} \ A_n \in \mathcal{I} \longrightarrow \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{I}$,
(3) $X \notin \mathcal{I}$,
(4) $\forall x \in X \ \{x\} \in \mathcal{I}$.

Rodzinę $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{I}$ nazwiemy bazą σ-ideału $\mathcal{I}$, gdy

$$\forall A \in \mathcal{I} \ \exists B \in \mathcal{B} \ A \subseteq B.$$

Przykład 1. *Następujące rodziny są σ-ideałami podzbiorów $\mathbb{R}$:*

- *rodzina $\mathcal{N}$ złożona ze zbiorów miary Lebesgue'a zero; rodzina zbiorów miary zero typu G_δ jest bazą $\mathcal{N}$,*
- *rodzina $\mathcal{M}$ złożona ze zbiorów pierwszej kategorii Baire'a (tzn. przeliczalnych sum zbiorów nigdziegęstych); rodzina zbiorów brzegowych typu F_σ jest bazą $\mathcal{M}$.*

Definicja 2. Zbiór ma $X \subseteq \mathbb{R}$ ma własność Baire'a, gdy należy do najmniejszego σ-ciała zawierającego *Bor* i $\mathcal{M}$.

Równoważnie, $X \triangle U \in \mathcal{M}$ dla pewnego zbioru otwartego U.

Definicja 3. Zbiór doskonały to zbiór domknięty, niepusty, bez punktów izolowanych.

Definicja 4. Zbiór $B \subseteq \mathbb{R}$ jest zbiorem Bernsteina, jeżeli ani B ani $\mathbb{R} \setminus B$ nie zawiera zbioru doskonałego.

Fakt 1. *Istnieje zbiór Bernsteina $B \subseteq \mathbb{R}$.*

Definicja 5. Zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ jest

- analityczny ($A \in \mathbf{\Sigma}_1^1$), jeżeli jest ciągłym obrazem zbioru borelowskiego,
- koanalityczny ($A \in \mathbf{\Pi}_1^1$), jeżeli $\mathbb{R} \setminus A$ jest analityczny.

Twierdzenie 2 (Łuzin–Sierpiński). *Każdy zbiór analityczny jest mierzalny w sensie Lebesgue'a i ma własność Baire'a.*

Twierdzenie 3 (Suslin). *Każdy nieprzeliczalny zbiór analityczny zawiera zbiór doskonały.*