Zbiory niemierzalne
i algebraiczna struktura prostej rzeczywistej

Marcin Kysiak

Konwersatorium dla doktorantów,
3. grudnia 2004

Twierdzenie. **(„Tw. Czterech Polaków”, 1976)** *Jeżeli $\mathcal{A}$ jest taką rodziną parami rozłącznych zbiorów miary Lebesgue'a zero, że $\bigcup \mathcal{A} = [0,1]$, to istnieje podrodzina $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ taka, że $\bigcup \mathcal{A}'$ jest zbiorem niemierzalnym.*

Twierdzenie. **(Cichoń–Szczepaniak, 2003)** *Jeżeli B jest kulą jednostkową w $\mathbb{R}^2$, a $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ izomorfizmem liniowym $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}$ jako przestrzeni liniowych nad $\mathbb{Q}$, to $f[B]$ jest zbiorem niemierzalnym.*

Twierdzenie. **(Sierpiński, 1920)** *Istnieją zbiory miary Lebesgue'a zero $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ takie, że zbiór*

$$X + Y = \{x + y : x \in X, y \in Y\}$$

jest niemierzalny.

Twierdzenie. **(Cichoń–Morayne–Rałowski–Ryll-Nardzewski, 2001)** *Istnieje taki podzbiór T zbioru Cantora $C \subseteq [0, 1]$, że zbiór $T + C$ jest niemierzalny.*

Twierdzenie. **(Ciesielski–Fejzić–Freiling, 2001)** *Jeżeli $A \subseteq \mathbb{R}$ ma tę własność, że $A + A$ nie jest miary zero, to istnieje zbiór $X \subseteq A$ taki, że $X + X$ jest zbiorem niemierzalnym.*

Definicja. *Rodzinę $\mathcal{I}$ podzbiorów $\mathbb{R}$ nazwiemy σ-ideałem, jeżeli*

- $A \subseteq B \in \mathcal{I} \longrightarrow A \in \mathcal{I}$,
- $\forall n \in \mathbb{N} \;\; A_n \in \mathcal{I} \longrightarrow \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{I}$,
- $\mathbb{R} \notin \mathcal{I}$,
- $\forall x \in \mathbb{R} \;\; \{x\} \in \mathcal{I}$.

σ-ideał $\mathcal{I}$ jest niezmienniczy ze względu na przesunięcia, gdy

- $\forall A \in \mathcal{I} \;\; \forall t \in \mathbb{R} \;\; t + A = \{t + a : a \in A\} \in \mathcal{I}$.

Dwa ważne σ-ideały:

- rodzina $\mathcal{N}$ zbiorów miary Lebesgue'a zero,
- rodzina $\mathcal{M}$ zbiorów pierwszej kategorii Baire'a.

Dwa ważne σ-ciała:

- rodzina $\mathcal{LM}$ zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a,
- rodzina $\mathcal{BP}$ zbiorów z własnością Baire'a.

Stwierdzenie. *Istnieją zbiory* $X, Y \in \mathcal{M}$ *takie, że* $X + Y \notin \mathcal{BP}$.

Definicja. *Niech* $\mathcal{A}$ *będzie* σ*-ciałem podzbiorów* $\mathbb{R}$*, a* $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{A}$ *–* σ*-ideałem. Powiemy, że para* $\langle \mathcal{A}, \mathcal{I} \rangle$ *ma własność c.c.c., jeżeli każda rodzina zbiorów parami rozłącznych należących do* $\mathcal{A} \setminus \mathcal{I}$ *jest przeliczalna.*

Fakt. *Pary* $\langle \mathcal{LM}, \mathcal{N} \rangle$ *oraz* $\langle \mathcal{BP}, \mathcal{M} \rangle$ *mają własność c.c.c..*

Twierdzenie. **(Kharazishvili, 1996)** *Jeżeli para* $\langle \mathcal{A}, \mathcal{I} \rangle$ *ma własność c.c.c., to następujące warunki są równoważne:*

1. $\exists X, Y \in \mathcal{I} \;\; X + Y \notin \mathcal{I}$,

2. $\exists X \in \mathcal{I} \;\; X + X \notin \mathcal{I}$,

3. $\exists X, Y \in \mathcal{I} \;\; X + Y \notin \mathcal{A}$,

4. $\exists X \in \mathcal{I} \;\; X + X \notin \mathcal{A}$.

Twierdzenie. (Cichoń–Jasiński, 2001) *Jeżeli σ-ideał $\mathcal{I}$ ma bazę złożoną ze zbiorów koanalitycznych, a $\mathcal{A} = Bor[\mathcal{I}]$, to następujące warunki są równoważne:*

1. $\exists X, Y \in \mathcal{I} \;\; X + Y \notin \mathcal{I}$,

2. $\exists X \in \mathcal{I} \;\; X + X \notin \mathcal{I}$,

3. $\exists X, Y \in \mathcal{I} \;\; X + Y \notin \mathcal{A}$,

4. $\exists X \in \mathcal{I} \;\; X + X \notin \mathcal{A}$.

Definicja. *Zbiorem doskonałym nazywamy każdy zbiór* $P \subseteq \mathbb{R}$ *domknięty, niepusty, bez punktów izolowanych.*

Definicja. *Powiemy, że para* $\langle \mathcal{A}, \mathcal{I} \rangle$ *ma własność zbioru doskonałego, jeżeli każdy zbiór* $X \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{I}$ *zawiera zbiór doskonały.*

Twierdzenie. *Jeżeli para $\langle \mathcal{A}, \mathcal{I} \rangle$ ma własność zbioru doskonałego, to:*

- *dla dowolnego zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$ o tej własności, że $A + A \notin \mathcal{I}$ istnieje zbiór $X \subseteq A$ taki, że $X + X \notin \mathcal{A}$,*

- *dla dowolnych zbiorów $A, B \subseteq \mathbb{R}$ o tej własności, że $A + B \notin \mathcal{I}$ istnieją zbiory $X \subseteq A, Y \subseteq B$ takie, że $X + Y \notin \mathcal{A}$.*

Wniosek. *Jeżeli para* $\langle\mathcal{A},\mathcal{I}\rangle$ *ma własność zbioru doskonałego, to następujące warunki są równoważne:*

1. $\exists X,Y\in\mathcal{I}\ \ X+Y\notin\mathcal{I}$,

2. $\exists X\in\mathcal{I}\ \ X+X\notin\mathcal{I}$,

3. $\exists X,Y\in\mathcal{I}\ \ X+Y\notin\mathcal{A}$,

4. $\exists X\in\mathcal{I}\ \ X+X\notin\mathcal{A}$.

Definicja. *Zbiór $B \subseteq \mathbb{R}$ nazywamy zbiorem Bernsteina, gdy dla dowolnego zbioru doskonałego $P \subseteq \mathbb{R}$ mamy*

$$P \cap B \neq \emptyset \ \wedge \ P \not\subseteq B.$$

Lemat. *Istnieje podgrupa G grupy addytywnej $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ taka, że*

- $|\mathbb{R}/G| = \aleph_0$,

- *G jest zbiorem Bernsteina.*

Zakładając $A + A \notin \mathcal{I}$, skonstruujemy $X \subseteq A$ taki, że $X + X \notin \mathcal{A}$.

- Niech $\{T_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{R}/G$ oraz $A_n = A \cap T_n$.
- $A + A = \bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} A_n + A_m$.
- $\exists n, m \in \mathbb{N} \;\; A_n + A_m \notin \mathcal{I}$.
- Niech $X = A_n \cup A_m$. Wtedy $X \subseteq A$ i $X + X \notin \mathcal{I}$.

- $X + X$ przecina co najwyżej trzy warstwy G.
- suma skończenie wielu warstw G jest zbiorem Bernsteina.
- $X + X \notin \mathcal{I}$, ale nie zawiera zbioru doskonałego.
- $X + X \notin \mathcal{A}$.

$\square$

Przykład. *Własność zbioru doskonałego mają:*

- $\langle \mathcal{LM}, \mathcal{N} \rangle$,
- $\langle \mathcal{BP}, \mathcal{M} \rangle$,
- $\langle Bor, [\mathbb{R}]^{\leqslant \aleph_0} \rangle$,
- $\langle \mathcal{A}, \mathcal{I} \rangle$, *gdzie* $\mathcal{I}$ *jest* σ*-ideałem o bazie koanalitycznej, a* $\mathcal{A} = Bor[\mathcal{I}]$.

Definicja. *Zbiór $X \subseteq \mathbb{R}$ jest*

- *zbiorem mierzalnym w sensie Marczewskiego ($X \in (s)$), gdy dla dowolnego zbioru doskonałego $P \subseteq \mathbb{R}$ istnieje zbiór doskonały $Q \subseteq P$ taki, że $Q \subseteq X$ lub $Q \cap X = \emptyset$,*

- *zbiorem Marczewskiego-zero ($X \in (s_0)$), gdy dla dowolnego zbioru doskonałego $P \subseteq \mathbb{R}$ istnieje zbiór doskonały $Q \subseteq P$ taki, że $Q \cap X = \emptyset$.*

Stwierdzenie. *Para $\langle (s), (s_0) \rangle$ ma własność zbioru doskonałego.*

Fakt. *Ideał (s_0) nie ma bazy koanalitycznej, a para $\langle (s), (s_0) \rangle$ nie ma własności c.c.c..*

Pokazaliśmy, że

$$A + A \notin \mathcal{N} \longrightarrow \exists X \subseteq A \ \ X + X \notin \mathcal{LM}.$$

Czy zawsze można uzyskać taki zbiór X miary zero?

Nie!

Definicja. *Zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ jest zbiorem Sierpińskiego, gdy $|A| \geqslant \aleph_1$, ale $\forall N \in \mathcal{N} \ \ |N \cap A| \leqslant \aleph_0$.*

Fakt. *Przy założeniu Hipotezy Continuum istnieje zbiór Sierpińskiego $A \subseteq \mathbb{R}$ taki, że $A + A = \mathbb{R}$.*

Twierdzenie.

- *Jeżeli zbiór* $A \subseteq \mathbb{R}$ *jest mierzalny oraz* $A + A \notin \mathcal{N}$, *to istnieje zbiór miary zero* $X \subseteq A$ *taki, że* $X + X$ *jest niemierzalny,*

- *Jeżeli* $A \subseteq \mathbb{R}$ *ma własność Baire'a oraz* $A + A \notin \mathcal{M}$, *to istnieje zbiór pierwszej kategorii* $X \subseteq A$ *taki, że* $X + X$ *nie ma własności Baire'a.*

Twierdzenie. (Erdős–Stone, Rogers, 1970) *Istnieje zbiór borelowski $A \subseteq \mathbb{R}$ taki, że $A + A \notin \mathcal{B}or$.*

Stwierdzenie. *Dla dowolnego zbioru nieprzeliczalnego $A \subseteq \mathbb{R}$ istnieje zbiór $X \subseteq A$ taki, że $X + X \notin \mathcal{B}or$.*

Czy można żądać, żeby X był zbiorem borelowskim, jeżeli A jest borelowski?

Nie!

Twierdzenie. *Istnieje doskonały zbiór zwarty $P \subseteq \mathbb{R}$ taki, że dla dowolnych zbiorów borelowskich $A, B \subseteq P$ zbiór $A + B$ jest borelowski.*

Problem 1 *Czy jeżeli* $\mathcal{A}$ *jest taką rodziną parami rozłącznych zbiorów miary Lebesgue'a zero, że* $\bigcup \mathcal{A} = [0,1]$, *to istnieje podrodzina* $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ *taka, że* $\lambda_*(\bigcup \mathcal{A}') = 0$, *a* $\lambda^*(\bigcup \mathcal{A}') = 1$*?*

Problem 2 *Czy dla każdego zbioru doskonałego* $P \subseteq \mathbb{R}$ *miary zero takiego, że* $P + P$ *jest miary dodatniej istnieje zbiór* $T \subseteq P$ *taki, że* $T + P$ *jest niemierzalny?*

Problem 3 *Czy jeżeli* $P \subseteq \mathbb{R}$ *jest zbiorem doskonałym, a* $A \subseteq \mathbb{R}$ *jest zbiorem mierzalnym miary dodatniej, to istnieją zbiory miary zero* $X \subseteq P$ *oraz* $Y \subseteq A$ *takie, że zbiór* $X + Y$ *jest niemierzalny?*