Daniel Wilczak

# Geometryczna metoda dowodzenia istnienia bifurkacji heteroklinicznych i homoklinicznych oraz chaosu z zastosowaniem do układu Michelsona.

**Warszawa, 2006**

© 2006 D.Wilczak

# 1. Arytmetyka przedziałowa.

- $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.
- $\mathbb{I} := \{[a,b] : a,b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$ - zbiór wszystkich przedziałów w $\mathbb{R}$.
- $\overline{\mathbb{I}} := \{[a,b] : a,b \in \overline{\mathbb{R}}, a \leq b\}$ - zbiór wszystkich przedziałów w $\overline{\mathbb{R}}$.

Arytmetyka przedziałowa.
Przedziałowa metoda . . .
Relacje nakrywające.


© 2006 D.Wilczak

# 1. Arytmetyka przedziałowa.

- $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.
- $\mathbb{I} := \{[a,b] : a,b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$ - zbiór wszystkich przedziałów w $\mathbb{R}$.
- $\overline{\mathbb{I}} := \{[a,b] : a,b \in \overline{\mathbb{R}}, a \leq b\}$ - zbiór wszystkich przedziałów w $\overline{\mathbb{R}}$.

Rozszerzamy operacje $+, -, \cdot, /$ na przedziały. Dla $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{I}$ oraz pewnego działania $\diamond \in \{+, -, \cdot, /\}$ określamy

$$\mathbf{a} \diamond \mathbf{b} := \{x \diamond y : x \in \mathbf{a}, y \in \mathbf{b}\}.$$

Zakładamy dodatkowo, że jeśli $\diamond = /$ to $0 \notin \mathbf{b}$ (czyli nie dzielimy przez przedziały zawierające zero).

# 1. Arytmetyka przedziałowa.

- $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.
- $\mathbb{I} := \{[a,b] : a,b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$ - zbiór wszystkich przedziałów w $\mathbb{R}$.
- $\overline{\mathbb{I}} := \{[a,b] : a,b \in \overline{\mathbb{R}}, a \leq b\}$ - zbiór wszystkich przedziałów w $\overline{\mathbb{R}}$.

Rozszerzamy operacje $+, -, \cdot, /$ na przedziały. Dla $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{I}$ oraz pewnego działania $\diamond \in \{+, -, \cdot, /\}$ określamy

$$\mathbf{a} \diamond \mathbf{b} := \{x \diamond y : x \in \mathbf{a}, y \in \mathbf{b}\}.$$

Zakładamy dodatkowo, że jeśli $\diamond = /$ to $0 \notin \mathbf{b}$ (czyli nie dzielimy przez przedziały zawierające zero).

**Uwaga:**

Do wyznaczania wartości elementarnych operacji arytmetycznych na przedziałach wystarczy policzyć wynik operacji arytmetycznej dla końców tego przedziału.



© 2006 D.Wilczak

**Przykład 1** *Wyznaczymy wartość funkcji* $\mathbf{x}^2 - 2\mathbf{x} - 1$ *na przedziale* $\mathbf{x} = [-1, 1]$ *na trzy różne sposoby.*

Zgodnie z zasadami obliczeń w arytmetyce przedziałowej otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^2 - 2\mathbf{x} - 1 &= [-1,1]^2 - 2[-1,1] - 1 \\ &= [0,1] - [-2,2] - 1 = [-2,3] - 1 = [-3,2] \end{aligned}$$

© 2006 D.Wilczak

**Przykład 1** *Wyznaczymy wartość funkcji* $\mathbf{x}^2 - 2\mathbf{x} - 1$ *na przedziale* $\mathbf{x} = [-1, 1]$ *na trzy różne sposoby.*

Zgodnie z zasadami obliczeń w arytmetyce przedziałowej otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^2 - 2\mathbf{x} - 1 &= [-1,1]^2 - 2[-1,1] - 1 \\ &= [0,1] - [-2,2] - 1 = [-2,3] - 1 = [-3,2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\mathbf{x} - 2) - 1 &= [-1,1] * ([-1,1] - 2) - 1 \\ &= [-1,1] * [-3,-1] - 1 = [-3,3] - 1 = [-4,2] \end{aligned}$$

**Przykład 1** *Wyznaczymy wartość funkcji* $\mathbf{x}^2 - 2\mathbf{x} - 1$ *na przedziale* $\mathbf{x} = [-1, 1]$ *na trzy różne sposoby.*

Zgodnie z zasadami obliczeń w arytmetyce przedziałowej otrzymujemy

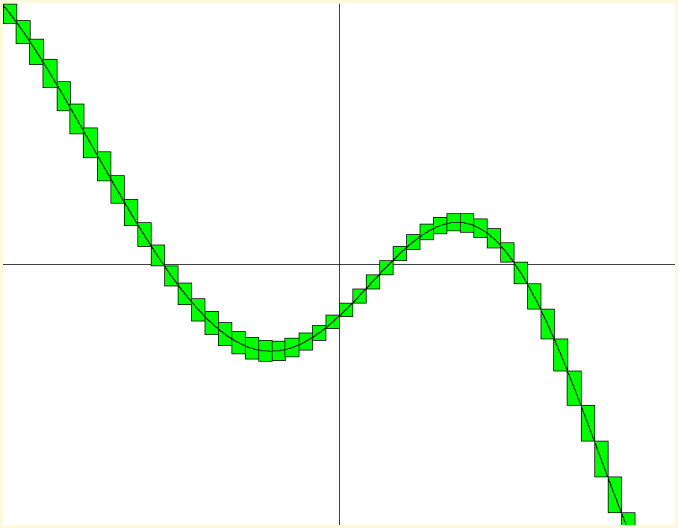
$$\begin{aligned} \mathbf{x}^2 - 2\mathbf{x} - 1 &= [-1,1]^2 - 2[-1,1] - 1 \\ &= [0,1] - [-2,2] - 1 = [-2,3] - 1 = [-3,2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\mathbf{x} - 2) - 1 &= [-1,1] * ([-1,1] - 2) - 1 \\ &= [-1,1] * [-3,-1] - 1 = [-3,3] - 1 = [-4,2] \end{aligned}$$

$$(\mathbf{x} - 1)^2 - 2 = ([-1,1] - 1)^2 - 2 = ([-2,0])^2 - 2 = [0,4] - 2 = [-2,2]$$

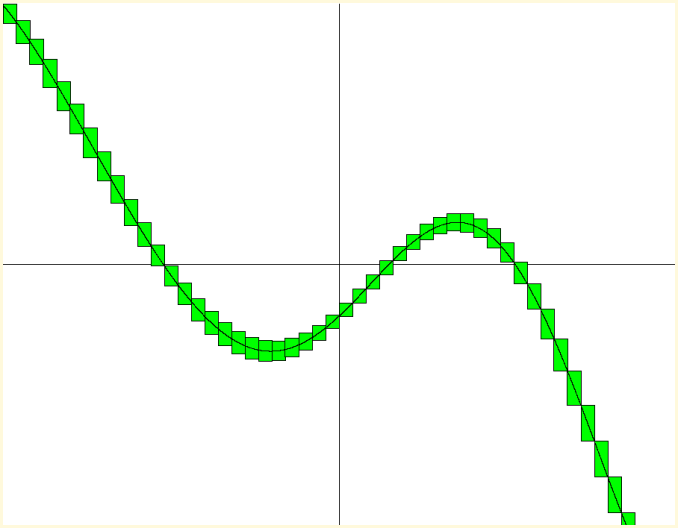
© 2006 D.Wilczak

# Oszacowanie wartości funkcji



Zobacz program w C++.

# Oszacowanie wartości funkcji



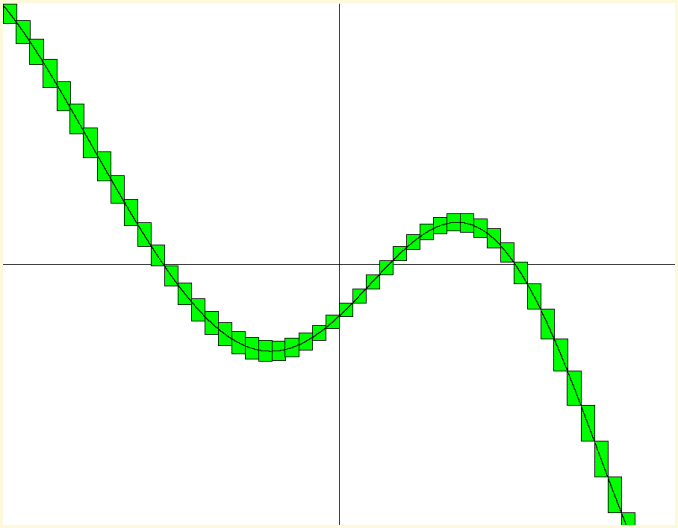
Zobacz program w C++.

**Twierdzenie 1** *(Własność Darboux) Jeśli* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *jest ciągła, to przyjmuje wszystkie wartości pośrednie pomiędzy* $f(a)$ *oraz* $f(b)$.

Arytmetyka przedziałowa.
Przedziałowa metoda . . .
Relacje nakrywające.


© 2006 D.Wilczak

# Oszacowanie wartości funkcji



Zobacz program w C++.

**Twierdzenie 1** *(Własność Darboux) Jeśli* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *jest ciągła, to przyjmuje wszystkie wartości pośrednie pomiędzy* $f(a)$ *oraz* $f(b)$.

**Uwaga:** Przy pomocy komputera i arytmetyki przedziałowej możemy **udowodnić**, że pewna funkcja ma miejsce zerowe.

# 2. Przedziałowa metoda Newtona.

Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie klasy $\mathcal{C}^1$. Dla $U \subset \mathbb{R}^n$ oraz $x_0 \in U$ określamy **przedziałowy operator Newtona**

$$N(f, x_0, U) = x_0 - (Df(U))^{-1} \cdot f(x_0)$$

Arytmetyka przedziałowa.
Przedziałowa metoda . . .
Relacje nakrywające.


© 2006 D.Wilczak

# 2. Przedziałowa metoda Newtona.

Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie klasy $\mathcal{C}^1$. Dla $U \subset \mathbb{R}^n$ oraz $x_0 \in U$ określamy **przedziałowy operator Newtona**

$$N(f, x_0, U) = x_0 - (Df(U))^{-1} \cdot f(x_0)$$

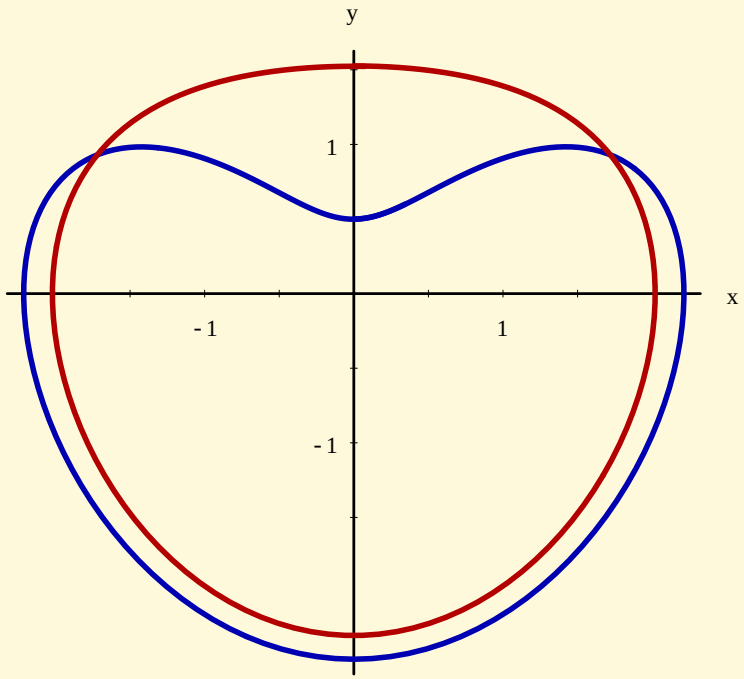
**Twierdzenie 2** *(przedziałowa metoda Newtona)*

*Jeżeli $U$ jest zwarty i wypukły oraz $N(f, x_0, U) \subset U$, to istnieje dokładnie jeden $x^* \in U$ taki, że $f(x^*) = 0$.*

**Twierdzenie 3** *(W.C. Troy, 1989) Dla parametru* $c = 1$ *równanie*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = c^2 - y - \frac{1}{2}x^2 \end{cases} \tag{1}$$

*ma co najmniej dwa rozwiązania okresowe.*





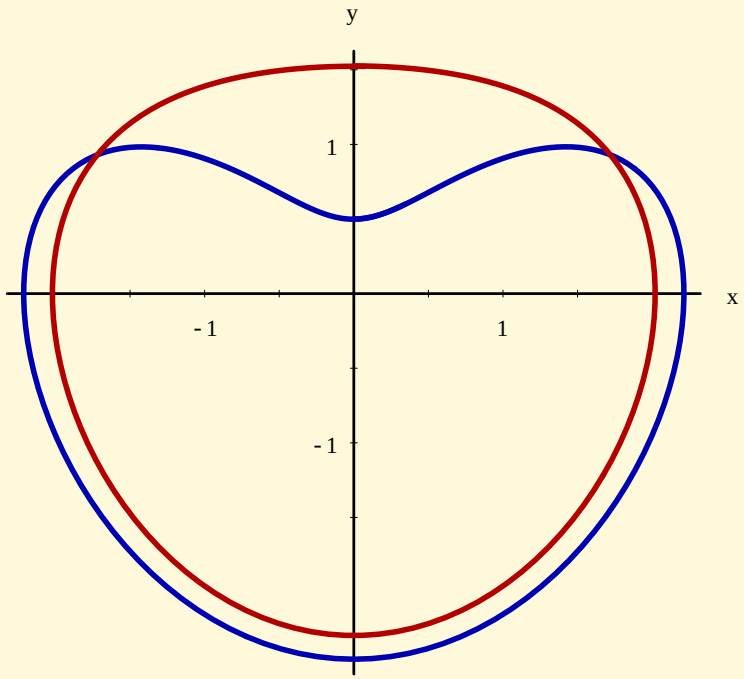


© 2006 D.Wilczak

**Twierdzenie 3** *(W.C. Troy, 1989) Dla parametru* $c = 1$ *równanie*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = c^2 - y - \frac{1}{2}x^2 \end{cases} \tag{1}$$

*ma co najmniej dwa rozwiązania okresowe.*




**Dowód wspierany kalkulatorem.**

# Przykład zastosowania metody Newtona.

Rozważmy sekcję Poincarégo $\Theta = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x, y, \in \mathbb{R}, y > 0\}$

Zobacz program w C++.

© 2006 D.Wilczak

# Przykład zastosowania metody Newtona.

Rozważmy sekcję Poincarégo $\Theta = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x, y, \in \mathbb{R}, y > 0\}$

Zobacz program w C++.

Określamy $U = [-0.0001, 0.0001] \times [1.525, 1.527]$, oraz $x_0 = (0, 1.526)$ oraz funkcję $F = P - \mathrm{Id}|_\Theta$.

**Lemat 4** *(wspierany komputerowo) Odwzorowanie Poincarégo $P : \Theta \multimap \Theta$ jest dobrze określone i klasy $\mathcal{C}^1$ na zbiorze $U$. Ponadto, macierz przedziałowa $DF(U)$ jest odwracalna oraz $N(F, x_0, U) \subset U$.*

Zobacz program w C++.




© 2006 D.Wilczak

Rozważmy ruch $N$-ciał w polu grawitacyjnym. Przy założeniu, że wszystkie ciała mają taką samą masę oraz stała grawitacji jest równa jeden, równania ruchu tych ciał to

$$\ddot{q}_i = \sum_{i \neq j} \frac{q_i - q_j}{r_{ij}^3}, \quad i = 1, \ldots, N$$

© 2006 D.Wilczak

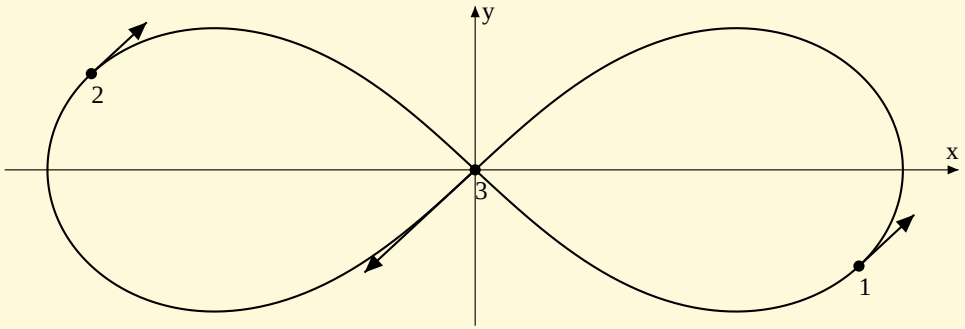
Rozważmy ruch $N$-ciał w polu grawitacyjnym. Przy założeniu, że wszystkie ciała mają taką samą masę oraz stała grawitacji jest równa jeden, równania ruchu tych ciał to

$$\ddot{q}_i = \sum_{i \neq j} \frac{q_i - q_j}{r_{ij}^3}, \quad i = 1, \ldots, N \tag{2}$$

**Definicja 1** *Choreografią nazywamy takie rozwiązanie okresowe równania ruchu (2), w którym wszystkie ciała poruszają się po tej samej krzywej zamkniętej i mają równe odstępy czasowe, czyli istnieje $T > 0$ takie, że*

$$q_i(t+T) = q_i(t), \quad i = 1, \ldots, N$$
$$q_i\left(t + \frac{T}{N}\right) = q_{i+1}(t), \quad i = 1, \ldots, N-1$$
$$q_N\left(t + \frac{T}{N}\right) = q_1(t)$$

# Przykłady choreografii.



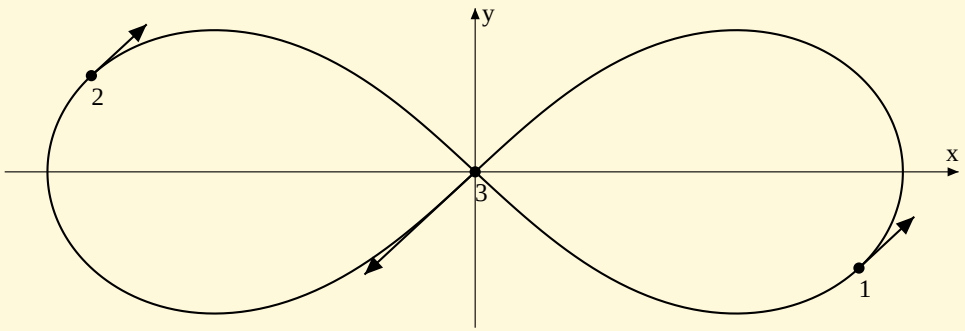

Historia:

- 1993, Moore - znalazł numerycznie choreografię w kształcie ósemki



© 2006 D.Wilczak

# Przykłady choreografii.



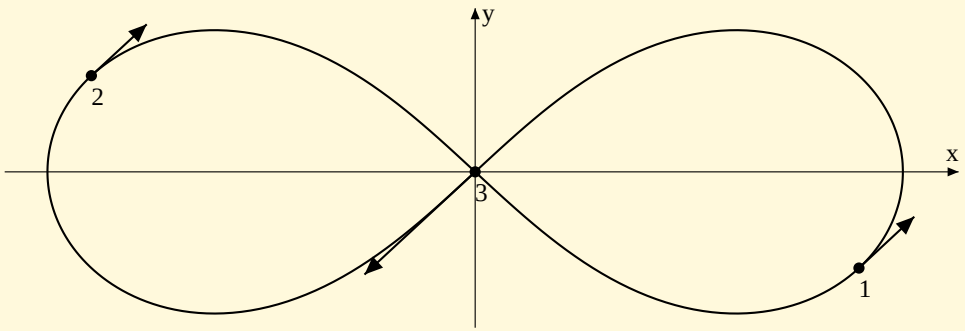

Historia:

- 1993, Moore - znalazł numerycznie choreografię w kształcie ósemki
- 2000,Chenciner, Montgomery - analityczny dowód istnienia rozwiązania z samoprzecięciem - brak dowodu wypukłości



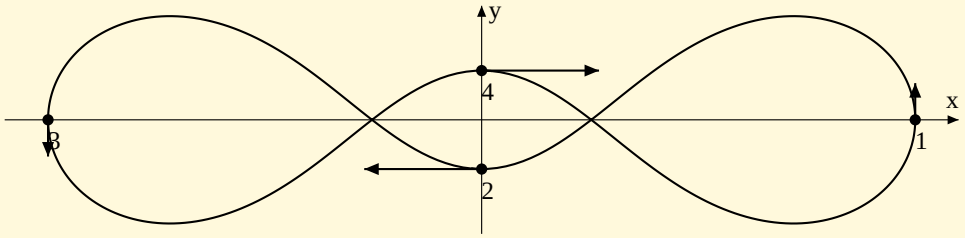

© 2006 D.Wilczak

# Przykłady choreografii.




Historia:

- 1993, Moore - znalazł numerycznie choreografię w kształcie ósemki
- 2000,Chenciner, Montgomery - analityczny dowód istnienia rozwiązania z samoprzecięciem - brak dowodu wypukłości
- 1999, Gerver - znalazł numerycznie choreografię dla czterech ciał

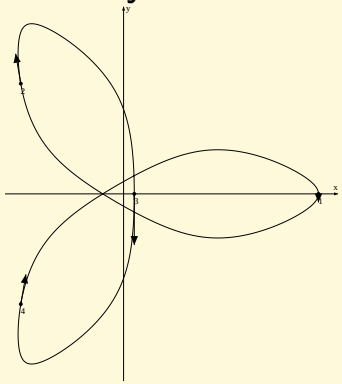


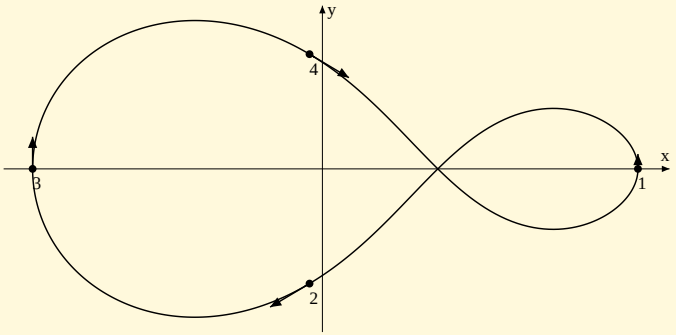


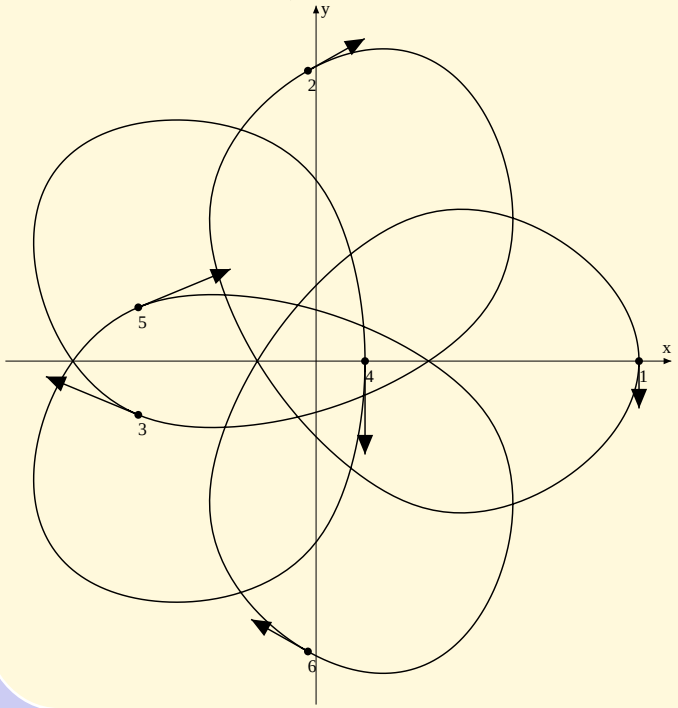


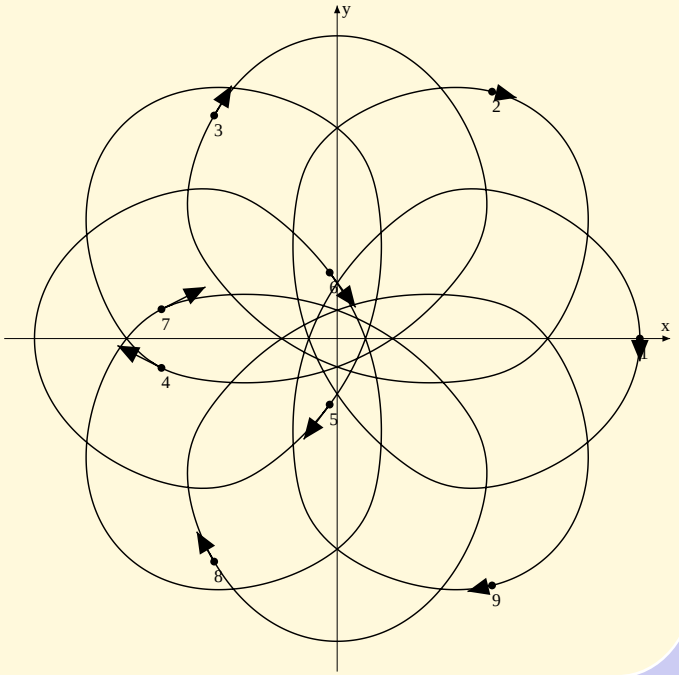
© 2006 D.Wilczak

2000 i później, grupa C.Simò z Barcelony - numerycznie wyznaczone choreografie o różnych kształtach dla liczby ciał od $4$ do kilkuset.





**Twierdzenie 5** *(T.Kapela, P. Zgliczyński, 2003)*

- *ósemka istnieje i jest wypukła*
- *istnienie orbity Gervera*
- *istnienie choreografii dla sześciu ciał*

© 2006 D.Wilczak

**Twierdzenie 5** *(T.Kapela, P. Zgliczyński, 2003)*

- *ósemka istnieje i jest wypukła*
- *istnienie orbity Gervera*
- *istnienie choreografii dla sześciu ciał*

W późniejszym czasie dowód istnienia szeregu różnych choreografii dla 4,5,6,7 ciał.

© 2006 D.Wilczak

**Twierdzenie 5** *(T.Kapela, P. Zgliczyński, 2003)*

- *ósemka istnieje i jest wypukła*
- *istnienie orbity Gervera*
- *istnienie choreografii dla sześciu ciał*

W późniejszym czasie dowód istnienia szeregu różnych choreografii dla 4,5,6,7 ciał.

**Komputerowo wspierane dowody oparte o przedziałową metodę Newtona.**

© 2006 D.Wilczak

# 3. Relacje nakrywające.

**Definicja 2** *h-zbiorem nazywamy układ* $(|N|, s(N), u(N), c_N)$ *spełniający warunki*

- $|N|$ *jest zwartym podzbiorem* $\mathbb{R}^n$
- $u(N), s(N) \in \{0, 1, 2, \dots\}$ *oraz* $u(N) + s(N) = n$
- $c_N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{u(N)} \times \mathbb{R}^{s(N)}$ *jest homeomorfizmem takim, że*

$$c_N(|N|) = \overline{B_{u(N)}} \times \overline{B_{s(N)}}.$$

Arytmetyka przedziałowa.
Przedziałowa metoda . . .
Relacje nakrywające.

© 2006 D.Wilczak

# 3. Relacje nakrywające.

**Definicja 2** *h-zbiorem nazywamy układ* $(|N|, s(N), u(N), c_N)$ *spełniający warunki*

- $|N|$ *jest zwartym podzbiorem* $\mathbb{R}^n$
- $u(N), s(N) \in \{0, 1, 2, \dots\}$ *oraz* $u(N) + s(N) = n$
- $c_N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{u(N)} \times \mathbb{R}^{s(N)}$ *jest homeomorfizmem takim, że*

$$c_N(|N|) = \overline{B_{u(N)}} \times \overline{B_{s(N)}}.$$

*Określamy wtedy*

$$\begin{aligned} \dim(N) &:= n, \\ N_c &:= \overline{B_{u(N)}} \times \overline{B_{s(N)}}, \\ N_c^- &:= \partial B_{u(N)} \times \overline{B_{s(N)}}, \\ N_c^+ &:= \overline{B_{u(N)}} \times \partial B_{s(N)}, \\ N^- := c_N^{-1}(N_c^-), &\quad N^+ = c_N^{-1}(N_c^+). \end{aligned}$$


© 2006 D.Wilczak

**Definicja 3** *Załóżmy, że $N, M$ są $h$-zbiorami takimi, że $u(N) = u(M) = u$ oraz $f : N \to \mathbb{R}^{\dim(M)}$ jest ciągła. Określamy $f_c = c_M \circ f \circ c_N^{-1} : N_c \to \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^{s(M)}$. Mówimy, że $N$ $f$-**nakrywa** $M$ i oznaczamy*

$$N \overset{f}{\Longrightarrow} M$$

*jeżeli zachodzą warunki*

**1.** *istnieje homotopia $h : [0,1] \times N_c \to \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^{s(M)}$ taka, że*

$$h_0 = f_c, \tag{3}$$

$$h([0,1], N_c^-) \cap M_c = \emptyset, \tag{4}$$

$$h([0,1], N_c) \cap M_c^+ = \emptyset. \tag{5}$$

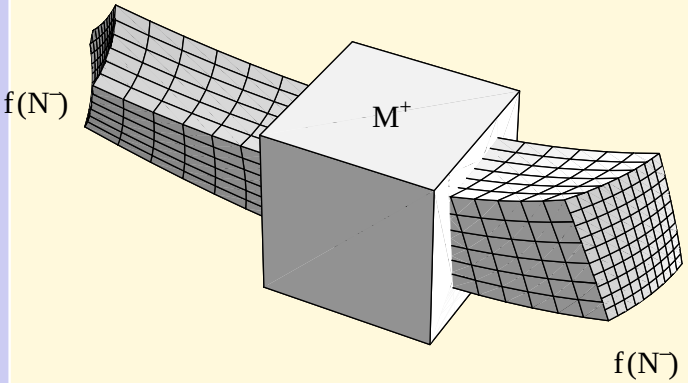
**2.** *istnieje odwzorowanie liniowe $A : \mathbb{R}^u \to \mathbb{R}^u$ takie, że*

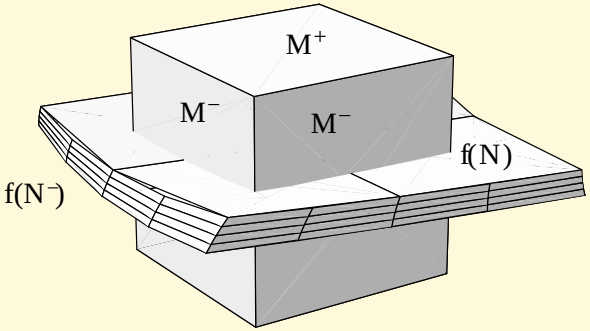
$$h_1(p,q) = (A(p), 0), \text{ dla } p \in \overline{B_u} \text{ oraz } q \in \overline{B_{s(N)}}, \tag{6}$$

$$A(\partial B_u) \subset \mathbb{R}^u \setminus \overline{B_u}. \tag{7}$$

© 2006 D.Wilczak

# Geometria relacji nakrywających




**Z lewej:** $u(N) = u(M) = 1$ oraz $s(N) = s(M) = 2$.

**Z prawej:** $u(N) = u(M) = 2$ oraz $s(N) = s(M) = 1$.




© 2006 D.Wilczak

**Twierdzenie 6** *(DW, 2006) Jeżeli*

$N_i$ - *h-zbiory,* $u(N_i) = u$ *dla* $i \in \mathbb{Z}$

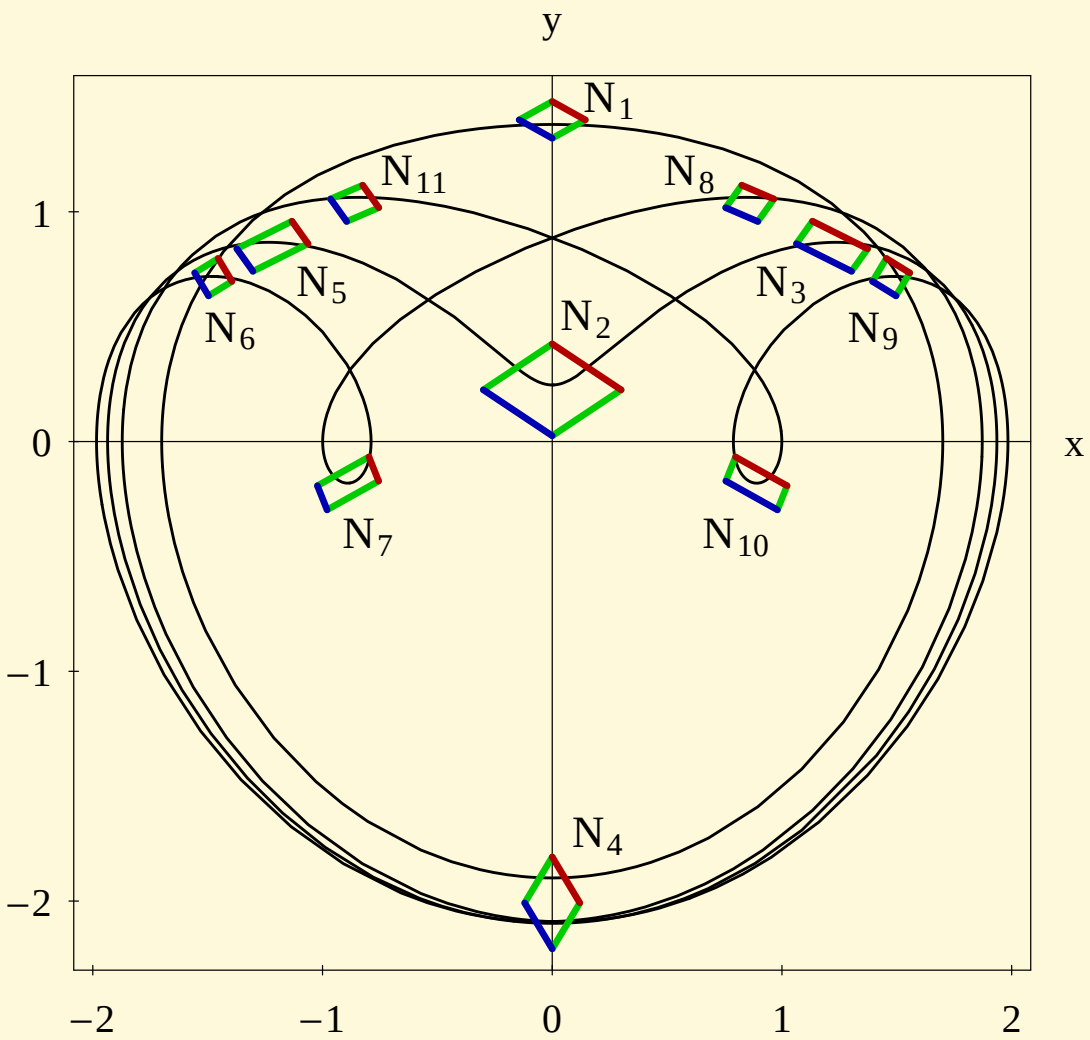
$f_i : |N_i| \to \mathbb{R}^{\dim(N_{i+1})}$ *takie, że* $N_i \overset{f_i}{\Longrightarrow} N_{i+1}$

*to istnieje ciąg* $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ *taki, że*

$$f(x_i) = x_{i+1}$$

*Ponadto, jeżeli ciąg funkcji i zbiorów jest okresowy, czyli* $f_{i+T} = f_i$, $N_{i+T} = N_i$ *dla pewnego* $T > 0$, *to ciąg* $x_i$ *można wybrać jako okresowy.*

# Zastosowanie do układu Michelsona.







© 2006 D.Wilczak

**Lemat 7** *(wspierany komputerowo, kilka minut na 3GHz) Dla wszystkich wartości parametru* $c \in [0.8285, 0.861]$ *zachodzą następujące relacje nakrywające*

$$\begin{aligned} N_4 &\overset{P_c}{\Longrightarrow} N_1 \overset{P_c}{\Longrightarrow} N_4, \\ N_4 \overset{P_c}{\Longrightarrow} N_5 &\overset{P_c}{\Longrightarrow} N_2 \overset{P_c}{\Longrightarrow} N_3 \overset{P_c}{\Longrightarrow} N_4, \\ N_4 \overset{P_c}{\Longrightarrow} N_6 &\overset{P_c}{\Longrightarrow} N_7 \overset{P_c}{\Longrightarrow} N_8 \overset{P_c}{\Longrightarrow} N_4, \\ N_4 \overset{P_c}{\Longrightarrow} N_{11} &\overset{P_c}{\Longrightarrow} N_{10} \overset{P_c}{\Longrightarrow} N_9 \overset{P_c}{\Longrightarrow} N_4. \end{aligned} \tag{8}$$

*gdzie* $P_c : \Theta \multimap \Theta$ *jest odwzorowaniem Poincarégo dla równania Michelsona (1) z parametrem* $c$.




© 2006 D.Wilczak

**Lemat 7** *(wspierany komputerowo, kilka minut na 3GHz) Dla wszystkich wartości parametru* $c \in [0.8285, 0.861]$ *zachodzą następujące relacje nakrywające*

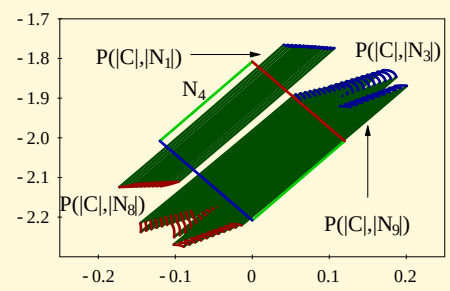
$$\begin{aligned} N_4 &\overset{P_c}{\Longrightarrow} N_1 \overset{P_c}{\Longrightarrow} N_4, \\ N_4 \overset{P_c}{\Longrightarrow} N_5 &\overset{P_c}{\Longrightarrow} N_2 \overset{P_c}{\Longrightarrow} N_3 \overset{P_c}{\Longrightarrow} N_4, \\ N_4 \overset{P_c}{\Longrightarrow} N_6 &\overset{P_c}{\Longrightarrow} N_7 \overset{P_c}{\Longrightarrow} N_8 \overset{P_c}{\Longrightarrow} N_4, \\ N_4 \overset{P_c}{\Longrightarrow} N_{11} &\overset{P_c}{\Longrightarrow} N_{10} \overset{P_c}{\Longrightarrow} N_9 \overset{P_c}{\Longrightarrow} N_4. \end{aligned} \tag{8}$$

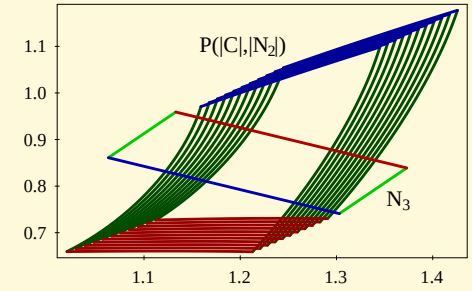
*gdzie* $P_c : \Theta \multimap \Theta$ *jest odwzorowaniem Poincarégo dla równania Michelsona (1) z parametrem* $c$.

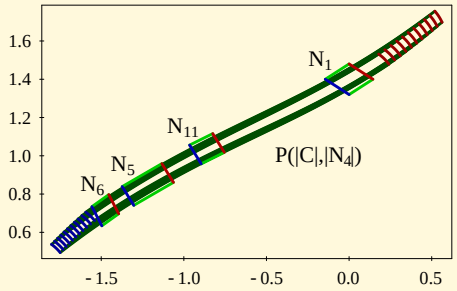
**Wniosek:** Układ Michelsona jest $\Sigma_4$ chaotyczny.

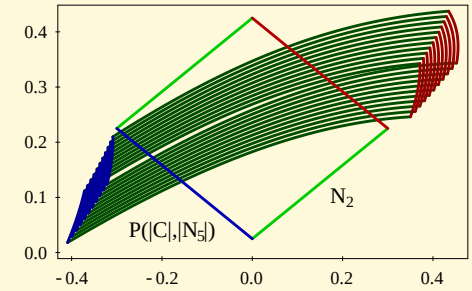


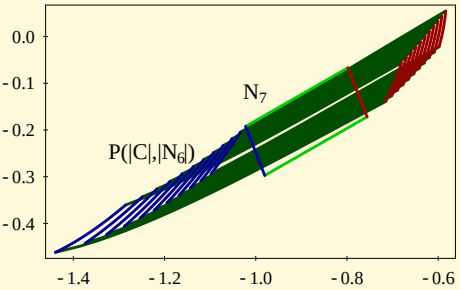
© 2006 D.Wilczak

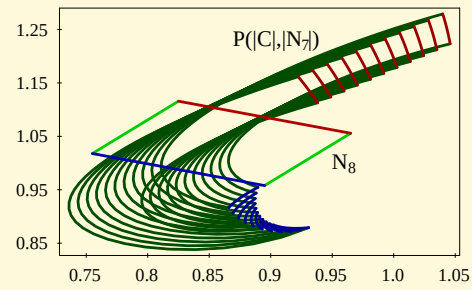


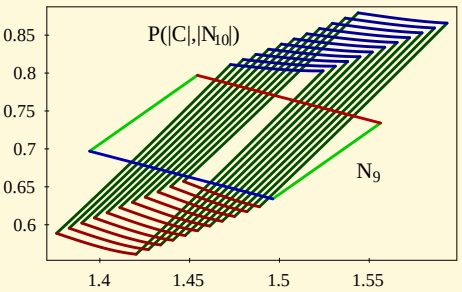



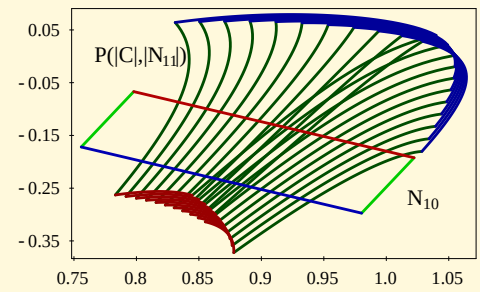







© 2006 D.Wilczak

**Definicja 4** *Niech $N$ będzie $h$-zbiorem. Załóżmy, że $b : \overline{B_{u(N)}} \to |N|$ jest ciągłe. Określamy $b_c = c_N \circ b$. Mówimy, że $b$* **jest dyskiem horyzontalnym w** *$N$ jeżeli istnieje ciągła homotopia $h : [0,1] \times \overline{B_{u(N)}} \to N_c$ taka, że*

$$h_0 = b_c \tag{9}$$

$$h_1(x) = (x, 0), \qquad \text{dla } x \in \overline{B_{u(N)}} \tag{10}$$

$$h(t,x) \in N_c^-, \qquad \text{dla } t \in [0,1] \text{ oraz } x \in \partial B_{u(N)}$$

© 2006 D.Wilczak

**Definicja 4** *Niech $N$ będzie $h$-zbiorem. Załóżmy, że $b : \overline{B_{u(N)}} \to |N|$ jest ciągłe. Określamy $b_c = c_N \circ b$. Mówimy, że $b$* **jest dyskiem horyzontalnym w** *$N$ jeżeli istnieje ciągła homotopia $h : [0,1] \times \overline{B_{u(N)}} \to N_c$ taka, że*

$$h_0 = b_c \tag{9}$$

$$h_1(x) = (x, 0), \qquad \text{dla } x \in \overline{B_{u(N)}} \tag{10}$$

$$h(t,x) \in N_c^-, \qquad \text{dla } t \in [0,1] \text{ oraz } x \in \partial B_{u(N)} \tag{11}$$

**Definicja 5** *Niech $N$ będzie $h$-zbiorem. Załóżmy, że $b : \overline{B_{s(N)}} \to |N|$ jest ciągłe. Określamy $b_c = c_N \circ b$. Mówimy, że $b$* **jest dyskiem wertykalnym w** *$N$ jeżeli istnieje ciągła homotopia $h : [0,1] \times \overline{B_{s(N)}} \to N_c$ taka, że*

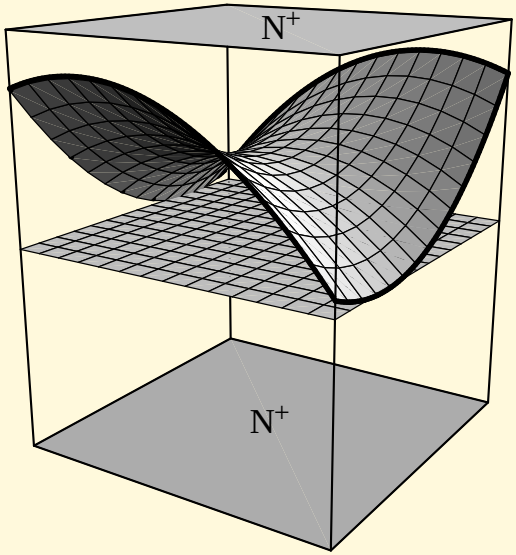
$$h_0 = b_c$$

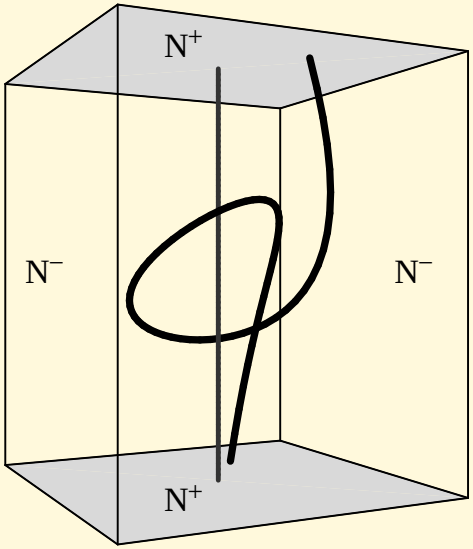
$$h_1(x) = (0, x), \qquad \text{dla } x \in \overline{B_{s(N)}}$$

$$h(t,x) \in N_c^+, \qquad \text{dla } t \in [0,1] \text{ oraz } x \in \partial B_{s(N)}. \tag{12}$$




© 2006 D.Wilczak




**Z lewej:** dysk horyzontalny w $N$

**Z prawej:** dysk wertykalny w $N$




© 2006 D.Wilczak

**Twierdzenie 8** *(DW, 2006) Niech* $Z$, $N_0, N_1, \ldots, N_k$, *dla* $k > 0$ *będą h-zbiorami takimi, że* $\dim(Z) = u(Z) = u(N_0) = \cdots = u(N_k)$. *Niech* $W : |Z| \to \mathbb{R}^{\dim(N_0)}$, $f_i : |Z| \times |N_i| \to \mathbb{R}^{\dim(N_{i+1})}$, $i = 0, \ldots, k-1$ *będą ciągłe. Niech* $v : \overline{B_{s(N_k)}} \to |N_k|$ *będzie dyskiem wertykalnym w* $N_k$.
*Jeśli* $Z \overset{W}{\Longrightarrow} N_0$ *oraz dla wszystkich* $z \in |Z|$

$$N_0 \overset{f_0(z,\cdot)}{\Longrightarrow} N_1 \overset{f_1(z,\cdot)}{\Longrightarrow} \cdots \overset{f_{k-1}(z,\cdot)}{\Longrightarrow} N_k$$

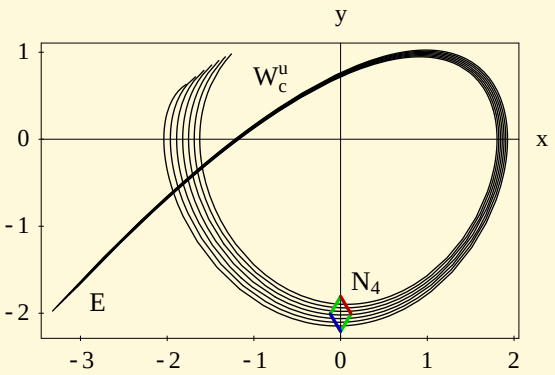
*to istnieje parametr* $z_0 \in |Z|$ *taki, że*

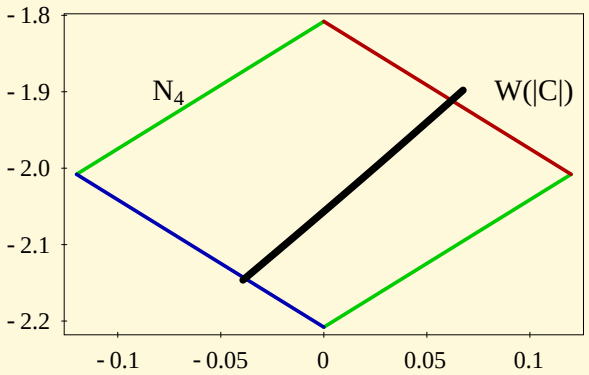
$$W(z_0) \in |N_0|,$$
$$(f_i(z_0,\cdot) \circ \cdots \circ f_0(z_0,\cdot))(W(z_0)) \in |N_{i+1}|, \quad \text{dla } i = 0, \ldots, k-2,$$
$$(f_{k-1}(z_0,\cdot) \circ \cdots \circ f_0(z_0,\cdot))(W(z_0)) \in v(B_{s(N_k)}).$$

# Zastosowanie do układu Michelsona.

Oznaczmy $C = [0.8285, 0.861]$. Określamy odwzorowanie $W : C \to \Theta$ w następujący sposób. Dla $c \in C$ przez $W(c)$ oznaczamy drugie przecięcie jednowymiarowej rozmaitości niestabilnej punktu równowagi $(-c\sqrt{2}, 0, 0)$ z sekcją $\Theta$.

**Lemat 9** *(wspierany komputerowo)* $W$ *jest dobrze określone i ciągłe na* $C$. *Ponadto,* $C \overset{W}{\Longrightarrow} N_4$



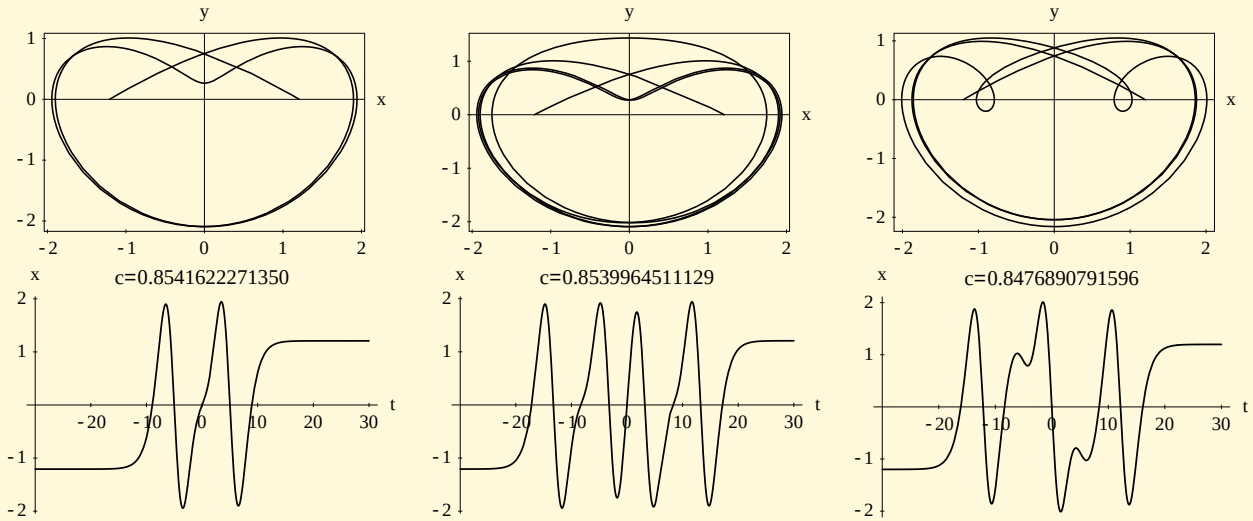







© 2006 D.Wilczak

**Twierdzenie 10** *(DW, 2006) Istnieje przeliczalnie wiele wartości parametrów* $c \in C$*, dla których układ Michelsona ma połączenie heteroklinicznez* $(-c\sqrt{2}, 0, 0)$ *do* $(c\sqrt{2}, 0, 0)$

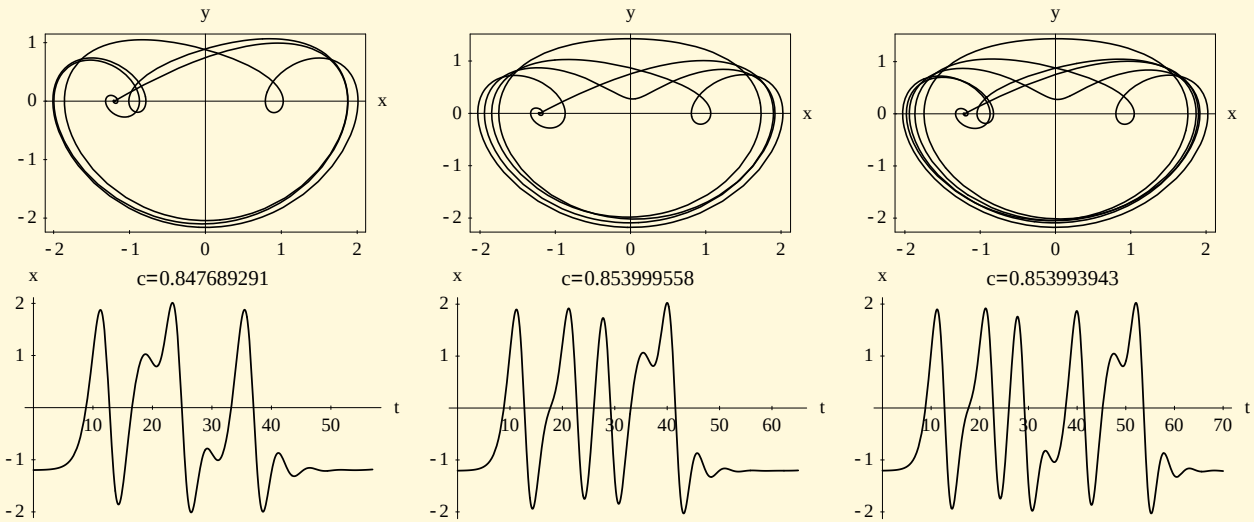






© 2006 D.Wilczak

**Twierdzenie 11** *(DW, 2006) Istnieje przeliczalnie wiele wartości parametrów $c \in C$, dla których układ Michelsona ma parę orbit homoklinicznych typu Shilnikova.*

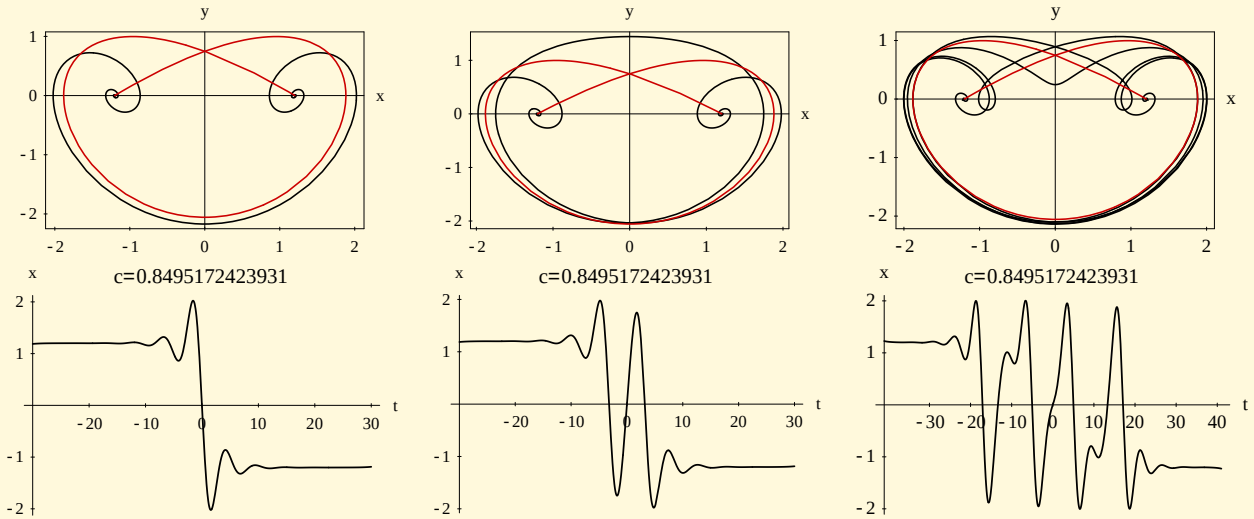






© 2006 D.Wilczak

**Twierdzenie 12** *(DW, 2006) Dla wszystkich wartości parametrów* $c \in C$ *układ Michelsona ma przeliczalnie wiele połączeń heteroklinicznych z* $(c\sqrt{2}, 0, 0)$ *do* $(-c\sqrt{2}, 0, 0)$



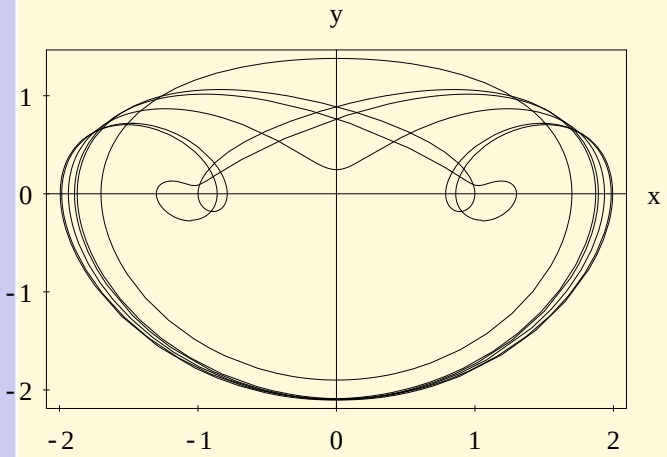


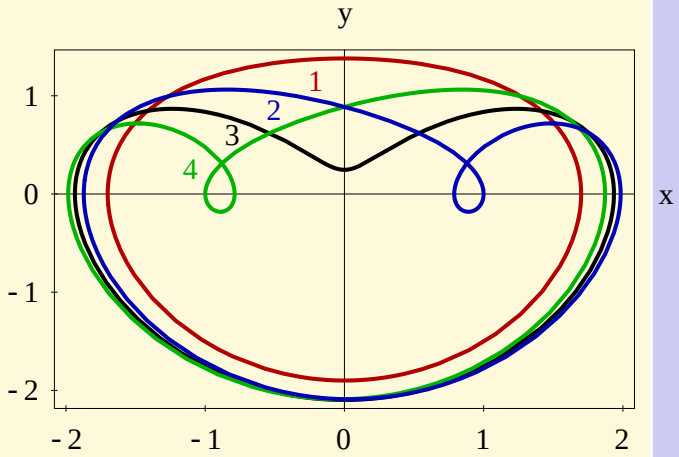


© 2006 D.Wilczak

# Problemy otwarte

Dla pewnego podzbioru parametrów $C$ prawdopodobnie istnieją kolejne orbity okresowe.



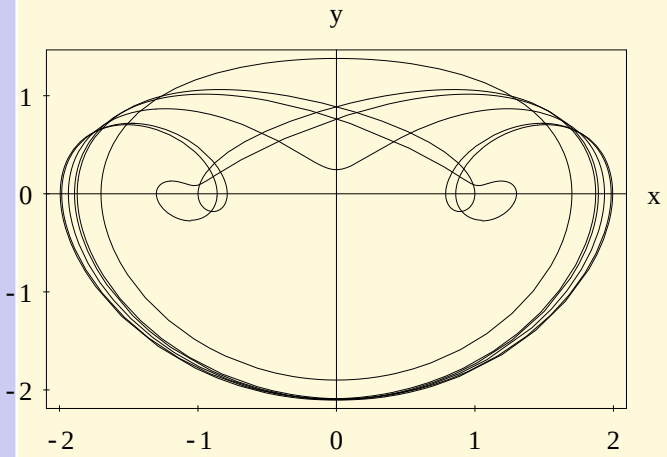


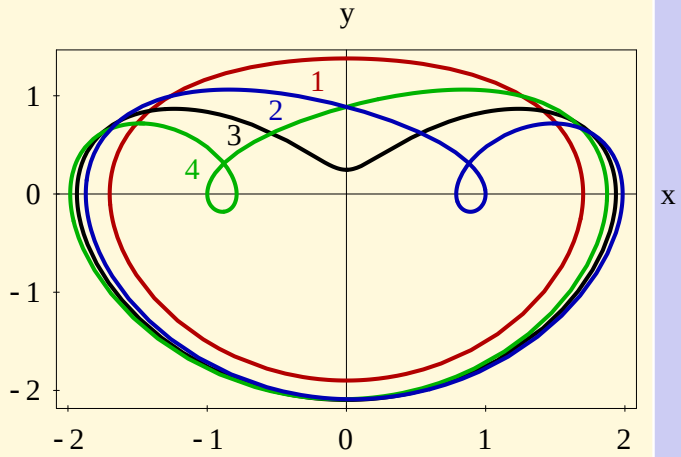


© 2006 D.Wilczak

# Problemy otwarte

Dla pewnego podzbioru parametrów $C$ prawdopodobnie istnieją kolejne orbity okresowe.




Pytania:

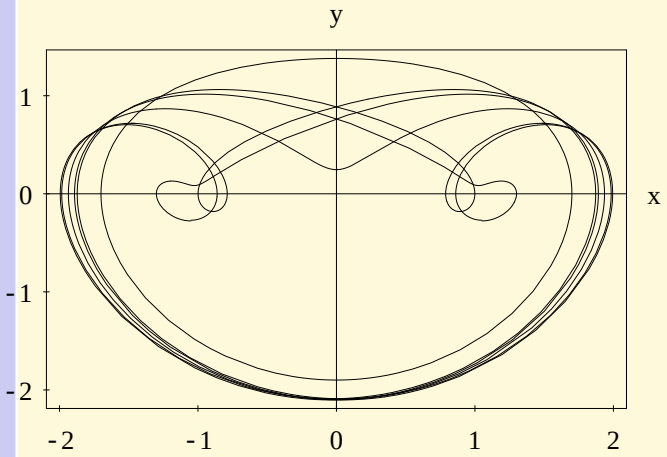
- Czy układ Michelsona jest $\Sigma_6$ chaotyczny?

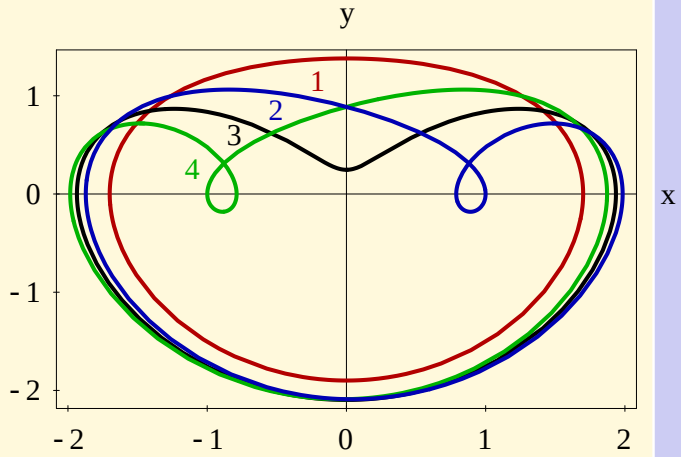



© 2006 D.Wilczak

# Problemy otwarte

Dla pewnego podzbioru parametrów $C$ prawdopodobnie istnieją kolejne orbity okresowe.



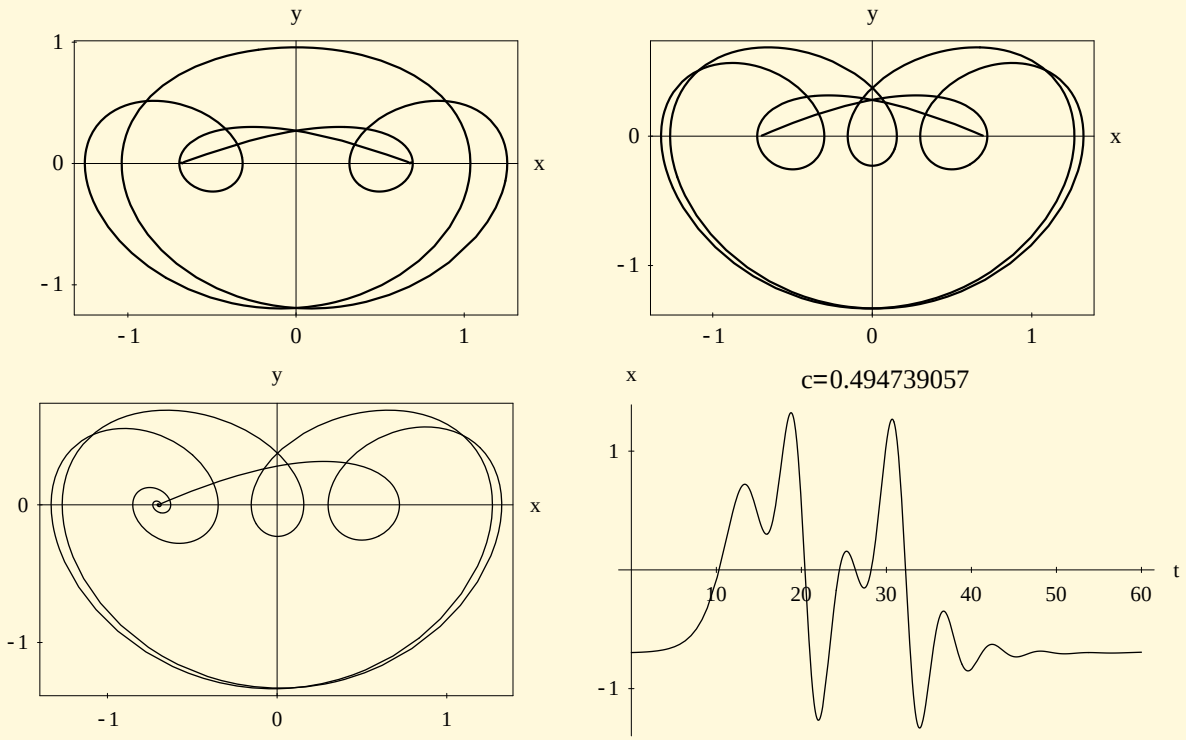




Pytania:

- Czy układ Michelsona jest $\Sigma_6$ chaotyczny?
- Czy struktura rozwiązań homo i heteroklinicznych jest jeszcze bardziej skomplikowana?




© 2006 D.Wilczak

# Kolejne pytania

- Dla wartości parametrów $c \approx 0.49$ obserwuje się kolejną rodzinę rozwiązań homo i heteroklinicznych.