Deformacje splotu wolnego i warunkowo wolnego

Anna Dorota Krystek
Instytut Matematyczny Uniwesytetu Wrocławskiego
pl.Grunwaldzki 2/4
50-384 Wrocław, Poland
Anna.Krystek@math.uni.wroc.pl

17 października 2005

Gł ównym obiektem zainteresowania klasycznego rachunku prawdopodobieństwa jest trójka $(\Omega, \Sigma, \mathbf{P})$, gdzie Ω jest przestrzenią miarową, Σ jest σ–ciał em zbiorów mierzalnych a $\mathbf{P}$ jest miarą probabilistyczną. Zmienne losowe tworzą przemienna algebrę $\mathcal{A}$ na której można zdefiniować wartość oczekiwaną $\mathbb{E}$, odpowiadającą mierze probabilistycznej.

W niekomutatywnej probabilistyce gł ownym obiektem studiów jest algebra zmiennych losowych – niekoniecznie przemienna wraz ze stanem. Przez niekomutatywną przestrzeń probabilistyczną rozumie się parę $(\mathcal{A}, \varphi)$ gdzie $\mathcal{A}$ jest zespoloną $\star$–algebrą z jedynką a φ dodatnim funkcjonał em liniowym takim, że $\varphi(1) = 1$. Niekomutatywna zmienna losowa to po prostu element $X \in \mathcal{A}$. Przez rozkł ad takiej zmiennej będziemy rozumieć momenty $\varphi(X^n)$, $n = 0, 1, \ldots$. Ponieważ ciąg mommentów jest dodatnio określony, istnieje miara probabilistyczna μ na prostej taka, że $\varphi(X^n) = \int x^n d\mu(x)$.

Przy pomocy niezależności można zdefiniować splot miar – jest to miara odpowiadająca dodawaniu niezależnych zmiennych losowych. Ale oprócz klasycznej niezależności istnieją również inne rodzaje niezależności:

- wolna niezależność oraz splot wolny $\boxplus$, wprowadzony przez Voiculescu,
- boolowska niezależność wraz z odpowiadającym splotem $\uplus$,
- warunkowo wolna niezależność i splot $\boxed{c}$ par miar.

Dla par miar o zwartym nośniku takich jak wyżej (μ_1, ν_1), (μ_2, ν_2) splot warunkowo wolny jest parą miar

$$(\xi, \eta) = (\mu_1, \nu_1) \boxed{c} (\mu_2, \nu_2), \tag{1}$$

gdzie $\eta = \nu_1 \boxplus \nu_2$ jest wolnym splotem Voiculescu miar ν_1 i ν_2.

Interesują mnie odwzorowania T miar probabilistycznych μ, ν takie, że jeśli napiszemy

$$(\xi, \eta) = (\mu, T\mu) \boxed{c} (\nu, T\nu),$$

to

$$\eta = T\xi. \tag{2}$$

Dla takich odwzorowań możemy za pomocą splotu warunkowo wolnego zdefiniować nowy, łączny splot $\boxplus_T$:

$$\mu \boxplus_T \nu = (\mu, T\mu) \boxed{c} (\nu, T\nu).$$

Bożejko postawił problem, aby znaleźć wszystkie takie odwzorowania – długo znanym przykładem był a t–deformacja oraz jej uogólnienie, (a, b)–deformacja. Ostatnio Oravecz podał parę nowych przykładów.

Jeśli odwzorowanie T jest odwracalne, to możemy zdefiniować nowy, łączny splot w inny sposób, jako deformację splotu wolnego

$$\mu \boxplus^T \nu = T^{-1}(T\mu \boxplus T\nu).$$

Gdy T jest zarówno odwracalna i spełnia własność (2), to obie definicje sa równoważne.

W tym referacie zajmuję sie kilkoma przykładami odwzorowań, które dają nowe, łączne sploty.