Ujemna korelacja dla kul w $\mathbb{R}^n$ - znane fakty

Definicja 1. Wariancją *zmiennej losowej* X *(ozn.* Var$X$*) nazywamy wartość* $\mathbb{E}X^2-(\mathbb{E}X)^2$*, lub — równoważnie —* $\mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)^2$*. Wariancja mierzy, jak bardzo zmienna losowa odchyla się od swojej wartości oczekiwanej.*

Definicja 2. Kowariancją *dwóch zmiennych losowych* X *i* Y*, oznaczaną* $\mathrm{Cov}(X,Y)$*, nazywamy wartość* $\mathbb{E}\,X\cdot Y-\mathbb{E}\,X\cdot\mathbb{E}\,Y$*. Kowariancja mierzy korelację dwóch zmiennych, czyli na ile wzrost jednej zmiennej będzie (statystycznie) pociągał wzrost drugiej zmiennej. Zmienne niezależne mają kowariancję 0.*

Twierdzenie 3 (Centralne Twierdzenie Graniczne, wersja podstawowa). *Niech* $X_1,X_2,\ldots,X_n$ *będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkadzie i niech* $\mathbb{E}X_i=0$*, zaś* $\mathrm{Var}X_i=1$*. Wtedy*

$$\frac{X_1+\ldots+X_n}{\sqrt{n}}\to\mathcal{N}(0,1),$$

gdzie zbieżność zachodzi według rozkładu.

Twierdzenie 4 (Centralne Twierdzenie Graniczne, wersja bardziej zaawansowana). *Niech* X_i *będą niezależnymi zmiennymi losowymi spełniającymi* $\mathbb{E}X_i=0$*,* $\mathrm{Var}X_i=1$ *oraz* $\mathbb{E}|X_i|^{2+\varepsilon}\leqslant K<\infty$ *dla pewnego* K *i* $\varepsilon>0$*. Niech* $a_{n,i}$ *będzie ciągiem współczynników spełniającym*

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{i\leqslant n}|a_{n,i}|=0$$

oraz $\sum_{i\leqslant n}a_{n,i}^2=1$*. Wtedy*

$$\sum_{i=1}^n a_{n,i}X_i\to\mathcal{N}(0,1),$$

gdzie zbieżność zachodzi według rozkładu.

To twierdzenie, przy całym swoim strasznym sformułowaniu, jest prostym uogólnieniem poprzedniego. Po pierwsze zmienne losowe o jednakowym rozkładzie zastąpiliśmy niezależnymi zmiennymi losowymi o wspólnie ograniczonym $E|X_i|^{2+\varepsilon}$. Po drugie zaś współczynnik $\frac{1}{\sqrt{n}}$, który stał przy każdej zmiennej zastąpiliśmy przez współczynnik $a_{n,i}$, przy czym suma kwadratów $a_{n,i}$ musi być 1 (to ustala wariancję sumy), oraz $a_{n,i}$ muszą jednostajnie maleć z n (żeby żadna zmienna nie dominowała w sumie).

Definicja 5. Kula ℓ^p *w* $\mathbb{R}^n$ *to zbiór tych punktów* $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$*, dla których zachodzi* $\sum_{i=1}^n|x_i|^p\leqslant 1$*. Dla* $p\geqslant 1$ *jest to zbiór wypukły, dla* $p=2$ *jest to zwykła kula.*

Definicja 6. Kula Orlicza *w* $\mathbb{R}^n$ *to zbiór tych punktów* $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$*, dla których zachodzi* $\sum_{i=1}^n f(|x_i|)\leqslant 1$*, gdzie* f *to ustalona funkcja wypukła nieujemna spełniająca* $f(0)=0$*. Kule* ℓ^p *są kulami Orlicza.*

Definicja 7. Uogólniona kula Orlicza *to zbiór jak wyżej, tylko dla każdej współrzędnej mamy inną funkcję, a warunek przybiera postać* $\sum_{i=1}^n f_i(|x_i|)\leqslant 1$*. Uogólniona kula Orlicza jest zbiorem wypukłym.*

Definicja 8. *Funkcję* $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *nazywamy* logarytmicznie wklęsłą*, lub w skrócie* log-wklęsłą*, jeśli* $\log f$ *jest wklęsła. Zmienną losową na* $\mathbb{R}^n$ *nazywamy log-wklęsłą, jeśli jej gęstość jest log-wklęsła.*

Definicja 9. *Dla zmiennej losowej* X *jej* p-tym momentem *nazywamy wartość* $\mathbb{E}|X-\mathbb{E}X|^p$*. Momenty (tak jak wariancja, która jest po prostu drugim momentem) mierzą stopień odchylenia zmiennej od jej wartości oczekiwanej, przy czym dla wyższych* p *momenty są bardziej wrażliwe na mało prawdopodobne, ale duże odchylenia, zaś dla niższych* p *bardziej wykrywają niewielkie, ale bardziej prawdopodobne odchylenia.*

Twierdzenie 10 (Twierdzenie o porównywaniu momentów). *Dla symetrycznej, log-wklęsłej zmiennej* X *oraz dowolnych* p,q *zachodzi* $(\mathbb{E}|X|^p)^{1/p}\leqslant C(p,q)(\mathbb{E}|X|^q)^{1/q}$*, gdzie* $C(p,q)$ *to stała zależna tylko od* p *i* q*.*

Twierdzenie 11 (Nierówność Brunna-Minkowskiego). *Niech* A *i* B *będą zbiorami wypukłymi w* $\mathbb{R}^n$*. Wtedy*

$$\lambda\big(tA+(1-t)B\big)^{1/n}\leqslant t\lambda(A)^{1/n}+(1-t)\lambda(B)^{1/n},$$

gdzie λ *oznacza miarę Lebesgue'a.*

Z nierówności Brunna-Minkowskiego wynika w szczególności, że dla ciała wypukłego $K\subset\mathbb{R}^n$ funkcja przypisująca liczbie t miarę przecięcia K z hiperpłaszczyzną $\{x_1=t\}$ jest log-wklęsła.

Ujemna korelacja dla kul w $\mathbb{R}^n$ - nowe wyniki

Twierdzenie 12 (Ujemna korelacja kwadratów dla kul ℓ^p — Antilla, Ball, Perissinaki). *Jeśli* $(X_1, \ldots, X_n)$ *to losowy punkt z kuli* ℓ^p*, to* $\mathrm{Cov}(X_i^2, X_j^2) \leqslant 0$ *dla* $i \neq j$*.*

Wniosek 13 (Koncenteracja dla kul ℓ^p — Antilla, Ball, Perissinaki). *Jeśli* $(X_1, \ldots, X_n)$ *to losowy punkt z kuli* ℓ^p *o* $\mathbb{E}X_i^2 = 1$*, to*

$$\mathbb{P}\Big(|\frac{|X|}{\sqrt{n}} - 1| > t\Big) < \frac{C}{nt^2},$$

gdzie C *jest stałą absolutną.*

Wniosek 14 (Centralne Twierdzenie Graniczne dla kul ℓ^p — Meckes, Meckes). *Niech* $(X_1, \ldots, X_n)$ *będzie losowym punktem z kuli* ℓ^p *o* $\mathbb{E}X_i^2 = 1$*. Niech* $a = (a_i)_{i=1}^n$ *będzie ciągiem współczynników spełniającym* $\sum_{i \leqslant n} a_i^2 = 1$*. Wtedy zmienna*

$$\sum_{i=1}^n a_i X_i$$

ma dystrybuantę d_a *spełniającą*

$$\sup_x |d_a(x) - d(x)| < c\big(\sum |a_i|^3\big)^{1/2},$$

gdzie d *to dystrybuanta rozkładu normalnego.*

Tu uwaga — nie jest możliwy bezpośredni analog Centralnego Twierdzenia Granicznego (wersji bardziej zaawansowanej), bo tu, siłą rzeczy, nie mamy nieskończonego ciągu zmiennych losowych, a ciąg długości n, gdzie n to wymiar przestrzeni. Dlatego, zamiast mówić "zbiega", mówimy "jest bliskie" i podajemy miarę tej bliskości — punktową odległość dystrybuant, która odpowiada za zbieżność według rozkładu. Gdyby wziąć ciąg kul z $\mathbb{R}^n$ dla kolejnych n, to otrzymalibyśmy zbieżność podobną, jak w poprzedniej wersji, przy silniejszym warunku na współczynniki (do zera musiałoby zbiegać nie supremum, a suma trzecich potęg).

Twierdzenie 15 (Koncentracja dla uogólnionych kul Orlicza — W.). *Jeśli* $(X_1, \ldots, X_n)$ *to losowy punkt z uogólnionej kuli Orlicza, zaś* f *i* g *to symetryczne funkcje rosnące na* $[0, \infty)$*, to* $\mathrm{Cov}(f(X_i), g(X_j)) \leqslant 0$ *dla* $i \neq j$*.*

Wniosek 16. *W szczególności teza zachodzi dla* $f(x) = g(x) = x^2$*, a zatem jako wnioski dostajemy wszystkie powyższe twierdzenia (koncentrację i uogólnione CTG) dla uogólnionych kul Orlicza.*

Twierdzenie 17 (Ujemne stowarzyszenie dla kul ℓ^p — Pilipczuk, W.). *Jeśli* $(X_1, \ldots, X_n)$ *to losowy punkt z kuli* ℓ^p*, zaś* f *i* g *to funkcje wielu zmiennych, symetryczne względem każdej i rosnące względem każdej na* $[0, \infty)$ *przy ustalonych pozostałych, to*

$$\mathrm{Cov}(f(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_k}), g(X_{j_1}, X_{j_2}, \ldots, X_{j_l})) \leqslant 0$$

dla rozłącznych zbiorów indeksów i *oraz* j*.*

Ta własność zmiennych losowych znana jest w literaturze jako "ujemne stowarzyszenie". Teoria zmiennych ujemnie stowarzyszonych jest już dość rozwinięta, i dzięki niej mamy nadzieję uzyskać szereg nowych rezultatów o zmiennych losowych na kulach ℓ^p.

Twierdzenie 18 (Słabe ujemne stowarzyszenie dla uogólnionych kul Orlicza — Pilipczuk, W.). *Jeśli* $(X_1, \ldots, X_n)$ *to losowy punkt z uogólnionej kuli Orlicza,* f *to funkcja wielu zmiennych, symetryczna względem każdej i rosnąca względem każdej na* $[0, \infty)$ *przy ustalonych pozostałych, zaś* g *to funkcja jednej zmiennej, symetryczna i rosnąca na* $[0, \infty)$*, to*

$$\mathrm{Cov}(f(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_k}), g(X_j)) \leqslant 0$$

dla $j \neq i_k$*.*

Obstawiamy, że zachodzi również zwyczajne ujemne stowarzyszenie dla uogólnionych kul Orlicza, prace trwają.