Własności geometryczne przestrzeni funkcyjnych Banacha

Maciej Ciesielski,
maciej.ciesielski@put.poznan.pl
Instytut Matematyki
Politechniki Poznańskiej, Poznań.

Niech $L^0 = L^0(I)$ będzie zbiorem wszystkich klas abstrakcji relacji równoważności funkcji mierzalnych o wartościach rzeczywistych na zbiorze $I = [0, \alpha)$, gdzie $0 < \alpha \leq \infty$. Dla każdego $x \in L^0$ definiujemy $x^*(t) = \inf\{\lambda > 0 : m(|x| > \lambda) \leq t\}$, $x^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t x^*(s)ds$ dla $t > 0$. Przestrzeń funkcyjną (quasi-)Banacha nazywamy przestrzenią symetryczną (quasi-)Banacha jeśli dla $x \in L^0$, $y \in E$ gdzie $d_x(\lambda) = d_y(\lambda) = m(|y| > \lambda)$, $\lambda > 0$ mamy $x \in E$, $\|x\|_E = \|y\|_E$. Relacją *Hardy-Littlewood-Pólya* $\prec$ nazywamy relację określoną dla dowolnych $x, y \in L^1 + L^\infty$ następująco $x \prec y \Leftrightarrow x^{**}(t) \leq y^{**}(t)$ dla każdego $t > 0$. Przestrzeń funkcyjna Banacha E jet *lokalnie jednostajnie wypukła*, jeżeli dla dowolnego $(x_n) \subset E$ oraz $x \in E$ takiego, że $\|x_n + x\|_E \to 2\|x\|_E$ i $\|x_n\|_E \to \|x\|_E$, mamy $\|x_n - x\|_E \to 0$. Mówimy, że przestrzeń funkcyjna quasi-Banacha E ma własność *Kadeca-Klee względem globalnej zbieżności według miary*, jeżeli dla każdego elementu $x \in E$ oraz dla dowolnego ciągu $(x_n) \subset E$ takiego, że $x_n \to x$ względem globalnej zbieżności według miary i $\|x_n\|_E \to \|x\|_E$, dostajemy $\|x_n - x\|_E \to 0$. Przestrzeń symetryczną (quasi-)Banacha E nazywamy *ściśle K-monotoniczną* ($E \in (SKM)$) jeśli dla każdego $x, y \in E$ gdzie $x^* \neq y^*$, $x \prec y$ mamy $\|x\|_E < \|y\|_E$. Przestrzeń symetryczną (quasi-)Banacha E nazywamy *K-porządkowo ciągłą* ($E \in (KOC)$), jeżeli dla dowolnego $x \in E$ oraz $(x_n) \subset E$ takiego, że $x_n \prec x$, $x_n^* \to 0$ p.w. mamy $\|x_n\|_E \to 0$. Mówimy, że E jest *jednostajnie K-monotoniczna* ($E \in (UKM)$) jeżeli dla dowolnych $(x_n), (y_n) \subset E$ takich, że $x_n \prec y_n$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim_{n\to\infty} \|x_n\|_E = \lim_{n\to\infty} \|y_n\|_E$, mamy $\lim_{n\to\infty} \|x_n^* - y_n^*\|_E = 0$.

Najpierw omówimy pełną charakterystykę lokalnej jednostajnej wypukłości na stożku elementów nieujemnych E^+ oraz na stożku elementów nieujemnych i nierosnących E^d dla przestrzeni funkcyjnej Banacha. Następnie, pokażemy ścisłe zależności pomiędzy własnościami wypukłościowymi na stożku E^d i refleksywnością dla przestrzeni symetrycznej Banacha E. Ponadto, przedstawimy ścisłe relacje pomiędzy ścisłą K-monotonicznością i własnością Kadeca-Klee względem globalnej zbieżności według miary. W dalszej kolejności, przedyskutujemy pełne kryteria dla K-porządkowej ciągłości i dla jednostajnej K-monotoniczności w przestrzeniach symetrycznych quasi-Banacha. Dodatkowo, zaprezentujemy szereg przykładów przestrzeni symetrycznych quasi-Banacha, dla których zostały wykazane wspomniane własności geometryczne. Ostatecznie, przedstawimy rezultaty poświęcone zastosowaniu ścisłej K-monotoniczności, K- porządkowej ciągłości oraz jednostajnej K-monotoniczności w zdominowanej najlepszej aproksymacji w sensie relacji Hardy-Littlewood-Pólya $\prec$ w przestrzeniach symetrycznych Banacha. Opracowanie zostało przygotowane w oparciu o następujące prace.

LITERATURA

[H1] M. Ciesielski, *On geometric structure of symmetric spaces*, J. Math. Anal. Appl. **430** (2015), no. 1, 98-125.

[H2] M. Ciesielski, *Relationships between K-monotonicity and rotundity properties with application*, J. Math. Anal. Appl. **465** (2018), no. 1, 235-258.

[H3] M. Ciesielski, P. Kolwicz and R. Płuciennik, *Local approach to Kadec-Klee properties in symmetric function spaces*, J. Math. Anal. Appl. **426** (2015), no. 2, 700–726.

[H4] M. Ciesielski, *Strict K-monotonicity and K-order continuity in symmetric spaces*, Positivity **22** (2018), no. 3, 727–743.

[H5] M. Ciesielski, *Hardy-Littlewood-Pólya relation in the best dominated approximation in symmetric spaces*, J. Approx. Theory **213** (2017), 78-91.

[H6] M. Ciesielski and G. Lewicki, *Uniform K-monotonicity and K-order continuity in symmetric spaces with application to approximation theory*, J. Math. Anal. Appl. **456** (2017), no. 2, 705–730.