

Strategie równowagowe dla niezgodnych czasowo problemów stopowania z niepewnością modelu

piątek, 19 listopada 2021 11:23

Referat na podstawie:

Y.-J. Huang, X. Yu „Optimal stopping under model ambiguity: A time-consistent equilibrium approach”, Mathematical Finance (31), 2021

$(\Omega, \mathcal{F})$ - prz. miarowa

$\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F})$ - rodziną miar prawdopodobieństwa

$$B: \Omega \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^{d_1}, d_1 \geq 1$$

$$P(x) \subset \{P \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}): B\text{-}p.\text{Markowa} \begin{pmatrix} \text{strong Markov} \end{pmatrix} \text{ wzgl. } P \text{ oraz} \\ P(B_0 = x) = 1\}, x \in \mathbb{R}^{d_1}$$

$(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ - filtracja, $r > 0$, $g: \mathbb{R}^{d_1} \rightarrow \mathbb{R}$ - ciągła i ogr.

Rozważony problem optymalnego stopowania:

$$1) P \in P(x)$$

$$\sup_{\tau} \mathbb{E}^P \left[e^{-r\tau} g(x_\tau) \right] = w(x)$$

$$\tau_x^* = \inf_{\tau \geq 0} \{ \tau : w(x_\tau^*) = g(x_\tau^*) \}$$

2)

$$\sup_{\tau} \inf_{P \in P(x)} \mathbb{E}^P \left[e^{-r\tau} g(x_\tau) \right]$$

3)

$$\sup_{\tau} \sup_{P \in P(x)} \mathbb{E}^P \left[e^{-r\tau} g(x_\tau) \right]$$

$$4) \text{ dla } \alpha \in [0, 1]$$

$$\sup_{\tau} \left[\alpha \inf_{P \in P(x)} \mathbb{E}^P \left[e^{-r\tau} g(x_\tau) \right] + (1-\alpha) \sup_{P \in P(x)} \mathbb{E}^P \left[e^{-r\tau} g(x_\tau) \right] \right]$$

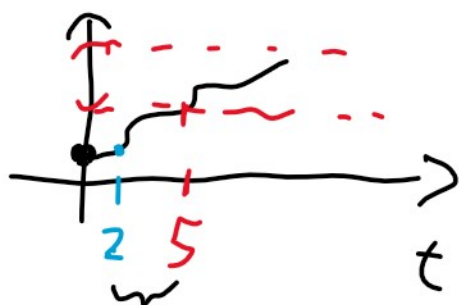
$$\sup_{\tau} \left[\alpha \inf_{P \in \mathcal{P}(x)} \mathbb{E}^P \left[e^{-r\tau} g(x_\tau) \right] + (1-\alpha) \sup_{P \in \mathcal{P}(x)} \mathbb{E}^P \left[e^{-r\tau} g(x_\tau) \right] \right]$$

Niech $(\tau_x)_{x \in \mathbb{R}^d}$ będzie rodziną momentów
 stopu, t.j. line zą optymalne dla problemu
 sterującego z $x \in \mathbb{R}^d$.

Def. Rodzina (τ_x) jest zgodna z warunkiem,
 gdy $\forall x \in \mathbb{R}^d \forall t \geq 0$ mamy

$$\tau_{B_t} = \tau_x - t \quad \text{na} \quad \{\tau_x \geq t\}$$

P-p.n. $\forall P \in \mathcal{P}(x)$.

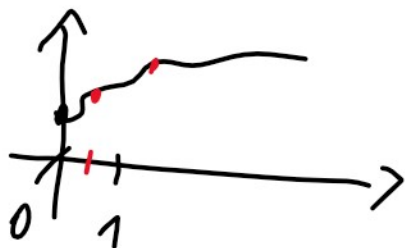


$$1) \tau_x = \inf \{ t \geq 0 : B_t \in A \}, \quad x \in \mathbb{R}^d$$

$$t = 2$$

$$\tau_{B_2} = 3 = 5 - 2 = \tau_x - 2$$

$$2) \tau_x = 1, \quad x \in \mathbb{R}^d$$



M - wz. polska

M - prz. polska
 (np.: $M = \mathbb{R}^d$, $M = \mathcal{C}([0, +\infty), \mathbb{R}^d)$,
 $M = \mathcal{C}([0, t], \mathbb{R}^d)$)

$B(M)$ - σ -ciężko zw. borelowstrich

$$B(M) := \mathcal{M}(M, B(M))$$

$$\mathcal{U}(M) := \bigcap_{P \in B(M)} (B(M))^P - \sigma\text{-ciężko zw.}$$

uniwersalne
mięcioty

$$P(C) := \inf \{ P(B) \mid B \in \mathcal{U}(M), C \subset B \}, C \in \mathcal{U}(M)$$

$$\Omega := \mathcal{C}([0, +\infty), \mathbb{R}^d)$$

$$B_t(\omega) = \omega_t, \quad t \geq 0, \omega \in \Omega$$

$$\mathbb{F}^B := (\mathcal{F}_t^B)_{t \geq 0} - \text{naturalna filtracja}$$

generowana przez B

$$\mathcal{F}_\infty^B = \mathcal{B}(\Omega)$$

$$\mathbb{F}^P = (\mathcal{F}_t^P)_{t \geq 0}, \text{ gdzie}$$

$$\mathcal{F}_t^P := (\mathcal{F}_t^B)^P, \quad t \geq 0, P \in B(\Omega)$$

$$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \text{ gdzie}$$

$$\mathcal{F}_t := \bigcap_{P \in B(\Omega)} \mathcal{F}_t^P, \quad t \geq 0$$

$$\overline{F}_t := \left(\frac{1}{\mathbb{P} \in \mathcal{D}(\Omega)} \right) \overline{f}_t^{\text{tr}}, t \geq 0$$

$$\overline{F}_\infty = \mathcal{U}(\Omega)$$

$$\tau_R := \inf \{ t \geq 0 : B_t \in R \}, R \in \mathcal{U}(\mathbb{R}^d)$$

$$\rho_R := \inf \{ t > 0 : B_t \in R \}, R \in \mathcal{U}(\mathbb{R}^d)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(x, R) := & \alpha \inf_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}(x)} \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[e^{-\tau_R} g(B_{\tau_R}) \right] + \\ & + (1-\alpha) \sup_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}(x)} \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[e^{-\rho_R} g(B_{\rho_R}) \right] \end{aligned}$$

$x \in \mathbb{R}^d, R \in \mathcal{U}(\mathbb{R}^d)$

Know. $\underbrace{e^{-r \cdot (+\infty)} g(B_{+\infty})}_{\text{ogr.}} := 0$

Do- $R \in \mathcal{U}(\mathbb{R}^d)$

$$S_R := \{ x \in \mathbb{R}^d : g(x) > \mathcal{J}(x, R) \}$$

$$I_R := \{ x \in \mathbb{R}^d : g(x) = \mathcal{J}(x, R) \}$$

$$C_R = \{ x \in \mathbb{R}^d : g(x) < \mathcal{J}(x, R) \}$$

Def. $\Theta(R) := S_R \cup (I_R \cap R), R \in \mathcal{U}(\mathbb{R}^d)$

Def. Powiemy, że zbiór $R \in \mathcal{U}(\mathbb{R}^d)$ jest

Def. Powiemy, że zbiór $R \in \mathcal{U}(\mathbb{R}^d)$ jest równomocny, gdy

$$\Theta(R) = R.$$

Ozn. $\mathcal{E}$ - rodziną równomocną.

Wz. $\mathcal{E} \neq \emptyset$, bo $R = \mathbb{R}^d \in \mathcal{E}$. Tak jest, bo

$$S_{\mathbb{R}^d} = \emptyset, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \quad V(x, \mathbb{R}^d) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^d$$

$$\text{zatem} \quad I_{\mathbb{R}^d} = \mathbb{R}^d, \quad \text{więc}$$

$$\Theta(\mathbb{R}^d) = S_{\mathbb{R}^d} \cup \left(\bigcup_{\mathbb{R}^d} I_{\mathbb{R}^d} \cap \mathbb{R}^d \right) = \mathbb{R}^d$$

$$\text{Ozn.} \quad V(x, R) = \max_{\substack{y \in \mathbb{R}^d \\ R \in \mathcal{U}(\mathbb{R}^d)}} (g(x), J(x, R)), \quad x \in \mathbb{R}^d$$

Def. Strategia $\hat{R} \in \mathcal{E}$ jest optymalna,

$$\text{gdy} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \forall R \in \mathcal{E}$$

$$V(x, \hat{R}) \geq V(x, R).$$

$$\tau_{\hat{R}}$$

Def. X, Y - prz. topologiczne, $g: X \rightarrow Y$

Powiemy, że g jest uniwersalnym miernikiem,

Ponieważ, że g jest uniwersalnie miernotną,
 mamy $g^{-1}(A) \in \mathcal{U}(X)$, $\forall A \in \mathcal{B}(Y)$.

Lemma 2.3: Dla $R \in \mathcal{U}(\mathbb{R}^d)$ miernotna
 τ_R oraz φ_R są monotonicznymi topologiami IF.

Lemma 2.6: Załóżmy, że $\{(x, P(x)) : x \in \mathbb{R}^d\} \subset$
 $\subset \mathbb{R}^d \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ jest uniwersalnie miernotny.

Wtedy, dla $R \in \mathcal{U}(\mathbb{R}^d)$ mamy, że

$$x \rightarrow \inf_{P \in P(x)} \#^{\mathbb{P}} [e^{-r\varphi_R} g(B_{\varphi_R})] \text{ oraz}$$

$$x \rightarrow \sup_{P \in P(x)} \#^{\mathbb{P}} [e^{-r\varphi_R} g(B_{\varphi_R})] \text{ są}$$

uniwersalnie miernotne.

Wn. $x \rightarrow f(x, R)$ jest uniw. miernotne.

Berstelmas, Skrzew (79 78):

Pr. 7.44 (BS)

Niech X, Y, Z - topologiczne,

$f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ - uniw. miernotne.

Wtedy $g \circ f$ - uniw. miernotne.

~ ~ ~ ~ ~

Cor. 7.46.7 (BS)

Niech X - borelowski, $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ - uniw.
mierzała.

Wtedy

$$\Theta_f: B(X) \ni \mu \rightarrow \int f d\mu \text{ jest}$$

uniw. mierzała.

Tw. 5.6.

Niech $(M_1, A_1), (M_2, A_2)$ - przestrzenie
mierzałe. Wtedy dla $G \in A_1 \otimes A_2$ mamy, że

$$\text{proj}_{M_1}(G) := \{x \in M_1 : \exists y \in M_2 : (x, y) \in G\}$$

walczą o $\hat{A}_1$, gdzie

$$\hat{A}_1 := \bigcap_{\mu \in M(M_1, A_1)} A_1^\mu.$$

Donoślemo lematu 2.6

Z lematu 2.3 wiemy, że S_R jest

uniw. mierzała.

$$\left[\{S_R, f\} \in \mathcal{F}_f \subset \mathcal{F} \right]$$

$$\mathcal{L} \quad \text{SR} \quad \dots \quad \mathcal{L} \\ g_R((-\infty, t])$$

zauważamy, że g - ciągła, zatem
z pr. 7.44 (BS)

$$\Omega \ni \omega \mapsto e^{-r S_R(\omega)} g(B_{S_R(\omega)}(\omega)) \in \mathbb{R}$$

jest unio. mierzalna.

Dalej, z wn. 7.46.7 (BS)

$$I_B(\Omega) \ni P \rightarrow \mathbb{E}^P [e^{-r S_R} g(B_{S_R})] \in \mathbb{R}$$

jest unio. mierzalna.

w szczególności, $\forall k \in \mathbb{R}$ zbiór

$$\{P \in I_B(\Omega) : \mathbb{E}^P [e^{-r S_R} g(B_{S_R})] < k\} = \emptyset$$

jest uniwersalnie mierzalny.

Skłóć

$$A := \{(x, P(x)) : x \in \mathbb{R}^d\} \cap (\mathbb{R}^d \times C) \text{ jest } \text{unio. mierzalny.}$$

Zauważmy, że zbiór

$$\{x \in \mathbb{R}^d : \inf_{P \in \mathcal{P}(x)} \mathbb{E}^P [e^{-r S_R} g(B_{S_R})] < k\} = (-\infty, k)$$

$$\mathbb{P} \in \mathcal{P}(X)$$

$$= \text{proj}_{\mathbb{R}^d} (A) =: D$$

$$\left[\text{proj}_{\mathbb{R}^d} (A) := \{ x \in \mathbb{R}^d : \exists \mathbb{P} \in \mathcal{P}(Z) \text{ s.t. } (x, \mathbb{P}) \in A \} \right]$$

Z tw. 5.6. więc D jest uniwersalnie
mierzalny.
