Classification des algèbres de Lie semisimples

Mrozinski Colin

Laboratoire de Mathématiques, CNRS UMR 6620
& Université Clermont-Ferrand II, France

Séminaire des doctorants
Mercredi 12 Janvier 2011

Algèbres de Lie

La representation *ad* et le théorème de Engel

Algèbres de Lie résolubles

La forme de Killing et algèbres de Lie semi-simples

Classification des algèbres de Lie simples

- le cas $sl_n(\mathbb{C})$
- Les invariants

Definition

Une *Algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ est un k-espace vectoriel muni d'une application bilineaire et antisymétrique

$$[.,.] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

vérifiant l'identité de Jacobi

$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0, \ x,y,z \in \mathfrak{g}$$

Exemple

- i Algèbre de Lie abelienne
- ii Algèbre de Lie définie par le commutateurs
- iii $gl_n(k)$, $sl_n(k)$

Différentes classes d'algèbres de Lie

- Algèbres de Lie *lineaires*
- Algèbres de Lie *nilpotentes*
- Algèbres de Lie *résolubles*
- Algèbres de Lie *semi-simples*
- Algèbres de Lie *simples*

Algèbres de Lie lineaires

Théorème (Ado)

Toute algèbre de Lie de dimension finie admet une representation fidèle.

Algèbres de Lie nilpotentes

Definition

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie.

- La serie centrale descendante :

$$\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g} \quad \mathfrak{g}^{n+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^n]$$

- $\mathfrak{g}$ est nilpotente si $\mathfrak{g}^n = (0)$ pour une certain n

Exemple

$n_n(k)$ les matrices triangulaires superieures strictes.

La représentation ad

Definition

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{ad}: & \mathfrak{g} & \to & gl(\mathfrak{g}) \\ & x & \mapsto & \mathrm{ad}_x : y \mapsto [x, y] \end{array}$$

Une classification des algèbres de Lie nilpotentes

Théorème (Engel)

$\mathfrak{g}$ est nilpotente si et seulement si tout ses éléments sont ad-nilpotents.

Corollaire

Soit $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de $gl(V)$, V de dimension finie. Il existe une base de V telles que les matrices associées de $\mathfrak{g}$ sont dans $n_n(k)$

Algèbres de Lie résolubles

Definition

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie.

- La serie centrale descendante :

$$\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g} \quad \mathfrak{g}^{(n+1)} = [\mathfrak{g}^{(n)}, \mathfrak{g}^{(n)}]$$

- $\mathfrak{g}$ est résoluble si $\mathfrak{g}^{(n)} = (0)$ pour une certain n

Exemple

- Les algèbres de Lie nilpotentes
- $t_n(k)$ les matrices triangulaires superieures.

Une classification des algèbres de Lie résolubles

Théorème (Lie)

Soit $\mathfrak{g}$ une sous algèbre résoluble de $gl(V)$, V de dimension finie. Il existe une base de V telle que les matrices de $\mathfrak{g}$ sont dans $t_n(k)$.

Un critère de résolubilité

Théorème (Cartan)

Soit $\mathfrak{g}$ une sous algèbre de $gl(V)$, V de dimension finie. Supposons que

$$Tr(xy) = 0 \textit{ pour } x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], y \in \mathfrak{g}$$

Alors $\mathfrak{g}$ est résoluble.

Corollaire

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie telle que

$$Tr(ad_x ad_y) = 0) \textit{ pour } x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], y \in \mathfrak{g}$$

Alors $\mathfrak{g}$ est résoluble.

La forme de Killing

Definition

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. On appelle *forme de Killing* l'application

$$\begin{array}{rccc} \kappa : & \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} & \longrightarrow & k \\ & (x, y) & \longmapsto & \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y) \end{array}$$

Faits

La forme de Killing est bilineaire, symétrique et associative.

Algèbres de Lie semi-simples

Definition

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie.

- On note $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ le plus grand idéal résoluble de $\mathfrak{g}$.
- $\mathfrak{g}$ est semi-simple si $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) = (0)$

Exemple

- $sl_n(k)$
- $\mathfrak{g}/\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$

Caracterisation géométrique

Théorème (Cartan)

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Alors $\mathfrak{g}$ est semi-simple si et seulement si κ est non dégénérée.

Algèbres de Lie simples

Definition

Une algèbre de Lie est dite simple si elle ne possède pas d'idéals propre.

Proposition

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple. Alors $\mathfrak{g}$ se décompose de manière unique en

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k$$

où $\mathfrak{g}_i$ est une algèbre de Lie simple.

Le cas de $sl_n(\mathbb{C})$

$$sl_n(\mathbb{C}) = \mathfrak{h} \oplus \sum_{i \neq j} \mathbb{C} E_{i,j}$$ (Décomposition de Cartan)

$$\alpha_i : \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{h} \mapsto \lambda_i - \lambda_{i+1}$$ (Racines)

À l'algèbre de Lie $sl_n(k)$ on a associé un couple $(\mathfrak{h}, \Phi)$

Sous-algèbres de Cartan

Definition

Une sous-algèbre $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Cartan (CSA) si

- $\mathfrak{h}$ est nilpotente
- $\mathfrak{h} = N(\mathfrak{h})$

Faits

- Tout algèbre de Lie simple possède une sous-algèbre de Cartan
- $\mathfrak{g}$ est un $\mathfrak{h}$-module pour *ad*
- Une sous-algèbre de Cartan est abelienne et composée d'éléments semi-simples.

Décomposition de Cartan

Théorème

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple, $\mathfrak{h}$ une sous algèbre de Cartan. On a alors la décomposition suivante :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\alpha$$

où $\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g}; [h, x] = \alpha(h)x,\ \forall\, h \in \mathfrak{h}\}$

Système de racines

On appelle système de racines associé à $\mathfrak{g}$ l'ensemble de formes lineaires

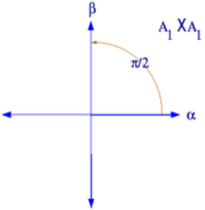
$$\Phi = \{\alpha \in \mathfrak{h}^*; \mathfrak{g}_\alpha \neq (0)\}$$

Faits

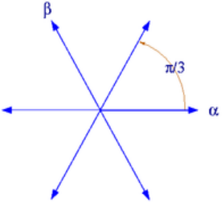
- Φ engendre $\mathfrak{h}^*$
- Si $\alpha \in \Phi$ alors $-\alpha \in \Phi$
- Propriétés géometriques

On peut developper une axiomatique et une théorie des systèmes de racines abstrait.

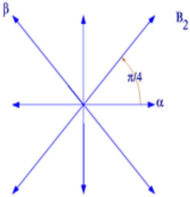
Les systèmes de racines de rang 2



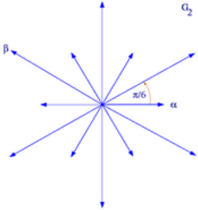
Type $A_1 \times A_1$



Type A_2



Type B_2



Type G_2

Un invariant très puissant

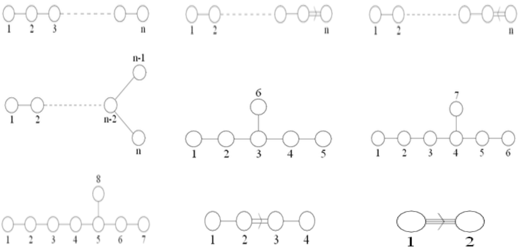
Théorème

Soient $(\mathfrak{g}_1, \Phi_1)$ *et* $(\mathfrak{g}_2, \Phi_2)$ *2 algèbres de Lie simples munies d'un système de racines.*
Supposons que $\Phi_1 \simeq \Phi_2$*, alors* $\mathfrak{g}_1 \simeq \mathfrak{g}_2$*.*

Classification des systèmes de racines

Théorème

Si Φ est un système de racines de rang l, alors diagramme de Dynkin est l'un des suivants :



De plus, pour chaque diagrammes admissibles, il existe un systeme de racines.

Reconstruction des algèbres de Lie correspondantes

Théorème (Serre)

Fixons un système de racines Φ, de base $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie engendré par les $3l$ éléments $\{x_i, y_i, h_i; 1 \leq i \leq l\}$ soumis aux relations

$$\begin{array}{lll}
(S1) & [h_i, h_j] = 0 & (1 \leq i, j \leq l) \\
(S2) & [x_i, y_i] = h_i, [x_i, y_j] = 0 \text{ si } i \neq j & \\
(S3) & [h_i, x_j] = < \alpha_j, \alpha_i > x_j, [h_i, y_j] = - < \alpha_j, \alpha_i > y_j & \\
(S_{ij}^+) & (ad_{x_i})^{-<\alpha_j, \alpha_i>+1}(x_j) = 0 & (i \neq j) \\
(S_{ij}^-) & (ad_{y_i})^{-<\alpha_j, \alpha_i>+1}(y_j) = 0 & (i \neq j)
\end{array}$$

Alors $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semisimple, d'algèbre de Cartan engendrée par les h_i et de système de racines Φ.

Listes des algèbres de Lie simples

Les algèbres de Lie classiques :

$$\begin{array}{ll} (A_n) & sl_{n+1}(\mathbb{C}) \\ (B_n) & so_{2n+1}(\mathbb{C}) \\ (C_n) & sp_{2n}(\mathbb{C}) \\ (D_n) & so_{2n}(\mathbb{C}) \end{array}$$

Les algèbres de Lie exceptionnelles :

$$E_6, E_7, E_8, F_4 \text{ et } G_2$$