Département de mathématiques et informatique
L1S1, module A ou B Maths

Chapitre 3

Suites numériques

➔ Remarque importante.

Ce cours n'est *pas* indépendant du cours de Mathématiques pour tous.

Ce document est une version remaniée d'un polycopié écrit par Emmanuel Royer afin de s'adapter aux modifications des programmes (en vigueur à partir de l'année 2013-2014).

Table des matières

1 Généralités **4**
1.1 Inégalités dans $\mathbb{R}$ 4
1.2 Suites réelles – définitions et opérations 6

2 Limite d'une suite **12**
2.1 Convergence vers une limite finie 12
2.2 Limite infinie 18

3 Comparaisons de suites **25**
3.1 Inégalités et limites 25
3.2 Croissance polynômiale et croissance exponentielle 27
3.3 Approximation décimale des nombres réels 28

4 Convergence des suites monotones **30**

5 Suites extraites **33**

6 Quelques suites particulières **37**
6.1 Suites arithmético-géométriques 37
6.2 Suites définies par une récurrence linéaire d'ordre 2 38
6.2.1 Exemples 39

7 Exercices **42**

1 Généralités

1.1) Inégalités dans $\mathbb{R}$

Si a et b sont deux nombres réels, on dit que a est supérieur ou égal à b et on note $a \geq b$ si $a - b$ est positif ou nul. On a alors les propriétés suivantes.

1) *Réflexivité* : pour tout réel a, $a \geq a$.

2) *Antisymétrie* : pour tous réels a et b, si $a \geq b$ et $b \geq a$ alors $a = b$.

3) *Transitivité* : pour tous réels a, b et c, si $a \geq b$ et $b \geq c$ alors $a \geq c$.

Ces trois propriétés traduisent le fait que la relation « être supérieur ou égal à » est une *relation d'ordre*. D'autre part, étant donnés deux réels, l'un est nécessairement supérieur ou égal à l'autre : pour tous réels a et b, on a $a \geq b$ ou $b \geq a$ [a]. On dit alors que la relation « être supérieur ou égal à » est une *relation d'ordre total*.

Exercice 1– Dans $\mathbb{N}$ on définit la relation « être divisible » de la façon suivante : si a et b sont deux entiers, a est divisible par b s'il existe un entier k tel que $a = bk$. Montrer que cette relation est une relation d'ordre mais qu'elle n'est pas totale.

On dit que a est inférieur ou égal à b (on note $a \leq b$) si b est supérieur ou égal à a. Enfin, a est strictement supérieur à b (on note $a > b$) si a est supérieur ou égal à b mais n'est pas égal à b et a est strictement inférieur à b si b est strictement supérieur à a (on note $a < b$).

Exercice 2– Montrer que la relation « être strictement supérieur à » n'est pas une relation d'ordre.

Rappelons les règles de calculs avec les inégalités.

***Proposition* 3–** *Soit a, b, c, a', b' des nombres réels.*

1) Addition d'un réel : si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$.

2) Addition d'une inégalité : si $a \leq b$ et $a' \leq b'$ alors $a + a' \leq b + b'$.

3) Multiplication par un réel positif *: si $a \leq b$ et si $c \geq 0$ alors $ac \leq bc$.*

4) Multiplication par un réel négatif *: si $a \leq b$ et si $c \leq 0$ alors $bc \leq ac$.*

5) Inversion d'une inégalité de nombres positifs : si $a \leq b$ et si $a > 0$ alors $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$.

6) Inversion d'une inégalité de nombres négatifs : si $a \leq b$ et si $b < 0$ alors $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$.

Exercice 4– Si x est positif ou nul, on rappelle que $\sqrt{x}$ est l'unique réel positif ou nul dont le carré est x. En utilisant l'égalité $b - a = \left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right)\left(\sqrt{b} + \sqrt{a}\right)$ montrer que si $0 \leq a \leq b$ alors $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

a. Noter qu'on peut avoir les deux en même temps. Le *ou* en mathématique n'est pas exclusif.

La notion de *valeur absolue* permet de ne travailler qu'avec des nombres positifs ou nuls. Si a et b sont des nombres réels on définit le maximum $\max(a,b)$ et le minimum $\min(a,b)$ de a et b par

$$\max(a,b) = \begin{cases} a & \text{si } a \geq b \\ b & \text{sinon} \end{cases} \qquad \min(a,b) = \begin{cases} a & \text{si } a \leq b \\ b & \text{sinon} \end{cases}.$$

Définition 5– *Si a est un nombre réel alors*

$$|a| = \max(a,-a) = \begin{cases} a & si\ a \geq 0 \\ -a & si\ a < 0. \end{cases}$$

Exercice 6– Montrez $\sqrt{a^2} = |a|$.

***Proposition* 7** (Propriétés de la valeur absolue)– *Soit x et y deux nombres réels.*

- $|x| = 0$ *si et seulement si* $x = 0$.
- $|-x| = |x|$.
- $|xy| = |x| \cdot |y|$.
- *Inégalité triangulaire :* $|x+y| \leq |x| + |y|$.
- $\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$.

Démonstration. 1) Si $|x| = 0$ alors $\max(x,-x) = 0$ donc $x = 0$ ou $-x = 0$, c'est-à-dire $x = 0$. Réciproquement, si $x = 0$ alors $-x = 0$ donc $\max(x,-x) = 0$.

2) C'est un cas particulier de $|xy| = |x| \cdot |y|$ avec $y = -1$. Nous démontrons cette égalité ci-dessous.

3) a) Si $x \geq 0$ et $y \geq 0$ alors $xy \geq 0$ donc $|xy| = xy$. Mais dans ce cas $|x| = x$ et $|y| = y$ donc $xy = |x| \cdot |y|$.

   b) Si $x \geq 0$ et $y < 0$ alors $xy \leq 0$ donc $|xy| = -xy$. Mais dans ce cas $|x| = x$ et $|y| = -y$ donc $-xy = |x| \cdot |y|$.

   c) Si $x < 0$ et $y \geq 0$ alors $xy \leq 0$ donc $|xy| = -xy$. Mais dans ce cas $|x| = -x$ et $|y| = y$ donc $-xy = |x| \cdot |y|$.

   d) Si $x < 0$ et $y < 0$ alors $xy \geq 0$ donc $|xy| = xy$. Mais dans ce cas $|x| = -x$ et $|y| = -y$ donc $xy = |x| \cdot |y|$.

4) Si $x \geq 0$ on a $x = |x|$ et si $x \leq 0$ on a $x = -|x|$. Donc $-|x| \leq x \leq |x|$ pour tout x. De même $-|y| \leq y \leq |y|$. On en déduit $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$. Si $x + y \geq 0$ on en déduit

$$|x+y| = x + y \leq |x| + |y|.$$

Si $x + y < 0$ alors $|x+y| = -(x+y)$; or $x + y \geq -(|x| + |y|)$ donc $-(x+y) \leq |x| + |y|$ et donc $|x+y| \leq |x| + |y|$.

5) Puisque $(x-y)^2 \geq 0$ on a $|x-y|^2 = (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$. Or $-xy \geq -|xy|$ donc $|x-y|^2 \geq x^2 - 2|xy| + y^2$ c'est-à-dire $|x-y|^2 \geq (|x| - |y|)^2$. En prenant la racine carrée de cette inégalité, on obtient le résultat énoncé.

□

Exercice 8– Monter que $|x| \leq a$ si et seulement si $-a \leq x \leq a$.

Enfin, on introduit la partie entière d'un réel comme étant le plus grand entier inférieur ou égal à ce réel.

Définition 9– *Si $x \in \mathbb{R}$, on appelle* partie entière *de x et on note $\lfloor x \rfloor$ (ou $\mathrm{E}(x)$) l'unique entier inférieur ou égal à x tel que l'entier $\lfloor x \rfloor + 1$ est strictement supérieur à x. On a donc*

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Exemple 10– On a $\lfloor -1,2 \rfloor = -2$ et $\lfloor 1,2 \rfloor = 1$.

1.2) Suites réelles – définitions et opérations

Une suite réelle est une application d'un sous-ensemble $\mathbb{Z}_{\geq n_0} = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq n_0\}$ dans $\mathbb{R}$. Si $u : \mathbb{Z}_{\geq n_0} \to \mathbb{R}$ est une suite réelle, on note souvent u_n plutôt que $u(n)$ sa valeur en n. Ce réel s'appelle le *terme d'indice n* de la suite. Le réel u_{n_0} s'appelle le premier terme de la suite. On note aussi $(u_n)_{n \geq n_0}$ (ou parfois juste (u_n)) la suite u.

Dans la suite, nous omettrons le terme réelle et parlerons de *suite* quand nous devrions parler de *suite réelle*.

Une suite peut être définie à l'aide d'une formule permettant le calcul direct de chaque terme de la suite, par exemple $\left(1 - \frac{1}{n-6}\right)_{n \geq 7}$. Cette formule s'appelle le *terme général* de la suite u. Une suite peut aussi être dfinie par récurrence, c'est-à-dire par la donnée des k premiers termes et d'une relation entre u_{n+k} et $u_{n+k-1}, \ldots, u_n$ pour tout $n \geq n_0$.

Exemple 11– On définit une suite en $(u_n)_{n \geq 1}$ en posant

$$\begin{aligned} &u_1 = 1 \quad u_2 = 2 \quad u_3 = 3 \\ &u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} + u_n \quad \text{pour tout } n \geq 1. \end{aligned}$$

Exemple 12– Soit $a \geq 1$ un entier quelconque. On définit une suite en $(u_n)_{n \geq 0}$ en posant

$$\begin{aligned} &u_0 = a \\ &u_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2} u_n & \text{si } u_n \text{ est pair} \\ 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair} \end{cases} \end{aligned}$$

pour tout $n \geq 0$.

Définition 13– *Soit $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ et $v = (v_n)_{n \geq n_0}$ deux suites. Leur somme $u + v$ est la suite dont le terme d'indice n est $u_n + v_n$ pour tout entier $n \geq n_0$. Autrement dit :*

$$(u + v)_n = u_n + v_n$$

pour tout entier $n \geq n_0$.

Définition 14– *Soit $u = (u_n)_{n\geq n_0}$ une suite et λ un réel. Le produit de λ par u, noté λu est une suite dont le terme d'indice n est λu_n pour tout entier $n \geq n_0$. Autrement dit :*

$$(\lambda u)_n = \lambda u_n$$

pour tout entier $n \geq n_0$.

Exemple 15– Soit u et v les suites définies respectivement par

$$u_n = 3n + 2 \quad \text{et} \quad v_n = 2 + \frac{1}{n}$$

pour tout entier $n \geq 1$. La suite $5u - 4v$ est la suite w définie pour tout $n \geq 1$ par

$$w_n = 15n + 2 - \frac{4}{n}.$$

Une troisième opération impliquant les suites est le produit de deux suites.

Définition 16– *Soit $u = (u_n)_{n\geq n_0}$ et $v = (v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites. Leur produit uv est la suite dont le terme d'indice n est $u_n v_n$ pour tout entier $n \geq n_0$. Autrement dit :*

$$(uv)_n = u_n v_n$$

pour tout entier $n \geq n_0$.

Parmi les exemples de suites qu'il faut bien connaître, il y a les suites *arithmétiques*.

Définition 17– *Soit r un réel. Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite* arithmétique *de raison r si $u_{n+1} = u_n + r$ pour tout $n \geq n_0$.*

Exemple 18– La suite $(3+5n)_{n\geq -2}$ est arithmétique de raison 5 car $3+5(n+1)-(3+5n) = 5$ pour tout $n \geq -2$.

Toutes les suites arithmétiques sont semblables à celle de l'exemple précédent, ainsi que le montre la proposition suivante.

***Proposition* 19–** *Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est arithmétique de raison r alors*

$$u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$$

pour tout $n \geq n_0$.

Démonstration. On appelle $\mathcal{E}(n)$ l'égalité $u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$. L'égalité $\mathcal{E}(n_0)$ est vraie : $u_{n_0} = u_{n_0} + 0r$. Soit $n \geq n_0$, supposons vraie l'égalité $\mathcal{E}(n)$. Alors,

$$u_{n+1} = u_n + r = u_{n_0} + (n - n_0)r + r = u_{n_0} + (n + 1 - n_0)r$$

et donc $\mathcal{E}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, on en déduit que $\mathcal{E}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$. □

On peut alors calculer la somme des premiers termes de toute suite arithmétique.

***Proposition* 20–** *Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est arithmétique de raison r alors la somme des $k+1$ premiers termes de cette suite est*

$$\sum_{j=0}^{k} u_{n_0+j} = u_{n_0} + u_{n_0+1} + \cdots + u_{n_0+k} = (k+1)u_{n_0} + \frac{k(k+1)}{2}r.$$

pour tout $k \geq 0$.

Démonstration. On a

$$\sum_{j=0}^{k} u_{n_0+j} = \sum_{j=0}^{k} \Big(u_{n_0} + jr\Big) = (k+1)u_{n_0} + r\sum_{j=0}^{k} j = (k+1)u_{n_0} + \frac{k(k+1)}{2}r.$$

□

Pour retenir la proposition 20, on peut remarque que $\dfrac{k(k+1)}{2}r$ est le produit de la somme des k premiers entiers naturels avec la raison et que $(k+1)u_{n_0}$ est le premier terme multiplié par le nombre de termes de la somme.

Il faut aussi connaître les suites géométriques.

Définition 21– *Soit q un réel. Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite* géométrique *de raison q si $u_{n+1} = qu_n$ pour tout $n \geq n_0$.*

Exemple 22– La suite $(3\cdot 5^n)_{n\geq -2}$ est géométrique de raison 5 car $3\cdot 5^{n+1} = 5\cdot 3\cdot 5^n$ pour tout $n \geq -2$.

Toutes les suites géométriques sont semblables à celle de l'exemple précédent, ainsi que le montre la proposition suivante.

***Proposition* 23–** *Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est géométrique de raison q alors*

$$u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}$$

pour tout $n \geq n_0$.

Démonstration. Si $q = 0$, le résultat est vrai à condition de faire la convention $0^0 = 1$. On suppose désormais $q \neq 0$. On appelle $\mathcal{E}(n)$ l'égalité $u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}$. L'égalité $\mathcal{E}(n_0)$ est vraie : $u_{n_0} = u_{n_0} q^0$. Soit $n \geq n_0$, supposons vraie l'égalité $\mathcal{E}(n)$. Alors,

$$u_{n+1} = qu_n = qu_{n_0} q^{n-n_0} = u_{n_0} q^{n+1-n_0}$$

et donc $\mathcal{E}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, on en déduit que $\mathcal{E}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$. □

On peut alors calculer la somme des premiers termes de toute suite géométrique.

***Proposition* 24–** *Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est géométrique de raison q alors la somme des $k+1$ premiers termes de cette suite est*

$$\sum_{j=0}^{k} u_{n_0+j} = \begin{cases} (k+1)u_{n_0} & \text{si } q = 1 \\ u_{n_0}\dfrac{q^{k+1}-1}{q-1} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$$

pour tout $k \geq 0$.

Démonstration. Une suite géométrique de raison 1 est constante et égale à u_{n_0}. La somme de ses $k+1$ premiers termes est donc $(k+1)u_{n_0}$. On suppose maintenant $q \neq 1$. On a

$$\sum_{j=0}^{k} u_{n_0+j} = \sum_{j=0}^{k} (q^j u_{n_0}) = u_{n_0} \sum_{j=0}^{k} q^j.$$

Pour tout $n \geq 0$, on note $\mathcal{E}(n)$ l'égalité

$$\sum_{j=0}^{n} q^j = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}.$$

L'égalité $\mathcal{E}(0)$ est vraie. Supposons vraie l'égalité $\mathcal{E}(n)$. Alors,

$$\sum_{j=0}^{n+1} q^j = \sum_{j=0}^{n} q^j + q^{n+1} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} + q^{n+1} = \frac{q^{n+1}-1+q^{n+2}-q^{n+1}}{q-1} = \frac{q^{n+2}-1}{q-1}.$$

L'égalité $\mathcal{E}(n+1)$ est donc conséquence de l'égalité $\mathcal{E}(n)$. Par récurrence, l'égalité $\mathcal{E}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$ et on termine la preuve en prenant $n = k$. □

Les suites croissantes et décroissantes jouent un rôle important dans l'étude des suites.

Définition 25– *Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite.*

1) *On dit qu'elle est* croissante *si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \geq n_0$. On dit qu'elle est* strictement croissante *si $u_{n+1} > u_n$ pour tout $n \geq n_0$.*
2) *On dit qu'elle est* décroissante *si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \geq n_0$. On dit qu'elle est* strictement décroissante *si $u_{n+1} < u_n$ pour tout $n \geq n_0$.*
3) *On dit qu'elle est* monotone *si elle est soit croissante, soit décroissante.*
4) *On dit qu'elle est constante si, pour tout $n \geq n_0$, on a $u_n = u_{n_0}$.*
5) *On dit qu'elle est stationnaire s'il existe un entier $n_1 \geq n_0$ tel que, pour tout $n \geq n_1$, on a $u_n = u_{n_1}$.*

Exemple 26– i) Les suites arithmétiques de raison positive sont croissantes.

ii) Les suites arithmétiques de raison négative sont décroissantes.

iii) Les suites géométriques de raison supérieure à 1 sont croissantes si leur premier terme est positif et décroissantes sinon.

iv) Les suites géométriques de raison comprise entre 0 et 1 sont décroissantes si leur premier terme est positif et croissantes sinon.

v) Les suites géométriques de raison strictement négatives et premier terme non nul ne sont ni croissantes ni décroissantes.

vi) Les suites constantes sont stationnaires mais les suites stationnaires ne sont pas nécessairement contantes.

Exemple 27– i) La suite $(\ln(n))_{n\geq 1}$ est strictement croissante [b]. En effet

$$\ln(n+1)-\ln(n)=\ln\frac{n+1}{n}=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>0.$$

ii) La suite $(\exp(n))_{n\geq 0}$ est strictement croissante. C'est une suite géométrique de raison $e=\exp(1)>1$.

iii) Soit u, la suite définie pour tout entier $n\geq 1$ par $u_n=\dfrac{n}{2^n}$. Pour tout n, on a $u_n\neq 0$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Si $n\geq 1$, on en déduit

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\leq 1.$$

Pour tout $n\geq 1$, on a $u_n>0$ et donc $u_{n+1}\leq u_n$. La suite u est donc décroissante.

iv) Soit u, la suite définie pour tout entier $n\geq 1$ par $u_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$. Pour tout entier $n\geq 1$, on a $u_{2n}>u_{2n+1}$ (puisque $u_{2n}>0$ et $u_{2n+1}<0$) alors que $u_{2n+1}<u_{2n+2}$. La suite u n'est dons pas monotone.

Exemple 28– i) Si la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante, alors la suite $(-u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante.

ii) Si la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante, alors la suite $(-u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante.

Exemple 29– Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application croissante [c]. On définit une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ en fixant la valeur de u_{n_0} et en posant $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\geq n_0$. La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est monotone. On a en effet l'alternative suivante.

b. On rappelle que les fonctions logarithme et exponentielle ont été étudiées lors du cours de *Mathématiques pour tous*.

c. Vous avez vu en *Mathématiques pour tous* que cela signifie que $f(x)\geq f(y)$ pour tous x et y tels que $x\geq y$

i) Soit $u_{n_0+1} \geq u_{n_0}$. On note $\mathcal{C}(n)$ l'égalité $u_{n+1} \geq u_n$. L'égalité $\mathcal{C}(n_0)$ est vraie. Puisque f croît, pour tout $n \geq n_0$, l'égalité $\mathcal{C}(n)$ implique $f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$, c'est-à-dire $u_{n+2} \geq u_{n+1}$ et donc $\mathcal{C}(n+1)$. Par récurrence, on en déduit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante.

ii) Soit $u_{n_0+1} \leq u_{n_0}$. On note $\mathcal{D}(n)$ l'égalité $u_{n+1} \leq u_n$. L'égalité $\mathcal{D}(n_0)$ est vraie. Puisque f croît, pour tout $n \geq n_0$, l'égalité $\mathcal{D}(n)$ implique $f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$, c'est-à-dire $u_{n+2} \leq u_{n+1}$ et donc $\mathcal{D}(n+1)$. Par récurrence, on en déduit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante.

Remarque 30– On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante *à partir d'un certain rang* s'il existe un entier $n_1 \geq n_0$ tel que la suite $(u_n)_{n\geq n_1}$ est croissante.

Remarque 31– De façon générale, une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite satisfaire une propriété *à partir d'un certain rang* s'il existe un entier n_1 telle que la suite $(u_n)_{n\geq n_1}$ satisfait cette propriété.

La suite $(\cos(n))_{n>0}$ ne prend ses valeurs que dans $[-1,1]$. En revanche, la suite $(n)_{n\geq 0}$ peut prendre des valeurs arbitrairement grandes et la suite $(-\ln(n))_{n\geq 1}$ peut prendre des valeurs arbitrairement petite. On formalise ces notions.

Définition 32– *Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite.*

1) On dit qu'elle est majorée *s'il existe un réel* M *tel que, pour tout $n \geq n_0$ on a $u_n \leq$ M.*

2) On dit qu'elle est minorée *s'il existe un réel m tel que, pour tout $n \geq n_0$ on a $u_n \geq m$.*

3) On dit qu'elle est bornée *si elle est à la fois minorée et majorée.*

Remarque 33– Il faut remarquer qu'une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est bornée si et seulement s'il existe un réel M tel que $-\mathrm{M} \leq u_n \leq \mathrm{M}$ pour tout $n \geq n_0$, c'est-à-dire si et seulement s'il existe un réel M tel que $|u_n| \leq \mathrm{M}$ pour tout $n \geq n_0$.

a) En effet, considérons une suite u bornée. Il existe m_0 et m_1 tels que, pour tout entier $n \geq n_0$, on a $m_0 \leq u_n \leq m_1$. Puisque $m_0 \geq -|m_0|$ et $m_1 \leq |m_1|$, on a donc $-|m_0| \leq u_n \leq |m_1|$ puis $-\max\{|m_0|,|m_1|\} \leq u_n \leq \max\{|m_0|,|m_1|\}$ pour tout $n \geq n_0$. En posant $\mathrm{M} = \max\{|m_0|,|m_1|\}$, on obtient $|u_n| \leq \mathrm{M}$ pour tout $n \geq n_0$.

b) Réciproquement, supposons $|u_n| \leq \mathrm{M}$ pour tout $n \geq n_0$. Alors $-\mathrm{M} \leq u_n \leq \mathrm{M}$ pour tout $n \geq n_0$. La suite u est donc minorée par $-\mathrm{M}$ et majorée par M. Elle est donc bornée.

Exemple 34– La suite $u = \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\geq 0}$ est majorée par 1 (en effet elle est décroissante donc $u_n \leq u_0$ pour tout n, et $u_0 = 1$) et minorée par 0. Elle est donc bornée. Notons que 1 n'est pas le seul réel qui majore u, tout réel $\mathrm{M} \geq 1$ majore u. De même, 0 n'est pas le seul réel qui minore u puisque tout réel $m \leq 0$ minore u

2 Limite d'une suite

2.1) Convergence vers une limite finie

L'objectif de cette partie est de rendre compte des situations où les valeurs d'une suite peuvent être rendues aussi proches que voulu d'un réel donné sans ne plus s'en éloigner.

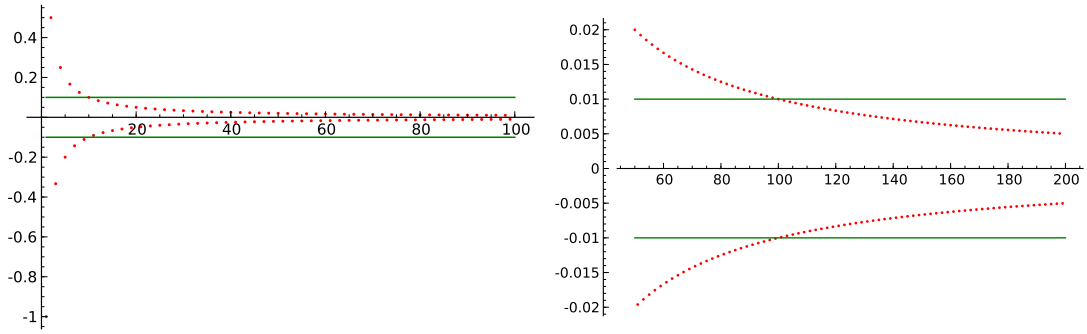
Définition 35– *Soit* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *une suite et* ℓ *un réel. On dit que* $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge *vers* ℓ, *ce qu'on note*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \quad ou \quad u_n \to \ell$$

si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, *il existe un entier* $N \geq n_0$ *tel que, pour tout entier* $n \geq N$, *on a* $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

Imaginez que l'on trace dans un plan muni d'un repère orthonormal (Oxy) les couples (n, u_n) pour tout $n \geq n_0$. La définition de la convergence vers ℓ signifie que, quelque soit la bande horizontale choisie autour de la droite $y = \ell$, dès que n est assez grand, toutes les valeurs u_n sont confinées dans cette bande. On peut se reporter à la figure 1 pour une illustration de la définition.

Remarque 36– Pour dire qu'une suite converge vers ℓ, on dit aussi qu'elle tend vers ℓ ou qu'elle a pour *limite* ℓ. Une suite est dite *convergente* si elle converge vers un réel. Si une suite n'admet pas de limite réelle, on dit qu'elle diverge.



(a) $\varepsilon = 0,1$, $N = 10$ (b) $\varepsilon = 0,01$, $N = 100$

FIGURE 1: Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $n \geq N$ on a $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| \leq \varepsilon$.

Exemple 37–

1) Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite stationnaire. Il existe un réel c et un entier $n_1 \geq n_0$ tel que, pour tout $n \geq n_1$ on a $u_n = c$. Montrons que la suite converge vers c. Ayant fixé $\varepsilon > 0$, on choisit $N = n_1 + 1$ et pour tout $n \geq N$, on a $|u_n - c| = 0 \leq \varepsilon$.

Toute suite stationnaire est donc convergente. Les exemples suivants montrent qu'il existe des suites convergentes qui ne sont pas stationnaires.

2) Montrons que la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n>0}$ tend vers 0. Soit $\varepsilon > 0$, on choisit pour N le premier entier strictement supérieur à $\frac{1}{\varepsilon}$, c'est-à-dire $N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$. Si $n \geq N$ on a alors $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$ et donc $\left|\frac{1}{n} - 0\right| \leq \varepsilon$.

3) On généralise l'exemple précédent. Soit α un réel positif strictement positif. Montrons que la suite [d] $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n>0}$ tend vers 0.

Soit $\varepsilon > 0$, on choisit pour N le premier entier strictement supérieur à $\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/\alpha}$, c'est-à-dire $N = \left\lfloor \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/\alpha} \right\rfloor + 1$. Si $n \geq N$ on a alors $n \geq \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/\alpha}$ puis $n^\alpha \geq \frac{1}{\varepsilon}$ et donc $\left|\frac{1}{n^\alpha} - 0\right| \leq \varepsilon$.

Cet exemple montre en particulier que les suites $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n>0}$ et $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n>0}$ tendent vers 0.

4) Soit q un réel tel que $|q| < 1$. Montrons que la suite $(q^n)_{n>0}$ tend vers 0.
Si $q = 0$, on a $q^n = 0$ pour tout $n > 0$; ayant fixé $\varepsilon > 0$, on choisit $N = 1$ et pour tout $n \geq N$, on a $|q^n - 0| = 0 \leq \varepsilon$.
Supposons donc $q \neq 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour N, on choisit un entier qui soit à la fois strictement positif et supérieur à $\frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|}$, par exemple $N = \max\left(\left\lfloor \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|} \right\rfloor + 1, 0\right)$. Si $n \geq N$, on a alors $n \geq \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|}$. Puisque $|q| < 1$, on en déduit $n \ln |q| \leq \ln \varepsilon$ puis, en prenant l'exponentielle de cette égalité $|q|^n \leq \varepsilon$. Ainsi $|q^n - 0| \leq \varepsilon$.

5) Considérons la suite $\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)_{n\geq 0}$. On a

$$\frac{2n+1}{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1}$$

d'où

$$\left|\frac{2n+1}{n+1} - 2\right| = \frac{1}{n+1}.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et N un entier positif supérieur à $\frac{1}{\varepsilon} - 1$, par exemple $N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right\rfloor + 1$. Pour tout $n \geq N$ on a alors $\left|\frac{2n+1}{n+1} - 2\right| = \frac{1}{n+1} \leq \varepsilon$. Ainsi, la suite $\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)_{n\geq 0}$ converge vers 2.

***Proposition* 38–** *Si une suite converge vers un réel, ce réel est unique.*

Démonstration. Soit ℓ et ℓ' deux nombres réels et $u = (u_n)_{n\geq n_0}$ une suite dont on suppose qu'elle converge vers ℓ et ℓ'. Montrons qu'alors $\ell = \ell'$. Supposons, par l'absurde, que $\ell \neq \ell'$. On pose alors $\varepsilon = \frac{|\ell - \ell'|}{3}$ qui est un réel strictement positif. Puisque u converge

d. On rappelle la définition vue en cours de *Mathématiques pour tous*. Pour tout $a > 0$ et tout réel x, on pose $a^x = e^{x \ln(a)}$.

vers ℓ, il existe un entier $N \geq n_0$ tel que si $n \geq N$ alors $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. Puisque u converge aussi vers ℓ', il existe un entier $N' \geq n_0$ tel que si $n \geq N'$ alors $|u_n - \ell'| \leq \varepsilon$. Pour tout $n \geq \max(N, N')$ on a donc

$$|\ell - \ell'| = \left|(u_n - \ell') - (u_n - \ell)\right| \leq |u_n - \ell'| + |u_n - \ell| \leq 2\varepsilon = \frac{2}{3}|\ell - \ell'|.$$

Puisque $|\ell - \ell'| > 0$ on en déduit l'inégalité contradictoire $1 \leq \frac{2}{3}$. Ainsi $\ell = \ell'$. □

Exercice 39– On considère deux suites $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ et $v = (v_n)_{n \geq n_0}$. On suppose qu'il existe $n_1 \geq n_0$ tel que $u_n = v_n$ pout tout entier $n \geq n_1$. Montrer que si la suite u tend vers un réel ℓ, alors la suite v tend aussi vers ℓ.

Exercice 40– On considère une suite $u = (u_n)_{n \geq n_0}$.

a) i) On suppose que u tend vers le réel ℓ. Montrer que la suite $(u_n - \ell)_{n \geq n_0}$ tend vers 0 ;

ii) On suppose qu'il existe un réel ℓ tel que la suite $(u_n - \ell)_{n \geq n_0}$ tend vers 0. Montrer que u tend vers ℓ.

b) i) On suppose que la suite u tend vers 0. Montrer que la suite $(|u|)_{n \geq n_0}$ tend vers 0.

ii) On suppose que la suite $(|u|)_{n \geq n_0}$ tend vers 0. Montrer que la suite u tend vers 0.

c) i) On suppose que u tend vers le réel ℓ. Montrer que la suite $(|u_n - \ell|)_{n \geq n_0}$ tend vers 0 ;

ii) On suppose qu'il existe un réel ℓ tel que la suite $(|u_n - \ell|)_{n \geq n_0}$ tend vers 0. Montrer que u tend vers ℓ.

Remarque 41– On considère une suite $u = (u_n)_{n \geq n_0}$. Si u converge vers un réel ℓ. Montrons qu'alors, la suite $(|u_n|)_{n \geq n_0}$ converge vers $|\ell|$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \geq n_0$ tel que, pour tout $n \geq N$, on a $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. Or, pour tout entier $n \geq n_0$, on a

$$||u_n| - |\ell|| \leq |u_n - \ell|.$$

On en déduit que, pour tout $n \geq N$, on a $||u_n| - |\ell|| \leq \varepsilon$. La suite $(|u_n|)_{n \geq n_0}$ converge donc vers $|\ell|$.

⚠La réciproque n'est pas vraie. Nous allons montrer que si $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \geq n_0$, alors la suite $(|u_n|)_{n \geq n_0}$ converge vers 1 alors que la suite u n'a pas de limite. Que la suite $(|u_n|)_{n \geq n_0}$ converge vers 1 est évident puisque c'est la suite constante égale à 1. Supposons, par l'absurde, que u converge vers le réel ℓ. On applique alors la définition de cette convergence avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$. On obtient un entier $N \geq n_0$ tel que, pour tout $n \geq N$, on a $|(-1)^n - \ell| \leq \frac{1}{2}$. En particulier, choisissant $n = 2N$, on a $|1 - \ell| \leq \frac{1}{2}$ puis, choisissant $n = 2N + 1$, on a $|1 + \ell| \leq \frac{1}{2}$. Puisque $2 = |(1 - \ell) + (1 + \ell)|$, on en déduit l'inégalité contradictoire

$$2 \leq |1 - \ell| + |1 + \ell| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

La suite u ne peut donc pas avoir de limite finie.

Cette unicité de la limite permet de définir des nombres comme limite de suites (voir l'exemple 90).

***Proposition* 42–** *Toute suite convergeant vers un réel est bornée.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite de limite $\ell \in \mathbb{R}$. Par définition de la convergence, avec le choix $\varepsilon = 1$, il existe un entier $N \geq n_0$ tel que si $n \geq N$ alors $|u_n - \ell| \leq 1$. Lorsque n parcourt l'ensemble fini $\{n_0, \dots, N-1\}$, l'ensemble des valeurs prises par $|u_n - \ell|$ est fini. On peut donc définir

$$\alpha = \max\{|u_n - \ell| \colon n \in \{n_0, \dots, N-1\}\}$$

puis $M = \max(1, \alpha)$. Ainsi, $|u_n - \ell| \leq M$ pour tout entier $n \geq n_0$. On en déduit que $\ell - M \leq u_n \leq \ell + M$ pour tout entier $n \geq n_0$. La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est donc bornée. □

⚠Il existe des suites bornées qui ne sont pas convergentes. On a montré à la remarque 41 que la suite $((-1)^n)_{n\geq 0}$ ne converge pas. Elle est cependant bornée puisqu'elle ne prend que les valeurs -1 et 1.

Il est souvent un peu pénible de calculer la limite d'une suite en utilisant directement la définition. Une autre façon de procéder est de disposer d'un ensemble de suites de références (dont on connaît la limite) et de connaître le comportement des suites lorsqu'on applique des opérations à cet ensemble de suites de références.

***Théorème* 43–** *Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites. On suppose que $u_n \to \ell$ et $v_n \to \ell'$ avec ℓ et ℓ' réels. Alors*

1) *$u_n + v_n \to \ell + \ell'$;*
2) *si λ est un réel, $\lambda u_n \to \lambda \ell$;*
3) *$u_n v_n \to \ell \ell'$;*
4) *si $\ell \neq 0$, il existe un entier $n_1 \geq n_0$ tel que la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\geq n_1}$ est définie et*

$$\frac{1}{u_n} \to \frac{1}{\ell}.$$

Démonstration.

1) Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge vers ℓ, il existe un entier $N_1 \geq n_0$ tel que, pour tout entier $n \geq N_1$ on a $|u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Puisque $(v_n)_{n\geq n_0}$ converge vers ℓ', il existe un entier $N_2 \geq n_0$ tel que, pour tout entier $n \geq N_2$ on a $|v_n - \ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Si $n \geq N$ alors

$$\left|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')\right| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On en déduit que $(u_n + v_n)_{n\geq n_0}$ converge vers $\ell + \ell'$.

2) Si $\lambda = 0$, la suite $(\lambda u_n)_{n\geq n_0}$ est la suite constante nulle, elle admet donc $0 = 0 \cdot \ell$ pour limite.
Supposons maintenant $\lambda \neq 0$. Soit $\varepsilon > 0$, on a alors $\frac{\varepsilon}{|\lambda|} > 0$. Puisque $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge vers ℓ, il existe un entier $N \geq n_0$ tel que, pour tout entier $n \geq N$ on a $|u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Pour tout entier $n \geq N$ on a donc $|\lambda u_n - \lambda\ell| = |\lambda||u_n - \ell| \leq \varepsilon$. Ceci montre que $\lambda u_n \to \lambda\ell$.

3) Pour tout $n \geq n_0$, on remarque que

$$u_n v_n - \ell\ell' = (u_n - \ell)v_n + (v_n - \ell')\ell$$

d'où l'on déduit

$$|u_n v_n - \ell\ell'| \leq |u_n - \ell| \cdot |v_n| + |v_n - \ell'| \cdot |\ell|.$$

La suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ est convergente, elle est donc bornée : il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $|v_n| \leq M$. On a donc

$$|u_n v_n - \ell\ell'| \leq |u_n - \ell| \cdot M + |v_n - \ell'| \cdot |\ell|.$$

Soit $\varepsilon > 0$, on a $\frac{\varepsilon}{2M} > 0$. Puisque $u_n \to \ell$, il existe $N_1 \geq n_0$ tel que, pour tout $n \geq N_1$ on a

$$|u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Ainsi

$$|u_n v_n - \ell\ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2} + |v_n - \ell'| \cdot |\ell|$$

pour tout $n \geq N_1$.
Si $\ell = 0$, on en déduit

$$|u_n v_n - \ell\ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

pour tout $n \geq N_1$ et donc $u_n v_n \to \ell\ell'$.
Supposons maintenant $\ell \neq 0$. On a $\frac{\varepsilon}{2|\ell|} > 0$. Puisque $v_n \to \ell'$, il existe $N_2 \geq n_0$ tel que, pour tout $n \geq N_2$ on a

$$|v_n - \ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2|\ell|}.$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Pour tout $n \geq N$, on a donc

$$|u_n v_n - \ell\ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2|\ell|}|\ell| = \varepsilon$$

puis $u_n v_n \to \ell\ell'$.

4) Nous commençons par montrer qu'il existe un entier $n_1 \geq n_0$ tel que $u_n \neq 0$ pour tout $n \geq n_1$. Puisque $\ell \neq 0$, on peut choisir $\varepsilon = \frac{|\ell|}{2}$ dans la définition de $u_n \to \ell$. On obtient alors un entier $n_1 \geq n_0$ tel que, pour tout entier $n \geq n_1$ on a $|u_n - \ell| \leq \frac{|\ell|}{2}$, c'est-à-dire

$$\ell - \frac{|\ell|}{2} \leq u_n \leq \ell + \frac{|\ell|}{2}. \tag{1}$$

Si $\ell < 0$, alors $\ell + \frac{|\ell|}{2} = \frac{\ell}{2} < 0$ et donc $u_n < 0$ pour tout $n \geq n_1$. Si $\ell > 0$, alors $\ell - \frac{|\ell|}{2} = \frac{\ell}{2} > 0$ et donc $u_n > 0$ pour tout $n \geq n_1$. Dans les deux cas $u_n \neq 0$ pour tout $n \geq n_1$. La suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \geq n_1}$ est donc définie.

Montrons maintenant la deuxième partie de l'énoncé : $\dfrac{1}{u_n} \to \dfrac{1}{\ell}$. Pour tout $n \geq n_1$ on a

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|u_n - \ell|}{|\ell| \cdot |u_n|}.$$

Si $\ell < 0$, l'inégalité de droite de l'encadrement (1) conduit à $u_n \leq \frac{\ell}{2} = -\frac{|\ell|}{2} < 0$ donc $|u_n| = -u_n \geq \frac{|\ell|}{2}$. Si $\ell > 0$, l'inégalité de gauche de l'encadrement (1) conduit à $u_n \geq \frac{\ell}{2} = \frac{|\ell|}{2} > 0$ donc $|u_n| = u_n \geq \frac{|\ell|}{2}$. Dans les deux cas, on a $|u_n| \geq \frac{|\ell|}{2} > 0$ puis

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| \leq \frac{2}{|\ell|^2}|u_n - \ell|$$

pour tout $n \geq n_1$.
Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $u_n \to \ell$, il existe $n_2 \geq n_0$ tel que pour tout $n \geq n_2$ on a $|u_n - \ell| \leq \frac{|\ell|^2}{2}\varepsilon$. Posons $\mathrm{N} = \max(n_1, n_2)$. Pour tout $n \geq \mathrm{N}$ on a

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| \leq \frac{2}{|\ell|^2} \cdot \frac{|\ell|^2}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

On en déduit que $\dfrac{1}{u_n} \to \dfrac{1}{\ell}$.

□

Exemple 44– Considérons la suite $u = \left(\frac{2n+3}{7n+1}\right)_{n \geq 0}$. Pour tout entier $n > 0$, on a

$$\frac{2n+3}{7n+1} = \frac{2 + 3/n}{7 + 1/n}.$$

On a vu que $\dfrac{1}{n} \to 0$ et que la suite constante de terme général 3 tend vers 3. Le point 2) du théorème 43 implique donc que $\dfrac{3}{n} \to 0$. La suite constante de terme général 2 tend vers 2. Grâce au point 1) on a alors $2 + \dfrac{3}{n} \to 2$. De même, $7 + \dfrac{1}{n} \to 7$. Puisque $7 \neq 0$ on déduit du point 4) que $\dfrac{1}{7 + 1/n} \to \dfrac{1}{7}$. Enfin, utilisant le point 3) on obtient

$$\frac{2 + 3/n}{7 + 1/n} \to \frac{2}{7}.$$

Exemple 45– Soit a et b deux réels. On considère une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ convergeant vers une limite réelle $\ell \neq -b$. Grâce au point 4) du théorème 43, il existe un entier n_1 tel que la suite

$$\left(\frac{u_n + a}{u_n + b}\right)_{n \geq n_1}$$

est définie. Grâce au point 1) on a $u_n + a \to \ell + a$ et $u_n + b \to \ell + b$. Grâce au point 4) on a $\dfrac{1}{u_n + b} \to \dfrac{1}{\ell + b}$. Enfin, grâce au point 3) on obtient

$$\frac{u_n + a}{u_n + b} \to \frac{\ell + a}{\ell + b}.$$

***Corollaire* 46–** *Toute suite géométrique de raison q telle que $|q| < 1$ converge vers 0.*

Démonstration. Considérons une suite géométrique $u = \left(u_{n_0} q^{n-n_0}\right)_{n \geq n_0}$.

Si $q = 0$, on a $u_n = 0$ dès que $n \geq n_0 + 1$ et donc u tend vers 0.

Supposons alors $q \neq 0$. On a

$$u_n = \frac{u_{n_0}}{q^{n_0}} q^n$$

pour tout $n \geq n_0$. D'après l'exemple 37, $q^n \to 0$ donc $u_n \to 0$. □

2.2) Limite infinie

Définition 47– *Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite. On dit que $(u_n)_{n \geq n_0}$* tend *vers $+\infty$, ce qu'on note*

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty \quad ou \quad u_n \to +\infty$$

si, pour tout réel M, *il existe un entier* $\mathrm{N} \geq n_0$ *tel que, pour tout entier* $n \geq \mathrm{N}$, *on a* $u_n \geq \mathrm{M}$.

Imaginez que l'on trace dans un plan muni d'un repère orthonormal (Oxy) les couples (n, u_n) pour tout $n \geq n_0$. La définition de la convergence vers $+\infty$ signifie que, quelque soit la droite horizontale choisie, dès que n est assez grand, toutes les valeurs u_n sont au dessus cette droite. On peut se reporter à la figure 2 pour une illustration de la définition.

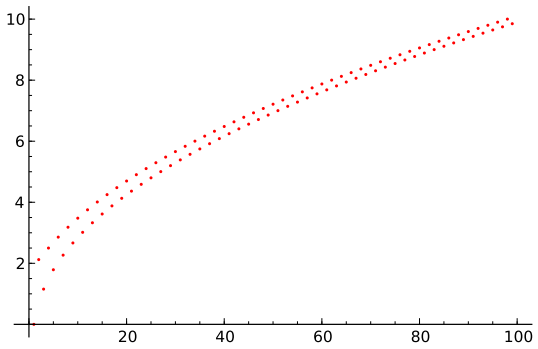


Figure 2: Une suite non croissante de limite $+\infty$, la suite $\left(\sqrt{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)_{n \geq 1}$.

Remarque 48– Pour dire qu'une suite tend vers $+\infty$, on dit aussi qu'elle admet $+\infty$ comme limite.

On a une notion identique pour les suites devenant de plus en plus négatives.

Définition 49– *Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite. On dit que $(u_n)_{n\geq n_0}$* tend *vers $-\infty$, ce qu'on note*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \quad ou \quad u_n \to -\infty$$

si, pour tout réel m, il existe un entier $\mathrm{N} \geq n_0$ tel que, pour tout entier $n \geq \mathrm{N}$, on a $u_n \leq m$.

Imaginez que l'on trace dans un plan muni d'un repère orthonormal (Oxy) les couples (n, u_n) pour tout $n \geq n_0$. La définition de la convergence vers $-\infty$ signifie que, quelque soit la droite horizontale choisie, dès que n est assez grand, toutes les valeurs u_n sont au dessous cette droite.

Remarque 50– Pour dire qu'une suite tend vers $-\infty$, on dit aussi qu'elle admet $-\infty$ comme limite.

Remarque 51– Il faut prendre garde que l'expression « la suite u diverge » signifie que la suite u n'a pas de limite réelle. Cela peut donc signifier trois choses : soit que le suite u tend vers $+\infty$, soit qu'elle tend vers $-\infty$, soit qu'elle n'a pas de limite ni réelle ou infinie.

Remarque 52– Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ tend vers $+\infty$ si et seulement si la suite $(-u_n)_{n\geq n_0}$ tend vers $-\infty$.

Exemple 53–

1) Si $q > 1$, montrons que la suite $(q^n)_{n\geq n_0}$ tend vers $+\infty$. Soit $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$. Si $\mathrm{M} \leq 0$, alors pour tout $n \geq n_0$ on a $q^n > 0 \geq \mathrm{M}$. Si $\mathrm{M} > 0$, on choisit pour N un entier supérieur à $\dfrac{\ln \mathrm{M}}{\ln q}$, par exemple $\mathrm{N} = \left\lfloor \dfrac{\ln \mathrm{M}}{\ln q} \right\rfloor + 1$. Pour $n \geq \mathrm{N}$, et puisque $q > 1$, on a alors $q^n \geq \mathrm{M}$.
2) Si $\alpha > 0$, montrons que la suite $(n^\alpha)_{n\geq n_0}$ tend vers $+\infty$. Soit $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$. Si $\mathrm{M} \leq 0$, alors pour tout $n \geq n_0$ on a $n^\alpha > 0 \geq \mathrm{M}$. Si $\mathrm{M} > 0$, on choisit pour N un entier supérieur à $\mathrm{M}^{1/\alpha}$, par exemple $\mathrm{N} = \left\lfloor \mathrm{M}^{1/\alpha} \right\rfloor + 1$. Pour $n \geq \mathrm{N}$ on a alors $n^\alpha \geq \mathrm{M}$.

Le résultat suivant généralise la proposition 38.

***Proposition* 54–** *Si une suite admet pour limite un réel, $-\infty$ ou $+\infty$, cette limite est unique.*

Démonstration. On considère une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ puis ℓ et ℓ' deux limites de cette suite. On distingue différents cas.

1) Si ℓ et ℓ' sont réels, la proposition 38 implique que $\ell = \ell'$.

2) Supposons $\ell \in \{-\infty, +\infty\}$. Grâce aux définitions de $u_n \to +\infty$ et $u_n \to -\infty$, pour tout M, il existe N tel que si $n \geq N$ alors $|u_n| \geq M$. La suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ n'est donc pas bornée. Elle ne peut donc pas converger vers un réel. Ainsi, $\ell' \in \{-\infty, +\infty\}$.
   a) Supposons $\ell = +\infty$. Il existe N tel que pour tout $n \geq N$ on a $u_n \geq 1$. Supposons par l'absurde que $\ell' = -\infty$. Il existe alors N′ tel que pour tout $n \geq N'$ on a $u_n \leq -1$. On obtient une contradiction dès que $n \geq \max(N, N')$ de sorte que nécessairement $\ell' = +\infty$.
   b) Si $\ell = -\infty$. Il existe N tel que pour tout $n \geq N$ on a $u_n \leq -1$. Supposons par l'absurde que $\ell' = +\infty$. Il existe alors N′ tel que pour tout $n \geq N'$ on a $u_n \geq 1$. On obtient une contradiction dès que $n \geq \max(N, N')$ de sorte que nécessairement $\ell' = -\infty$.

□

Exercice 55–

1) Montrer que si une suite tend vers $+\infty$, elle n'est pas majorée.
2) Montrer que si une suite tend vers $-\infty$, elle n'est pas minorée.

On généralise aussi les résultats des opérations sur les limites.

***Proposition* 56** (Produit externe et limites)– *Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite et $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que $u_n \to \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.*

i) si $\ell \in \mathbb{R}$ alors $\lambda u_n \to \lambda \ell$;

ii) si $\ell = +\infty$ alors $\lambda u_n \to \begin{cases} -\infty & si\ \lambda < 0 \\ 0 & si\ \lambda = 0 \\ +\infty & si\ \lambda > 0 \end{cases}$;

iii) si $\ell = -\infty$ alors $\lambda u_n \to \begin{cases} +\infty & si\ \lambda < 0 \\ 0 & si\ \lambda = 0 \\ -\infty & si\ \lambda > 0 \end{cases}$

Démonstration.

i) C'est le point 2) du théorème 43.
ii) On suppose $u_n \to +\infty$.
   a) Supposons $\lambda < 0$. Soit $m \in \mathbb{R}$. Comme $u_n \to +\infty$, il existe N tel que, pour tout $n \geq N$, on a $u_n \geq \frac{m}{\lambda}$. Puisque $\lambda < 0$, on en déduit que si $n \geq N$ alors $\lambda u_n \leq m$.
   b) Supposons $\lambda = 0$. La suite $(\lambda u_n)_{n \geq n_0}$ est la suite constante nulle. Elle admet donc 0 comme limite.
   c) Supposons $\lambda > 0$. Soit $M \in \mathbb{R}$. On a $u_n \to +\infty$ donc il existe N tel que, pour tout $n \geq N$, on a $u_n \geq \frac{M}{\lambda}$. Puisque $\lambda > 0$, on en déduit que si $n \geq N$ alors $\lambda u_n \geq M$.

iii) On suppose $u_n \to -\infty$. En utilisant la remarque 52, on voit que $-u_n \to +\infty$. En appliquant le point ii) à la suite $(-u_n)_{n\geq n_0}$, on trouve que $-\lambda u_n \to -\infty$ si $\lambda < 0$, que $-\lambda u_n \to 0$ si $\lambda = 0$ et $-\lambda u_n \to +\infty$ si $\lambda > 0$. Il reste alors à appliquer de nouveau la remarque 52 pour obtenir la limite de $\lambda(u_n)_{n\geq n_0}$.

□

Lorsque nous marquerons IND (pour *indéterminé*), cela signifie qu'il n'y a pas de résultat général applicable à toutes les suites. Il faut alors utiliser une méthode adaptée à chaque cas particulier.

***Proposition* 57** (Somme et limites)– *Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites. On suppose que $u_n \to \ell$ et $v_n \to \ell'$ avec $\ell \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ et $\ell' \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$. Le tableau ci-dessous résume les limites éventuelles de $(u_n)_{n\geq n_0} + (v_n)_{n\geq n_0}$ en fonction des valeurs de ℓ et ℓ'.*

ℓ \ ℓ'	$-\infty$	$\in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	IND
$\in \mathbb{R}$	$-\infty$	$\ell+\ell'$	$+\infty$
$+\infty$	IND	$+\infty$	$+\infty$

Remarque 58– Si $u_n \to +\infty$ et $v_n \to -\infty$, on ne peut pas prévoir la limite de $(u_n+v_n)_{n\geq n_0}$ sans étude spécifique, ainsi qu'on le voit en considérant les exemples suivants.

- Si $u_n = n$ et $v_n = -n/2$ pour tous n alors $u_n + v_n \to +\infty$;
- si $u_n = n$ et $v_n = -2n$ pour tous n alors $u_n + v_n \to -\infty$;
- soit α un réel quelconque, si $u_n = n + \alpha/2$ et $v_n = -n + \alpha/2$ pour tous n alors $u_n + v_n \to \alpha$;
- si $u_n = n$ et $v_n = -n+(-1)^n$, alors $(u_n+v_n)_{n\geq n_0}$ n'a pas de limite (voir l'exemple 92).

Démonstration de la proposition 57.

i) Si $\ell = -\infty$ et $\ell' = -\infty$. Soit m réel. Il existe N_1 tel que, pour tout $n \geq N_1$ on a $u_n \leq m/2$ et N_2 tel que, pour tout $n \geq N_2$ on a $v_n \leq m/2$. Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Pour tout $n \geq N$, on a $u_n + v_n \leq m$.

ii) Si $\ell = -\infty$ et $\ell' \in \mathbb{R}$. Soit m réel. La suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ est bornée donc en particulier majorée. Il existe donc C tel que, pour tout n on a $v_n \leq C$. Il existe par ailleurs N tel que, pour tout $n \geq N$ on a $u_n \leq m - C$. Finalement, pour tout $n \geq N$ on a $u_n + v_n \leq m$.

iii) Si $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' = -\infty$. On raisonne comme précédemment en échangeant les notations ℓ et ℓ'.

iv) Si ℓ et ℓ' sont réelles, le résultat est le point 1) du théorème 43.

v) Si $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' = +\infty$. Soit M réel. La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est bornée, donc en particulier minorée. Il existe donc C tel que, pour tout n on a $u_n \geq C$. Il existe par ailleurs N tel que, pour tout $n \geq N$ on a $v_n \geq M - C$. Pour tout $n \geq N$ on a donc $u_n + v_n \geq M$.

vi) Si $\ell = +\infty$ et $\ell' \in \mathbb{R}$. On raisonne comme précédemment en échangeant les notations ℓ et ℓ'.

vii) Si $\ell = +\infty$ et $\ell' = +\infty$. Soit M réel. Il existe N_1 tel que, pour tout $n \geq N_1$ on a $u_n \geq M/2$ et N_2 tel que, pour tout $n \geq N_2$ on a $v_n \geq M/2$. Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Pour tout $n \geq N$, on a $u_n + v_n \geq M$.

□

Exercice 59– Prouver les points v) à vii) de la proposition 57 en utilisant les points i) à iii) et la remarque 52.

Exemple 60– Les suites arithmétiques de raison strictement positive tendent vers $+\infty$. Les suites arithmétiques de raison strictement négative tendent vers $-\infty$. Les suites arithmétiques sont en effet de la forme $u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$ pour tout $n \geq n_0$.

***Proposition* 61** (Produit et limites)– *Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites. On suppose que $u_n \to \ell$ et $v_n \to \ell'$ avec $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et $\ell' \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Le tableau ci-dessous résume les limites éventuelles de la suite produit $(u_n v_n)_{n\geq n_0}$ en fonction des valeurs de ℓ et ℓ'.*

ℓ \ ℓ'	$-\infty$	< 0	0	> 0	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	IND	$-\infty$	$-\infty$
< 0	$+\infty$	$\ell\ell'$	0	$\ell\ell'$	$-\infty$
0	IND	0	0	0	IND
> 0	$-\infty$	$\ell\ell'$	0	$\ell\ell'$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	IND	$+\infty$	$+\infty$

Remarque 62– Si une suite tend vers 0 et une autre vers $-\infty$ ou $+\infty$, on ne peut pas prévoir la limite de leur produit sans étude spécifique. On le voit en considérant les exemples suivants.

- Soit α un réel non nul quelconque, si $u_n = 1/(\alpha n)$ et $v_n = \alpha^2 n$ pour tous n alors $u_n v_n \to \alpha$;
- si $u_n = 1/n^2$ et $v_n = n$ pour tous n alors $u_n v_n \to 0$;
- si $u_n = 1/n$ et $v_n = n^2$ pour tous n alors $u_n v_n \to +\infty$;
- si $u_n = -1/n$ et $v_n = n^2$ pour tous n alors $u_n v_n \to -\infty$;
- si $u_n = (-1)^n/n$ et $v_n = n$, alors $(u_n v_n)_{n\geq n_0}$ n'a pas de limite (voir l'exemple 92).

Démonstration de la proposition 61. On ne traite que les cas non déjà traités et on s'autorise à permuter les suites pour se ramener à un cas déjà démontré.

i) Si $\ell = -\infty$ et $\ell' = -\infty$. Soit M un réel. Il existe N_1 tel que, pour tout $N \geq N_1$ on a $u_n \leq -\sqrt{|M|}$. Il existe N_2 tel que, pour tout $N \geq N_2$ on a $v_n \leq -\sqrt{|M|}$. Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Pour tout $n \geq N$, on a $u_n v_n \geq |M|$ et donc $u_n v_n \geq M$.

ii) Si $\ell = -\infty$ et $\ell' \in \mathbb{R}^{-*}$. En utilisant la définition de la convergence $v_n \to \ell'$ avec $\varepsilon = -\ell'/2 > 0$, on trouve N_1 tel que pour tout $n \geq N_1$ on a

$$\frac{\ell'}{2} \leq v_n - \ell' \leq -\frac{\ell'}{2}$$

et donc

$$v_n \leq \ell'/2. \tag{2}$$

Puisque $u_n \to -\infty$, si M est un réel, il existe N_2 tel que pour tout $n \geq N_2$ on a

$$u_n \leq 2|M|/\ell'. \tag{3}$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Pour tout $n \geq N$, les inégalités (2) et (3) sont valides et concernent des nombres négatifs. Pour tout $n \geq N$, on a donc $u_n v_n \geq |M|$ et donc $u_n v_n \geq M$.

iii) Si $\ell = -\infty$ et $\ell' \in \mathbb{R}^{+*}$. Le théorème 43 implique que $-v_n \to -\ell' < 0$. D'après le ii), on a $u_n(-v_n) \to +\infty$. Mais puisque $u_n(-v_n) = -(u_n v_n)$, la proposition 56 permet de déduire $u_n v_n \to -\infty$.

iv) Si $\ell = -\infty$ et $\ell' = +\infty$. La proposition 56 implique que $-v_n \to -\infty$. D'après le i), on a $u_n(-v_n) \to +\infty$. Mais puisque $u_n(-v_n) = -(u_n v_n)$, la proposition 56 permet de déduire $u_n v_n \to -\infty$.

v) Si $\ell < 0$ et $\ell' = +\infty$. On a alors $-v_n \to -\infty$. Grâce à ii) on en déduit $-u_n v_n \to +\infty$ et donc $u_n v_n \to -\infty$.

vi) Si $\ell > 0$ et $\ell' = +\infty$. On a alors $-v_n \to -\infty$. Grâce à iii) on en déduit $-u_n v_n \to -\infty$ et donc $u_n v_n \to +\infty$.

vii) Si $\ell = +\infty$ et $\ell' = +\infty$. On a alors $-u_n \to -\infty$ et $-v_n \to -\infty$. Puisque $(-u_n)(-v_n) = u_n v_n$ on en déduit $u_n v_n \to +\infty$.

□

Proposition 63 (Inverse et limites)– *Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite. On suppose que $u_n \to \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.*

i) si ℓ est réel et non nul alors il existe un entier $n_1 \geq n_0$ tel que la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \geq n_1}$ est définie et $\frac{1}{u_n} \to \frac{1}{\ell}$;

ii) si $\ell = 0$ et s'il existe n_1 tel que, pour tout $n \geq n_1$, on a $u_n > 0$ alors $\frac{1}{u_n} \to +\infty$;

iii) si $\ell = 0$ et s'il existe n_1 tel que, pour tout $n \geq n_1$, on a $u_n < 0$ alors $\frac{1}{u_n} \to -\infty$;

iv) si $\ell = -\infty$ ou $\ell = +\infty$ alors il existe un entier $n_1 \geq n_0$ tel que la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \geq n_1}$ est définie et $\frac{1}{u_n} \to 0$.

Remarque 64– La proposition 63 ne dit rien si $u_n \to 0$ sans garder le même signe à partir d'un certain rang (c'est-à-dire si elle change de signe une infinité de fois). Dans ce cas, et si de plus la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang n_1, alors la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\geq n_1}$ n'a pas de limite. Supposons en effet que $(u_n)_{n\geq n_0}$ tende vers 0 et que $u_n \neq 0$ pour tout $n \geq n_1$. Supposons aussi que, pour tout $N \geq n_1$, il existe $n_2 \geq N$ et $n_3 \geq N$ tels que $u_{n_2} > 0$ et $u_{n_3} < 0$. Puisque $|u_n| \to 0$, le point ii) de la proposition 63 implique $\frac{1}{|u_n|} \to +\infty$. La suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ n'est alors pas bornée. Si elle admet une limite, celle-ci ne peut être que $-\infty$ ou $+\infty$. En particulier que toutes ses valeurs à partir d'un certain rang sont de signe constant. Ce n'est pas le cas.

Démonstration de la proposition 63.

i) C'est le point 4) du théorème 43.

ii) Soit M un réel. Si $M \leq 0$, on a $\frac{1}{u_n} \geq M$ pour tout $n \geq n_1$. Supposons $M > 0$. Puisque $u_n \to 0$, il existe N_1 tel que si $n \geq N_1$ alors $|u_n| \leq \frac{1}{M}$. Posons $N = \max(n_1, N_1)$. Si $n \geq N$ alors $0 < u_n \leq \frac{1}{M}$ et donc $\frac{1}{u_n} \geq M$.

iii) Soit M un réel. Si $M \geq 0$, on a $\frac{1}{u_n} \leq M$ pour tout $n \geq n_1$. Supposons $M < 0$. Puisque $u_n \to 0$, il existe N_1 tel que si $n \geq N_1$ alors $|u_n| \leq -\frac{1}{M}$. Posons $N = \max(n_1, N_1)$. Si $n \geq N$ alors $0 < |u_n| \leq -\frac{1}{M}$ et $u_n < 0$ donc $\frac{1}{u_n} \leq M$.

iv) Que ℓ soit $-\infty$ ou $+\infty$, la suite $(|u_n|)_{n\geq n_0}$ tend vers $+\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N tel que pour tout $n \geq N$ on a $|u_n| \geq \frac{1}{\varepsilon}$. On en déduit que pour tout $n \geq \max(n_1, N)$ on a $\frac{1}{|u_n|} \leq \varepsilon$.

□

Exemple 65– On considère deux entiers d et d' strictement positifs puis des réels $a_0, \ldots, a_d$ avec $a_d \neq 0$ et des réels $b_0, \ldots, b_{d'}$ avec $b_{d'} \neq 0$. Pour tout $n > 0$, on écrit

$$b_0 + b_1 n + \ldots + b_{d'} n^{d'} = \left(\frac{b_0}{n^{d'}} + \frac{b_1}{n^{d'-1}} + \ldots + b_{d'}\right) n^{d'}.$$

Cette quantité tend vers $+\infty$ si $b_{d'} > 0$ et vers $-\infty$ si $b_{d'} < 0$. Dans le cas où $b_{d'} > 0$, il existe donc n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$ on a $b_0 + b_1 n + \ldots + b_{d'} n^{d'} > 1$. De même, dans le cas où $b_{d'} < 0$, il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$ on a $b_0 + b_1 n + \ldots + b_{d'} n^{d'} < -1$. Dans les deux cas, il existe $n_0 > 0$ tel que $b_0 + b_1 n + \ldots + b_{d'} n^{d'} \neq 0$ pour tout $n \geq n_0$. Ainsi peut-on définir la suite

$$\left(\frac{a_0 + a_1 n + \ldots + a_d n^d}{b_0 + b_1 n + \ldots + b_{d'} n^{d'}}\right)_{n\geq n_0}.$$

Pour tout $n \geq n_0$, on écrit

$$\frac{a_0 + a_1 n + \ldots + a_d n^d}{b_0 + b_1 n + \ldots + b_{d'} n^{d'}} = \frac{n^d}{n^{d'}} \cdot \frac{\frac{a_0}{n^d} + \frac{a_1}{n^{d-1}} + \ldots + a_d}{\frac{b_0}{n^{d'}} + \frac{b_1}{n^{d'-1}} + \ldots + b_{d'}}.$$

Puisque

$$\frac{\frac{a_0}{n^d} + \frac{a_1}{n^{d-1}} + \ldots + a_d}{\frac{b_0}{n^{d'}} + \frac{b_1}{n^{d'-1}} + \ldots + b_{d'}} \to \frac{a_d}{b_{d'}}$$

on obtient

$$\frac{a_0 + a_1 n + \ldots + a_d n^d}{b_0 + b_1 n + \ldots + b_{d'} n^{d'}} \to \begin{cases} 0 & \text{si } d < d' \\ \dfrac{a_d}{b_{d'}} & \text{si } d = d' \\ +\infty & \text{si } d > d' \text{ et si } a_d \text{ et } b_{d'} \text{ ont même signe} \\ -\infty & \text{si } d > d' \text{ et si } a_d \text{ et } b_{d'} \text{ sont de signes opposés.} \end{cases}$$

3 Comparaisons de suites

3.1) Inégalités et limites

Proposition 66– *Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites. On suppose qu'il existe N tel que, pour tout $n \geq \mathrm{N}$, on a $u_n \leq v_n$. Si $u_n \to \ell$ et $v_n \to \ell'$ où ℓ et ℓ' sont tous deux réels, alors $\ell \leq \ell'$.*

⚠ Le théorème ne concerne que des inégalités larges. Définissons deux suites u et v en posant $u_n = 1/n$ et $v_n = 2/n$ pour tout entier $n > 0$. On a $u_n < v_n$ pour tout $n > 0$ mais $\lim u_n = \lim v_n$.

Démonstration. On raisonne par l'absurde en supposant $\ell' < \ell$. On pose alors $\varepsilon = \frac{\ell - \ell'}{3} > 0$. Il existe N_1 tel que, pour tout $n \geq \mathrm{N}_1$ on a $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$, c'est-à-dire $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$, soit encore

$$\frac{2\ell + \ell'}{3} \leq u_n \leq \frac{4\ell - \ell'}{3}. \tag{4}$$

De même, il existe N_2 tel que, pour tout $n \geq \mathrm{N}_2$ on a $|v_n - \ell'| \leq \varepsilon$, c'est-à-dire

$$\frac{4\ell' - \ell}{3} \leq v_n \leq \frac{2\ell' + \ell}{3}. \tag{5}$$

Des inégalités (4) et (5), on déduit que si $n \geq \max(\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2)$ alors

$$u_n \geq \frac{2\ell + \ell'}{3} = \frac{\ell + \ell + \ell'}{3} > \frac{\ell + 2\ell'}{3} \geq v_n.$$

Pour $n \geq \max(\mathrm{N}, \mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2)$, on obtient l'encadrement contradictoire $v_n < u_n \leq v_n$. □

La proposition précédente ne permet pas de dire si une suite admet une limite mais seulement de comparer des limites. Le théorème d'encadrement sert lui à prouver l'existence d'une limite de suite.

***Théorème* 67** (Théorème d'encadrement)– *Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$, $(v_n)_{n\geq n_0}$ et $(w_n)_{n\geq n_0}$ trois suites. On suppose qu'il existe N_0 tel que, pour tout $n \geq \mathrm{N}_0$, on a*

$$u_n \leq v_n \leq w_n.$$

Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(w_n)_{n\geq n_0}$ admettent la même limite réelle ℓ, alors $v_n \to \ell$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N_1 tel que, pour tout $n \geq \mathrm{N}_1$ on a

$$-\varepsilon \leq u_n - \ell \leq \varepsilon$$

et N_2 tel que, pour tout $n \geq \mathrm{N}_2$ on a

$$-\varepsilon \leq w_n - \ell \leq \varepsilon.$$

Soit $\mathrm{N} = \max(\mathrm{N}_0, \mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2)$. Si $n \geq \mathrm{N}$, on a

$$-\varepsilon \leq u_n - \ell \leq v_n - \ell \leq w_n - \ell \leq \varepsilon$$

et donc $|v_n - \ell| \leq \varepsilon$. □

Exemple 68– On considère la suite $u = \left(\frac{\cos n}{n}\right)_{n\geq 1}$. Pour tout n on a

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Or on sait que $-1/n \to 0$ et $1/n \to 0$ donc $u_n \to 0$.

Exercice 69– Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites. On suppose qu'il existe $n_1 \geq n_0$ tel que $|u_n| \leq v_n$ pour tout $n \geq n_1$. Enfin, on suppose que $v_n \to 0$. Montrer que $u_n \to 0$.

Exemple 70– Nous allons montrer que si α est un réel strictement positif alors

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha} \to 1.$$

Pour cela, grâce au théorème d'encadrement, il suffit d'encadrer $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha}$ par les termes généraux deux suites de limite 1. Puisque $\alpha > 0$, on a

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha} \geq 1$$

pour tout $n \geq 1$. De $\alpha \leq \lfloor \alpha \rfloor + 1$, on déduit

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k}$$

où $k = \lfloor \alpha \rfloor + 1$ est un entier strictement positif. La suite $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^k\right)_{n>0}$ est le produit de k suites qui tendent vers 1, elle tend donc vers 1. On a donc encadré $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^k\right)_{n>0}$ par deux suites de limite 1 d'où le résultat.

L'équivalent du théorème d'encadrement pour les limites infinies est le suivant.

***Proposition* 71–** *Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites. On suppose qu'il existe N_0 tel que, pour tout $n \geq N_0$, on a $u_n \leq v_n$.*

1) *Si $u_n \to +\infty$ alors $v_n \to +\infty$.*
2) *Si $v_n \to -\infty$ alors $u_n \to -\infty$.*

Démonstration.

1) Soit M un réel. Il existe N_1 tel que si $n \geq N_1$ alors $u_n \geq M$. Soit $N = \max(N_0, N_1)$. On a $v_n \geq u_n \geq M$ pour tout $n \geq N$.
2) Soit m un réel. Il existe N_1 tel que si $n \geq N_1$ alors $v_n \leq m$. Soit $N = \max(N_0, N_1)$. On a $v_n \leq u_n \leq M$ pour tout $n \geq N$.

□

Exemple 72– Considérons la suite $(n+\cos n)_{n\geq 0}$. Pour tout n, on a $n-1 \leq n+\cos n$. Puisque $n-1 \to +\infty$, on en déduit $n+\cos n \to +\infty$.

3.2) Croissance polynômiale et croissance exponentielle

L'objectif de cette partie est de montrer le résultat suivant.

***Théorème* 73–** *Si α est un réel strictement positif et si r est un réel strictement supérieur à 1 alors*

$$\frac{n^\alpha}{r^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Démonstration. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $u_n = n^\alpha/r^n$ pour tout entier naturel n. Pour tout $n \geq 1$ on a alors $u_n > 0$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{r}\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha.$$

Puisque $r > 1$ on peut choisir $\varepsilon = \frac{r-1}{2} > 0$ dans la définition de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha \to 1$ (voir l'exemple 70). On obtient alors l'existence d'un entier $n_0 \geq 1$ tel que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha \leq 1+\varepsilon = \frac{r+1}{2}$$

pour tout $n \geq n_0$. On a alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{r}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha} \leq \frac{r+1}{2r} < 1$$

pour tout $n \geq n_0$. Par récurrence il suit

$$u_n \leq \left(\frac{r+1}{2r}\right)^{n-n_0} u_{n_0}$$

pour tout $n \geq n_0$. Enfin, puisque $(r+1)/(2r) < 1$, on a

$$\left(\frac{r+1}{2r}\right)^{n-n_0} u_{n_0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs, on déduit du théorème d'encadrement qu'elle tend vers 0. □

Exemple 74– On a

$$\frac{2^n+n^7}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{n^7}{3^n}.$$

Puisque $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$, on a $\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$. Par ailleurs, $\frac{n^7}{3^n} \to 0$ donc

$$\frac{2^n+n^7}{3^n} \to 0.$$

3.3) Approximation décimale des nombres réels

Soit a un nombre réel. L'objet de cette partie est d'en donner des approximations décimales. Un nombre décimal est un nombre rationnel qui n'a qu'un nombre fini de chiffres décimaux.

Exercice 75– Soit x un nombre réel. Montrer qu'il est décimal si et seulement s'il existe un entier relatif k et un entier naturel n tel que $x = \frac{x}{10^n}$.

Nous allons approcher le nombre réel a par des nombres décimaux. On définit une suite $\mathrm{A}(a) = (\mathrm{A}_n(a))_{n\geq 0}$ en posant

$$\mathrm{A}_n(a) = \frac{\lfloor 10^n a \rfloor}{10^n}$$

pour tout entier $n \geq 0$.

Exercice 76– Donner les valeurs de $\mathrm{A}_n(\pi)$ pour $n \in \{0,1,2,3,4,5\}$.

La définition de la partie entière implique $\lfloor 10^n a \rfloor \leq 10^n a < \lfloor 10^n a \rfloor + 1$. On a donc

$$10^n a - 1 < \lfloor 10^n a \rfloor \leq 10^n a$$

et donc

$$a - \frac{1}{10^n} < \mathrm{A}_n(a) \leq a \tag{6}$$

pour tout $n \geq 0$. Grâce au théorème d'encadrement, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n(a) = a.$$

les termes de la suite $\mathrm{A}_(a)$ étant tous des nombres décimaux, on dit que cette est une *approximation décimale* du nombre réel a. De plus, l'encadrement (6) implique

$$\mathrm{A}_n(a) < a \leq \mathrm{A}_n(a) + \frac{1}{10^n}$$

pour tout $n \geq 0$. On dit que chaque terme $\mathrm{A}_n(a)$ est une valeur approchée par défaut de a à 10^{-n} près.

Définition 77– *Soit a un nombre réel et ε un réel positif. Un réel x est*

1) *une* valeur approchée *de a à ε près si $x - \varepsilon \leq a \leq x + \varepsilon$;*
2) *une* valeur approchée par défaut *de a à ε près si $x \leq a \leq x + \varepsilon$;*
3) *une* valeur approchée par excès *de a à ε près si $x - \varepsilon \leq a \leq x$.*

On montre ensuite que les valeurs approchées de a données par les termes successifs de $\mathrm{A}(a)$ sont de plus en plus précises ou, ce qui revient au même, que la suite $\mathrm{A}(a)$ est croissante. Pour tout nombre réel x, on a $\lfloor x \rfloor \leq x$ et donc $10\lfloor x \rfloor \leq 10x$. Le nombre $10\lfloor x \rfloor$ est un entier inférieur à $10x$ et, le nombre $\lfloor 10x \rfloor$ le plus grand entier inférieur à $10x$. On a donc $10\lfloor x \rfloor \leq \lfloor 10x \rfloor$. Choisissant $x = 10^n a$, on trouve

$$\lfloor 10^n a \rfloor \leq \frac{\lfloor 10^{n+1} a \rfloor}{10}$$

puis, après division par 10^n, on obtient $\mathrm{A}_n(a) \leq \mathrm{A}_{n+1}(a)$ pour tout $n \geq 0$. La suite $\mathrm{A}(a)$ est donc croissante.

Remarque 78– Soit a un nombre réel. La suite $\mathrm{A}(a)$ tend vers a. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc un entier N tel que, pour tout $n \geq \mathrm{N}$, on a $a - \varepsilon \leq \mathrm{A}_n(a) \leq a + \varepsilon$. Soit $x < y$ deux nombres réels. On choisit $a = \frac{x+y}{2}$ et $\varepsilon = \frac{y-x}{2} > 0$. On trouve qu'il existe N tel que $x \leq \mathrm{A}_n(a) \leq y$, et donc il existe un nombre décimal compris entre x et y. Entre deux nombres réels distincts, on peut donc toujours trouver un nombre décimal. On dit que l'ensemble des nombres décimal est *dense* dans l'ensemble des nombres réels. Cette notion sera approfondie en cours de *Topologie*.

4 Convergence des suites monotones

***Proposition* 79–** *Si une suite croissante n'est pas majorée alors elle tend vers $+\infty$.*

Démonstration. Considérons une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ croissante et non majorée. Il existe N tel que $u_N \geq M$ sinon $(u_n)_{n\geq n_0}$ serait majorée par M. Enfin, la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ étant croissante, on trouve $u_n \geq u_N \geq M$ pour tout $n \geq N$. □

⚠Dans la proposition 79, l'hypothèse que la suite est croissante est nécessaire. Considérons en effet la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$u_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette suite n'est pas majorée, pourtant elle ne tend pas vers $+\infty$.

***Corollaire* 80–** *Si une suite décroissante n'est pas minorée alors elle tend vers $-\infty$.*

Démonstration. Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante et n'est pas minorée alors la suite $(-u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante et n'est pas majorée (si $(-u_n)_{n\geq n_0}$ est majorée par M alors $(u_n)_{n\geq n_0}$ est minorée par $-M$). On en déduit que $-u_n \to +\infty$ puis que $u_n \to -\infty$. □

On admet le résultat suivant concernant les suites croissantes majorées.

***Théorème* 81–** *Si une suite croissante est majorée alors elle admet une limite finie.*

On en déduit un résultat de même type pour les suites décroissantes.

***Corollaire* 82–** *Si une suite décroissante est minorée alors elle admet une limite finie.*

Démonstration. Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante et minorée alors la suite $(-u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante et majorée. On en déduit l'existence d'un réel ℓ tel que que $-u_n \to \ell$ puis que $u_n \to -\ell$. □

Exemple 83– Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application croissante. On définit une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ en posant $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \geq n_0$ et en donnant une valeur à u_{n_0}. On suppose qu'il existe un réel L tel que $L = f(L)$.

i) On suppose que $u_{n_0+1} \leq u_{n_0}$ et $u_{n_0} \geq L$. Grâce à l'exemple 29, on sait que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante. La croissance de f implique que si $u_n \geq L$ alors $f(u_n) \geq f(L)$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geq L$. Par récurrence, la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est minorée. Elle admet donc une limite.

ii) On suppose que $u_{n_0+1} \geq u_{n_0}$ et $u_{n_0} \leq \mathrm{L}$. Grâce à l'exemple 29, on sait que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante. La croissance de f implique que si $u_n \leq \mathrm{L}$ alors $f(u_n) \leq f(\mathrm{L})$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq \mathrm{L}$. Par récurrence, la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est majorée. Elle admet donc une limite.

Exemple 84– On considère une suite $(x_k)_{k\geq 1}$ à valeurs dans les entiers de 0 à 9. Pour tout $n \geq 1$, soit

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot 10^{-k}.$$

Pour tout n, on a $u_{n+1} - u_n = x_{n+1} \cdot 10^{-n-1} \geq 0$. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est donc croissante. Par ailleurs,

$$0 \leq u_n \leq \sum_{k=1}^{n} 9 \cdot 10^{-k} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1-10^{-n}}{1-10^{-1}} = 1 - \frac{1}{10^n} \leq 1.$$

Cette inégalité n'est rien d'autre que $0,x_1 \dots x_n \leq 0,\underbrace{9\dots9}_{n \text{ fois}} = 1 - 0,\underbrace{0\dots01}_{n-1 \text{ fois}}$. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est donc majorée. Étant croissante et majorée, cette suite admet une limite. Chaque valeur de u_n est une valeur approchée du réel de $[0,1]$ dont chaque x_k est la k^{e} décimale. Noter que nos calculs montrent que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} 9 \cdot 10^{-k} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = 1$$

ce qui est une preuve de la non unicité du développement décimal des réels :

$$0,999\dots = 1.$$

Enfin, même si les résultats précédents ne permettent pas de calculer la limite, ils permettent de la minorer ou de la majorer [e].

***Proposition* 85–**

1) Si une suite est croissante, chacun de ses termes est inférieur à sa limite.

2) Si une suite est décroissante, chacun de ses termes est supérieur à sa limite.

Démonstration. 1) Par convention le résultat est vrai si la suite est croissante et non majorée puisqu'elle tend alors vers $+\infty$. Soit donc $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite croissante et majorée et $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite. S'il existe N tel que $u_{\mathrm{N}} > \ell$, alors $u_n \geq u_{\mathrm{N}} > \ell$ pour tout $n \geq \mathrm{N}$. On pose alors $\varepsilon = (u_{\mathrm{N}} - \ell)/2 > 0$. Il existe N_1 tel que $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq \mathrm{N}_1$. On en déduit

$$\begin{cases} u_n \geq u_{\mathrm{N}} \\ u_n \leq \ell + \varepsilon = \dfrac{u_{\mathrm{N}} + \ell}{2} < u_{\mathrm{N}} \end{cases}$$

e. Par convention, tout réel est strictement inférieur à $+\infty$ et strictement supérieur à $-\infty$.

pour tout $n \geq \max(N, N_1)$. On obtient une contradiction d'où l'inexistence de N. On a donc $u_n \leq \ell$ pour tout $n \geq n_0$.

2) Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite décroissante et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ sa limite. Alors, $(-u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante et tend vers $-\ell$. D'après ce qui précède, on a donc $-u_n \leq -\ell$ pour tout $n \geq n_0$ ce qui implique $u_n \geq \ell$ pour tout $n \geq n_0$.

□

Ces résultats permettent même de donner des méthodes de calcul de nombres réels « enserrés » par des suites dites *adjacentes*.

Définition 86– *Deux suites sont* adjacentes *si l'une est croissante, l'autre décroissante et si leur différence tend vers* 0.

Exemple 87– Les suites de terme général $1 - \frac{1}{n}$ et $1 + \frac{1}{n}$ sont adjacentes : la première est croissante, la seconde est décroissante et leur différence, $-\frac{2}{n}$ tend vers 0.

Le résultat principal concernant les suites adjacentes est leur convergence vers une limite commune.

***Théorème* 88–** *Si deux suites sont adjacentes, alors elles convergent et admettent la même limite.*

Démonstration. On suppose que $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante, que $(v_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante et que $u_n - v_n \to 0$. La suite $(u_n - v_n)_{n\geq n_0}$ est bornée, il existe donc M tel que $|u_n - v_n| \leq M$ pour tout $n \geq n_0$. En particulier, et en utilisant la décroissance de $(v_n)_{n\geq n_0}$, on a

$$u_n \leq M + v_n \leq M + v_0$$

pour tout $n \geq n_0$. La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est donc croissante et majorée, on en déduit qu'elle admet une limite réelle ℓ. De façon similaire, on a

$$v_n \geq u_n - M \geq u_0 - M$$

pour tout $n \geq n_0$. La suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ est donc décroissante et minorée, on en déduit qu'elle admet une limite réelle ℓ'. On a alors $u_n - v_n \to \ell - \ell'$. Puisque $u_n - v_n \to 0$, on a $\ell = \ell'$. □

Les suites adjacentes permettent de construire des approximations successsives de leur limite commune.

***Proposition* 89–** *Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ sont deux suites adjacentes, $(u_n)_{n\geq n_0}$ étant croissante, leur limite commune ℓ satisfait l'encadrement*

$$u_n \leq \ell \leq v_n$$

pour tout entier $n \geq n_0$.

Démonstration. Cela résulte du fait, déjà démontré, que les termes d'une suite croissante sont toujours inférieurs à la limite de cette suite et que les termes d'une suite décroissante sont toujours supérieurs à la limite de cette suite. □

Exemple 90– On considère les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies par

$$u_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

La différence entre les deux suites tend vers 0, en effet $n! \geq n$ donc $n! \to +\infty$ puis

$$v_n - u_n = \frac{1}{n!} \to 0.$$

La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante puisque

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} \geq 0.$$

Enfin la $(v_n)_{n\geq 1}$ est décroissante puisque

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{n+1}{(n+1)!} = \frac{1-n}{(n+1)!} \leq 0.$$

Les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont donc adjacentes. Les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ admettent donc une limite réelle commune. On appelle e cette limite [f]. On a donc

$$\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq e \leq \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!}$$

pour tout entier n. En prenant $n = 15$ on trouve l'approximation suivante de e :

$$e = 2,718281828458 + \mathrm{R}$$

avec

$$0 \leq \mathrm{R} \leq \frac{1}{15!} \leq 7,7 \cdot 10^{-13}.$$

5 Suites extraites

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle. Les suites suivantes sont des suites extraites de $(u_n)_{n\geq 0}$:

i) $(u_{2n})_{n\geq n_0}$ – sous-suite des termes de rangs pairs ;

ii) $(u_{2n+1})_{n\geq n_0}$ – sous-suite des termes de rangs impairs ;

iii) $(u_{n+1})_{n\geq n_0}$.

***Proposition* 91–** *Soit $u = (u_n)_{n\geq n_0}$ une suite et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. La suite u converge vers ℓ si et seulement si $u_{2n} \to \ell$ et $u_{2n+1} \to \ell$.*

f. Vous verrez dans le cours *Séries numériques et suites de fonctions* que ce nombre est le nombre $\exp(1)$.

Démonstration. On définit deux suites u et v en posant $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ pour tout entier $n \geq n_0/2$.

1) On suppose $\ell \in \mathbb{R}$.

   a) On suppose que u converge vers ℓ.

      i) Montrons que v converge vers ℓ. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N_0 tel que si $n \geq N_0$ alors $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. Soit N un entier supérieur à $N_0/2$. Si $n \geq N$ alors $2n \geq N_0$ et donc $|u_{2n} - \ell| \leq \varepsilon$, c'est à dire $|v_n - \ell| \leq \varepsilon$. On en tire que v converge vers ℓ.

      ii) Montrons que w converge vers ℓ. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N_0 tel que si $n \geq N_0$ alors $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. Soit N un entier supérieur à $(N_0 - 1)/2$. Si $n \geq N$ alors $2n + 1 \geq N_0$ et donc $|u_{2n+1} - \ell| \leq \varepsilon$, c'est à dire $|w_n - \ell| \leq \varepsilon$. On en tire que w converge vers ℓ.

   Si u converge vers le réel ℓ, c'est donc aussi le cas des suites v et w.

   b) Réciproquement, on suppose que que v et w convergent vers ℓ. Montrons que u converge vers ℓ. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N_0 tel que pour tout $n \geq N_0$ on a

$$|u_{2n} - \ell| \leq \varepsilon. \tag{7}$$

   Il existe N_1 tel que pour tout $n \geq N_1$ on a

$$|u_{2n+1} - \ell| \leq \varepsilon. \tag{8}$$

   Posons $N = \max(2N_0, 2N_1 + 1)$. Soit $n \geq N$:

      i) si n est pair, on écrit $n = 2p$; on a $p \geq N_0$ donc, grâce à (7), $|u_{2p} - \ell| \leq \varepsilon$ et donc $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$;

      ii) si n est impair, on écrit $n = 2p + 1$; on a $p \geq N_1$ donc, grâce à (8), $|u_{2p+1} - \ell| \leq \varepsilon$ et donc $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

   Pour tout $n \geq N$, on a donc $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. Ainsi, u converge vers ℓ.

2) On suppose $\ell = +\infty$.

   a) On suppose que u tend vers $+\infty$.

      i) Montrons que v tend vers $+\infty$. Soit $M \in \mathbb{R}$. Il existe N_0 tel que si $n \geq N_0$ alors $u_n \geq M$. Soit N un entier supérieur à $N_0/2$. Si $n \geq N$ alors $2n \geq N_0$ et donc $u_{2n} \geq M$, c'est à dire $v_n \geq M$. Pour tout M, il existe N tel que, si $n \geq N$, alors $v_n \geq M$. On en tire que v tend vers $+\infty$.

      ii) Montrons que w tend vers $+\infty$. Soit $M \in \mathbb{R}$. Il existe N_0 tel que si $n \geq N_0$ alors $u_n \geq M$. Soit N un entier supérieur à $(N_0 - 1)/2$. Si $n \geq N$ alors $2n + 1 \geq N_0$ et donc $u_{2n+1} \geq M$, c'est à dire $w_n \geq M$. Pour tout M, il existe N tel que, si $n \geq N$, alors $w_n \geq M$. On en tire que w tend vers $+\infty$.

   Si u tend vers $+\infty$, c'est donc aussi le cas des suites v et w.

b) Réciproquement, on suppose que v et w tendent vers $+\infty$. Montrons que u tend vers $+\infty$. Soit $M \in \mathbb{R}$. Il existe N_0 tel que pour tout $n \geq N_0$ on a $v_n \geq M$, et donc

$$u_{2n} \geq M. \tag{9}$$

Il existe N_1 tel que pour tout $n \geq N_1$ on a $w_n \geq M$, et donc

$$u_{2n+1} \geq M. \tag{10}$$

Posons $N = \max(2N_0, 2N_1 + 1)$. Soit $n \geq N$:

i) si n est pair, on écrit $n = 2p$; on a $p \geq N_0$ donc, grâce à (9), $u_{2p} \geq M$ et donc $u_n \geq M$;

ii) si n est impair, on écrit $n = 2p + 1$; on a $p \geq N_1$ donc, grâce à (10), $u_{2p+1} \geq M$ et donc $u_n \geq M$.

Ainsi, pour tout M, il existe N tel que pour tout $n \geq N$, on a $u_n \geq M$. On en déduit que u tend vers $+\infty$.

3) On suppose $\ell = -\infty$. La suite u tend vers $-\infty$ si et seulement si la suite $-u$ tend vers $+\infty$. D'après ce qu'on vient de démontrer, la suite $-u$ tend vers $+\infty$ si et seulement si les suites $-v$ et $-w$ tendent vers $+\infty$, c'est-à-dire si et seulement si les suites v et w tendent vers $-\infty$.

□

Exemple 92– Considérons la suite $u = ((-1)^n)_{n\geq 0}$ puis les deux suites $v = (u_{2n})_{n\geq 0}$ et $w = (u_{2n+1})_{n\geq 0}$. La suite v est la suite constante égale à 1, elle converge donc vers 1. La suite w est la suite constante égale à -1, elle converge donc vers -1. Puisque $1 \neq -1$, il en ressort que u n'a pas de limite.

***Proposition* 93–** *Si une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ tend vers $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, alors la suite extraite de $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $(u_{n+1})_{n\geq 0}$ tend vers ℓ.*

Exemple 94– En utilisant les idées de la preuve de la Proposition 91, démontrer la Proposition 93.

Une importante conséquence pratique de la proposition 93 est que si d'une suite on peut extraire deux sous-suites n'ayant pas même limite, alors la suite n'a pas de limite réelle ou infinie.

Exemple 95– Soit a et b deux réels avec a différent de 0 et de 1 [g] . On définit une suite par récurrence en posant

$$u_{n+1} = au_n + b$$

pour tout $n \geq n_0$. La suite $(u_{n+1})_{n\geq n_0}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\geq n_0}$. On en tire que si la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ a une limite réelle ou infinie, alors la suite $(u_{n+1})_{n\geq n_0}$ a même limite.

g. Le cas $a = 0$ est le cas des suites constantes. Le cas $a = 1$ est le cas des suites arithmétiques déjà étudié dans l'exemple 60.

i) Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge vers le réel ℓ, alors puisque $u_{n+1} \to \ell$. Mais

$$u_{n+1} = au_n + b \to a\ell + b$$

donc $\ell = a\ell + b$. On en déduit $\ell = \frac{b}{1-a}$.

ii) Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ tend vers $+\infty$, alors $au_n + b \to +\infty$ si $a > 0$ et $au_n + b \to -\infty$ si $a < 0$. Puisque $u_{n+1} \to +\infty$, on déduit que le cas $u_n \to +\infty$ ne peut pas se produire dans le cas $a < 0$.

iii) De même, le cas $u_n \to -\infty$ ne peut pas se produire que dans le cas $a > 0$.

Exemple 96– Soit a, b, c, d des réels. On définit une suite u par récurrence en posant

$$u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$$

pour tout $n \geq n_0$. On suppose $ad - bc \neq 0$ [h] et $c \neq 0$ [i]. On suppose enfin que la suite est bien définie, c'est-à-dire qu'on peut montrer que la quantité $cu_n + d$ ne s'annule pour aucune valeur de n.

1) On suppose que u tend vers $-\infty$ ou $+\infty$, alors $u_n \neq 0$ pour n suffisamment grand. On peut donc écrire

$$\frac{au_n + b}{cu_n + d} = \frac{a + b/u_n}{c + d/u_n}.$$

Cette quantité tend vers a/c mais, étant égale à u_{n+1} elle doit tendre vers $-\infty$ ou $+\infty$. La suite u ne peut donc pas avoir de limite infinie.

2) On suppose que u converge vers le réel $\ell \neq -d/c$, alors $u_{n+1} \to \ell$ et

$$\frac{au_n + b}{cu_n + d} \to \frac{a\ell + b}{c\ell + d}.$$

On a donc $\ell = \dfrac{a\ell + b}{c\ell + d}$ puis $c\ell^2 + (d - a)\ell - b = 0$. Il n'y a de solution réelle que si $(d - a)^2 + 4bc \geq 0$.

3) On suppose que u converge vers le réel $\ell = -d/c$. Alors $au_n + b \to b - ad/c \neq 0$. Ainsi, $\left|\dfrac{au_n + b}{cu_n + d}\right| \to +\infty$. Ceci contredit $|u_{n+1}| \to |d/c|$. On ne peut donc pas avoir $\ell = -d/c$.

En conclusion, si u admet une limite, cette limite est nécessairement finie et est solution réelle de $c\ell^2 + (d - a)\ell - b = 0$.

---

h. Si $ad - bc = 0$ alors $\frac{au_n+b}{cu_n+d} = \frac{a}{c}$ pour tout $n \geq n_0 + 1$ donc la suite est stationnaire.

i. Le cas $c = 0$ se ramène à l'exemple 95.

6 Quelques suites particulières

6.1) Suites arithmético-géométriques

Définition 97– *On dit qu'une suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est* arithmético-géométrique *s'il existe deux nombres réels* a *et* b *tels que*

$$u_{n+1} = au_n + b$$

pour tout $n \geq n_0$.

En prenant $b = 0$ on retrouve les suites géométriques ; en prenant $a = 1$, on retrouve les suites arithmétiques.

Exemple 98– La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 7u_n + 1$ est arithmético-géométrique.

Dans la suite, on considère une suite arithmético-géométrique comme dans la définition et on suppose $a \neq 1$.

On commence par montrer qu'il existe r tel que la suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ définie par $v_n = u_n + r$ pour tout $n \geq n_0$ est géométrique de raison a. On calcule

$$v_{n+1} = u_{n+1} + r = au_n + b + r = av_n - ar + b + r.$$

La suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ est donc géométrique de raison a si et seulement si $-ar + b + r = 0$ autrement dit si et seulement $r = \frac{b}{a-1}$.

On pose $r = \frac{b}{a-1}$. Les résultats concernant les suites géométriques permettent d'étudier la limite de $(u_n)_{n\geq n_0}$ en considérant la suite $(v_n)_{n\geq n_0} = (u_n + r)_{n\geq n_0}$. On a donc $(u_n)_{n\geq n_0} = (v_n - r)_{n\geq n_0}$.

i) Si $u_0 = \frac{b}{1-a}$ alors $v_0 = 0$ donc $(v_n)_{n\geq n_0}$ est la suite constante nulle et $(u_n)_{n\geq n_0}$ est la suite constante égale à $u_0 = \frac{b}{1-a}$;

ii) si $a > 1$ et $u_0 \neq \frac{b}{1-a}$ alors $v_n \to +\infty$ et donc $u_n \to +\infty$;

iii) si $|a| < 1$ alors $v_n \to 0$ et donc $u_n \to \frac{b}{1-a}$;

iv) si $a < -1$ et $u_0 \neq \frac{b}{1-a}$ alors $(v_n)_{n\geq n_0}$ n'a pas de limite puisque $v_{2n} \to \text{signe}(v_0)\infty$ et $v_{2n+1} \to -\text{signe}(v_0)\infty$ ces deux limites étant distinctes puisque $v_0 \neq 0$. Il en résulte que $(u_n)_{n\geq n_0}$ n'a pas de limite : si elle avait une limite ℓ, la suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ admettrait $\ell + r$ comme limite.

On peut enfin aisément retrouver la somme des premiers termes de $(u_n)_{n\geq n_0}$. En effet,

$$\begin{aligned}\sum_{k=n_0}^{n_0+n-1} u_k &= \sum_{k=n_0}^{n_0+n-1} (v_k - r) = \sum_{k=n_0}^{n_0+n-1} v_k - nr = v_{n_0}\frac{a^n-1}{a-1} - nr \\ &= (u_{n_0}+r)\frac{a^n-1}{a-1} - nr \\ &= \left(u_{n_0} + \frac{b}{a-1}\right)\frac{a^n-1}{a-1} - n\frac{b}{a-1}.\end{aligned}$$

6.2) Suites définies par une récurrence linéaire d'ordre 2

Soit a et b deux nombres réels avec $b \neq 0$. On considère les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \quad \text{pour tout} \quad n \geq 0.$$

On note r_1 et r_2 les deux racines de l'équation $x^2 - ax - b = 0$. On rappelle qu'alors $r_1 + r_2 = a$ et $r_1 r_2 = -b$.

On accepte sans preuve le résultat suivant.

***Théorème* 99–** *Soit a un nombre réel et b un nombre réel non nul. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle vérifiant $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ pour tout entier $n \geq 0$. Notons r_1 et r_2 les racines (éventuellement complexes) de l'équation $x^2 - ax - b = 0$. Alors il existe un unique couple de nombres réels (α, β) tel que*

a) si les deux racines sont réelles et distinctes, $u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ pour tout $n \geq 0$;

b) si les deux racines sont réelles et égales, $u_n = (\alpha + \beta n) r_1^n$ pour tout $n \geq 0$;

c) si les deux racines sont complexes non réelles (et donc conjuguées et distinctes), on note $r_1 = \rho e^{i\theta}$, avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, alors $u_n = (\alpha\cos(n\theta) + \beta\sin(n\theta))\,\rho^n$ pour tout $n \geq 0$.

Dans le cas *c*) du théorème 99, on peut donner un autre expression pour toute suite non nulle $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ pour tout entier $n \geq 0$. Soit α et β non tous deux nuls. On a alors

$$\alpha\cos(n\theta) + \beta\sin(n\theta) = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\cos(n\theta) + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\sin(n\theta)\right).$$

Or,

$$\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)^2 = 1.$$

Il existe donc un réel φ tel que

$$\cos(-\varphi) = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \quad \text{et} \quad \sin(-\varphi) = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

Ainsi,

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\cos(n\theta)+\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\sin(n\theta)=\cos(n\theta+\varphi).$$

En posant $R=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, on a donc

$$(\alpha\cos(n\theta)+\beta\sin(n\theta))\,\rho^n = R\rho^n\cos(n\theta+\varphi).$$

Exercice 100– On garde les notations du théorème 99 et on suppose être dans le cas *c*). Montrer que s'il existe deux réels $R\geq 0$ et $\varphi\in\mathbb{R}$, alors la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$u_n = R\rho^n\cos(n\theta+\varphi) \quad \text{pour tout entier} \quad n\geq 0,$$

vérifie $u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$ avec a et b des nombres réels à déterminer.

6.2.1 Exemples

➦ Cherchons le terme général de la suite réelle définie par

$$\begin{cases} u_{n+2}=u_{n+1}+u_n \quad \text{pour tout } n\geq 0\\ u_0=1\\ u_1=2. \end{cases}$$

L'équation associée est $x^2-x-1=0$ dont les racines sont

$$r_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad r_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Il existe donc des réels α et β tels que

$$u_n=\alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n+\beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

pour tout $n\geq 0$. Les choix de $n=0$ et $n=1$ conduisent à

$$\begin{cases} u_0=1=\alpha+\beta\\ u_1=2=\alpha\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}+\beta\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}. \end{cases}$$

La résolution du système conduit à

$$\begin{cases} \alpha=\dfrac{5-3\sqrt{5}}{10}\\ \beta=\dfrac{5+3\sqrt{5}}{10}. \end{cases}$$

et donc

$$u_n=\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n+\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

pour tout $n\geq 0$.

➦ Cherchons le terme général de la suite réelle définie par

$$\begin{cases} u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \quad \text{pour tout } n \geq 0 \\ u_0 = 1 \\ u_1 = 4. \end{cases}$$

L'équation associée est $x^2 - 4x + 4 = 0$ dont les racines sont $r_1 = r_2 = 2$. Il existe donc des réels α et β tels que

$$u_n = (\alpha + \beta n) \cdot 2^n$$

pour tout $n \geq 0$. Les choix de $n = 0$ et $n = 1$ conduisent à

$$\begin{cases} u_0 = 1 = \alpha \\ u_1 = 4 = 2\alpha + 2\beta. \end{cases}$$

La résolution du système conduit à $\alpha = \beta = 1$ et donc

$$u_n = (n+1) \cdot 2^n$$

pour tout $n \geq 0$.

➦ Cherchons le terme général de la suite réelle définie par

$$\begin{cases} u_{n+2} = -8u_n \quad \text{pour tout } n \geq 0 \\ u_0 = 1 \\ u_1 = 2. \end{cases}$$

L'équation associée est $x^2 + 8 = 0$ dont les racines sont $r_1 = 2\sqrt{2}i = 2\sqrt{2}e^{i\pi/2}$ et $r_2 = -2\sqrt{2}i = 2\sqrt{2}e^{-i\pi/2}$. Il existe donc des réels α et β tels que

$$u_n = \left(\alpha \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \beta \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)(2\sqrt{2})^n$$

pour tout $n \geq 0$. Les choix de $n = 0$ et $n = 1$ conduisent à

$$\begin{cases} u_0 = 1 = \alpha \\ u_1 = 2 = 2\sqrt{2}\beta. \end{cases}$$

On a donc

$$u_n = \left(\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)(2\sqrt{2})^n$$

pour tout $n \geq 0$.

➦ Cherchons le terme général de la suite complexe définie par

$$\begin{cases} u_{n+2} = 3iu_{n+1} + (i+3)u_n \quad \text{pour tout } n \geq 0 \\ u_0 = 1 \\ u_1 = 2. \end{cases}$$

L'équation associée est $x^2 - 3ix - i - 3 = 0$ dont les racines sont $r_1 = i - 1$ et $r_2 = 2i + 1$. Il existe donc des complexes α et β tels que

$$u_n = \alpha(i-1)^n + \beta(2i+1)^n$$

pour tout $n \geq 0$. Les choix de $n = 0$ et $n = 1$ conduisent à

$$\begin{cases} u_0 = 1 = \alpha + \beta \\ u_1 = 2 = \alpha(i-1) + \beta(2i+1). \end{cases}$$

La résolution du système conduit à

$$\begin{cases} \alpha = i \\ \beta = 1 - i. \end{cases}$$

et donc

$$u_n = i(i-1)^n + (1-i)(2i+1)^n$$

pour tout $n \geq 0$.

7 Exercices

1) On définit trois suites $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ en posant

$$u_n = \frac{n(n+1)}{2},\ v_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{et} \quad w_n = u_n^2$$

pour tout $n \geq 0$.

1) Calculer u_n, v_n et w_n pour $n \in \{0,1,2,3,4,5\}$.
2) Donner le terme général de la suite $(u_{2n})_{n\geq 0}$.
3) Donner le terme général de la suite $(v_{n^2})_{n\geq 0}$.
4) Donner le terme général de la suite $(w_{2n-2})_{n\geq 1}$.

2) On définit une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ en posant $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 1$ pour $n \geq 0$. Calculer u_n pour $n \in \{0,1,2,3,4,5\}$.

3) Justifier que l'on définit une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ en posant $u_0 = 1/4$ et $u_{n+1} = \sqrt{1-u_n^3}$ pour $n \geq 0$

4) Soit a un réel tel que $|a| \leq 1$. On définit une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ en posant $u_0 = a$ et $u_{n+1} = \sqrt{1-u_n^2}$ pour tout $n \geq 0$. Que valent $u_{2173201}$ et u_{1548} ?

5) Parmi les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ suivantes, dire lesquelles sont arithmétiques. Preciser, le cas échéant la raison et le premier terme.

1) $u_n = -7n + 3$
2) $u_n = -4$
3) $u_n = \sqrt{n}$
4) $u_n = (n+5)^3 - n^3 - 15(n-1)^2$.

6) Déterminer les trois premiers termes d'une suite arithmétique $(u_n)_{n\geq 0}$ sachant que

$$\begin{cases} u_0 + u_1 - u_2 = 7 \\ 2u_0 + 3u_1 - 4u_2 = 13. \end{cases}$$

7) Pour tout entier N ≥ 1, déterminer la somme des N premiers termes de la suite $(3^n - 7n + 6)_{n\geq 0}$.

8) On définit deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ en posant $u_0 = v_0 = 1$ et

$$\begin{cases} u_{n+1} = 8u_n + 7v_n \\ v_{n+1} = 7u_n + 8v_n. \end{cases}$$

Déterminer les suites $(u_n + v_n)_{n\geq 0}$ et $(u_n - v_n)_{n\geq 0}$ pour tout $n \geq 0$ puis calculer le terme général des suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$.

9) Le philosophe grec Zénon d'Élée (autour de -450) prétendait démontrer l'impossibilité d'un mouvement par le raisonnement suivant : une flèche ne peut pas atteindre sa cible puisqu'avant d'atteindre cette cible, il lui faut parcourir la moitié de la distance, puis la moitié du chemin restant puis ainsi de suite, une infinité de moitiés. Pourquoi la conclusion de ce raisonnement est-elle fausse ?

10) Calculer les limites des suites de terme général

1) $\dfrac{n^7+6n^3+2}{n^2+1}$, $\dfrac{n^5-6n^2+1}{6n^7+8n+2}$, $\dfrac{n^2+n+1}{2n^2+n+1}$.
2) $2-3^n$, $n-3^n$, $2-\dfrac{1}{3^n}$, $n^2-n+1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.
3) $\sqrt{2n+1}-\sqrt{n+1}$, $\sqrt{2n+2}-\sqrt{2n+1}$, $\sqrt{n^4+n^2+2}-\sqrt{n^4+n^2}$.

11) On définit une suite $u=(u_n)_{n\geq 0}$ par $u_0=0$ et

$$u_{n+1}=\frac{9u_n-4}{12u_n-5} \quad \text{pour tout entier } n\geq 0.$$

1) Montrer que pour tout $n\geq 0$ tel que $12u_n-5\neq 0$, on a
$$u_{n+1}=\frac{9}{12}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{12u_n-5}.$$
2) En déduire que, pour tout $n\geq 1$, on peut définir u_n et que $u_n\geq\dfrac{2}{3}$.
3) Pour tout entier $n\geq 0$, on pose
$$v_{n+1}=\frac{-2u_n+1}{3u_n-2}.$$
Montrer que la suite $v=(v_n)_{n\geq 0}$ est géométrique.
4) Déterminer la limite de v.
5) Pour tout entier $n\geq 0$, établir l'expression de u_n en fonction de v_n.
6) Quelle est la limite de u ?

12) On définit une suite $u=(u_n)_{n\geq 0}$ par $u_0=1$ et

$$u_{n+1}=\sqrt{1+u_n} \quad \text{pour tout entier } n\geq 0.$$

1) Montrer que u est bien définie.
2) Montrer que
$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n-u_{n-1}}{\sqrt{1+u_n}+\sqrt{1+u_{n-1}}}$$
pour tout $n\geq 1$.
3) En déduire que u est croissante.
4) Montrer qu'il existe un unique réel positif ℓ tel que $\ell=\sqrt{1+\ell}$.
5) Montrer que $u_n\leq\ell$ pour tout $n\geq 0$.
6) Déduire des question précédente que u converge.
7) En donnant une relation entre u_{n+1}^2 et u_n pour tout entier $n\geq 0$, déterminer la limite de u.

13) On définit une suite $u = (u_n)_{n\geq 0}$ par $u_0 = 0$ et

$$u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n} \quad \text{pour tout entier } n \geq 0.$$

1) Pour tout $n \geq 0$, montrer que si $0 < u_n < 2$ alors $0 < \sqrt{2 - u_n} < 2$. En déduire que u est bien définie et bornée.
2) Pour tout $n \geq 1$, montrer que
$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_{n-1} - u_n}{\sqrt{2 - u_n} + \sqrt{2 - u_{n-1}}}.$$
3) En déduire par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$ la propriété
$$\mathcal{P}(n)\colon \begin{cases} u_{2n+2} > u_{2n} \\ u_{2n+3} < u_{2n+1} \end{cases}$$
est vraie.
4) On définit deux suites $a = (u_{2n})_{n\geq 0}$ et $b = (u_{2n+1})_{n\geq 0}$. Étudier variations de a et b.
5) Déduire de la question précédente et de la première question que a et b sont convergentes.
6) On note A la limite de a et B la limite de b. Montrer que $B^2 = 2 - A$ puis que $(B-1)(B^3 + B^2 + B - 2) = 0$.
7) Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$ la propriété
$$\mathcal{P}(n)\colon \begin{cases} u_{2n} < 1 \\ u_{2n+1} > 1 \end{cases}$$
est vraie. n déduire que $B \geq 1$.
8) Déduire des questions 6 et 7 que $B = 1$.
9) Montrer que la suite u converge et donner sa limite.

14) Soit $u = (u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{u_n}$$

pour tout $n \geq 0$.

a) Montrer que u est bien définie.
b) Montrer que, pour tout $n \geq 0$ on a $u_n \geq \sqrt{2}$.
c) Étudier les variations de u.
d) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a
$$0 \leq u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^n}(u_0 - \sqrt{2})^{2^n}.$$
e) Montrer que u converge et déterminer sa limite.

15) On définit deux suites $u = (u_n)_{n\geq 0}$ et $v = (v_n)_{n\geq 0}$ par

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 2v_n}{5}, \quad v_{n+1} = \frac{3v_n + 2u_n}{5}$$

pour tout $n \geq 0$. Montrer que les suites u et v sont adjacentes.