

ARTUR AVILA, MEDAL FIELDSA 2014

FELIKS PRZYTYCKI[†]

SPIS TREŚCI

1. Z życiorysu	1
2. Z laudacji	2
3. O układach dynamicznych	3
4. Dynamika jednowymiarowa i renormalizacja	4
4.1. Panorama do czasu Avili	4
4.2. Wkład Artura Avili	8
5. Bilardy w wielokątach, przekładanie odcinków	11
5.1. Wstęp. Słabe mieszanie.	11
5.2. Płaskie powierzchnie i potok przesunięć. Renormalizacje.	13
5.3. Indukowanie Rauzy’ego	14
5.4. Kocykle i widmo.	16
5.5. Słabe mieszanie pionowego potoku przesunięć.	18
5.6. Potok Teichmüllera, wykładnicze mieszanie.	19
6. Operatory Schrödingera	22
7. Perelka	24
8. Podziękowania	25
Literatura	25

zyciorys

1. Z ŻYCIORYSU

Artur Avila Cordeiro de Melo, medalista Fieldsa w 2014 roku, urodził się w 1979 roku w Rio de Janeiro w Brazylii. Ojciec pochodzi z wiejskich rejonów Amazonii, ale rodzice mieszkali i mieszkają w Rio. Artur Avila chodził do renomowanej szkoły katolickiej Colégio de São Bento, z której został usunięty po 8 klasie za odmówienie zdawania obowiązkowego egzaminu z religii. Już jednak nieco wcześniej nauczyciel Luiz Fabiano odkrył w nim cudowne dziecko i namówił do udziału w Olimpiadzie Matematycznej dla juniorów. Rok później, będąc już w nowej szkole, Colégio Santo Agostinho, Avila został jednym ze zwycięzców, a w 1995 roku w wieku 16 lat zdobył złoty medal na Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej w Toronto.

Date: 29 listopada 2016.

Wtedy Avilą zaopiekowali się matematycy z IMPA (Instituto de Matematica Pura e Aplicada) najbardziej renomowanego instytutu matematycznego w Ameryce Łacińskiej, m. in. Carlos Gustavo Moreira, i Avila, będąc formalnie jeszcze w szkole średniej, zaczął studiować wyższą matematykę. W IMPA uzyskał doktorat w wieku 21 lat, w 2001 roku, pod opieką Wellingtona de Melo, światowej klasy matematyka, współautora, wraz z Sebastianem van Strienem, fundamentalnej monografii „One-Dimensional Dynamics”. Dwa lata wcześniej Avila ukończył pierwszy etap studiów na UFRJ (Universidade Federal do Rio de Janeiro).

Spotkałem Avilę pierwszy raz na konferencji „Dynamical Systems”, w Porto w Portugalii w maju 2000. Miał tam odczyt o renormalizacji, który wzbudził duże zainteresowanie. Nazwaliśmy tam Avilę: de Melinho (mały de Melo). Potem spotykałem Avilę wielokrotnie, w szczególności w ICTP w Trieście (International Center of Theoretical Physics). Słuchałem tam w sierpniu 2001 roku jego godzinnego plenarnego odczytu „Bifurcations of unimodal maps”.

Zapamiętałem go chyba jako Cordeiro de Melo. Trzy lata później, w ICTP w 2004 roku zapytałem go, w większym gronie, kto to Artur Avila, który pisze świetne prace, co wzbudziło ogólną wesołość.

Artur Avila jest laureatem wielu nagród, m.in. nagrody Salema w 2006 roku, nagrody Europejskiego Towarzystwa Matematycznego dla młodych matematyków w 2008 roku. Miał odczyt plenarny na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Hyderabadzie w 2010 roku, patrz [A1], nagrodę Michaela Brina za osiągnięcia w układach dynamicznych, no i w 2014 roku otrzymał medal Fieldsa.

Od 2001 roku Avila spędzał wiele czasu we Francji. W 2001-2003 przebywał na stażu podoktorskim w College de France, pod opieką Jean-Christopha Yoccoza¹, potem był w CNRS, gdzie od 2008 roku ma stanowisko directeur de recherches, na Uniwersytecie Paris 7. Uzyskał francuskie obywatelstwo i dzieli swój czas na pobyty we Francji (starając się jednak unikać zimy w Paryżu) i Brazylii.

laudacja

2. Z LAUDACJI

Prezentując laureata medalu Fieldsa podczas ceremonii otwarcia Kongresu ICM 2014 w Seulu, Ingrid Daubechies, Prezydent Międzynarodowej Unii Matematycznej powiedziała (tłumaczenie moje): „Artur Avila jest nagrodzony Medalem Fieldsa za swój głęboki wkład w teorię układów dynamicznych, który zmienił oblicze tej dziedziny, używając potężnej idei renormalizacji jako unifikującej zasady.”

¹FP, *Jean-Christophe Yoccoz, medal Fieldsa, Zurych 1994*, Wiadomości Matematyczne 31 (1995), 94-101.

Wyniki Avili przedstawił Etienne Ghys. Jego laudacja, opublikowana w pierwszym tomie Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Seoul 2014, zaczyna się od uzasadnienia przyznania medalu (citation for the award). Oto jej (luźne) polskie tłumaczenie:

„Avila kształtuje jako lider dziedzinę układów dynamicznych. Razem ze współpracownikami dokonał istotnych postępów w wielu obszarach, w tym w rzeczywistej i zespolonej dynamice jednowymiarowej, teorii spektralnej operatora Schrödingera z jedną częstotliwością, płaskich bilardach i dynamice częściowo hiperbolicznej. Prace Avili w dynamice jednowymiarowej dały całkowite zrozumienie tematu z probabilistycznego punktu widzenia dla prawie wszystkich parametrów oraz dopełnienie teorii renormalizacji. W sytuacji zespolonej jego prace dały wkład w zrozumienie fraktalnej geometrii zbioru Julii dla parametrów Feigenbauma. W teorii spektralnej Avila podał globalny opis przejść fazowych między dyskretnym i ciągłym spektrum, odkrywając zadziwiającą analityczność wykładników Lapunowa. W teorii płaskich bilardów Avila udowodnił kilka starych hipotez dotyczących ergodycznych własności przekształceń przekładania odcinków kanonicznie związanych z tymi bilardami. Dokonał postępu w teorii stabilnej ergodyczności typowych układów częściowo hiperbolicznych. Jego podejście, poprzez współpracę z innymi, jest inspiracją dla nowych pokoleń matematyków.”

Prace Avili są opublikowane w najlepszych pismach na świecie: Annals of Math. (6), Acta Math. (4), Publ. Math. IHES (3), Invent. math. (4), a także Journal AMS, Comm. Math. Phys., Duke Math. J., Ann. Sci. Éc. Norm. Sup, Trans. AMS, Asterisque, J. Europ. Math. Soc., i w innych. Razem (wg listy na jego stronie internetowej) ma 60 prac opublikowanych, 7 przyjętych do publikacji, 4 złożone, 1 w przygotowaniu i 7 prac przeglądowych.

W dalszej części tego artykułu będę się istotnie opierał na artykule E. Ghysa [G] (w szczególności na jego układzie materiału), będącym wersją jego prezentacji laureata w Seulu, oraz w częściach: dotyczącej iteracji przekształceń odcinka, na artykule M. Lyubicha [Lyü3], a przekładania odcinka, na artykule G. Forniego [F]. Polecam także [Via], [Yo] i [Z2].

układy

3. O UKŁADACH DYNAMICZNYCH

Ta nazwa obejmuje badania granicznych (po długim czasie t) własności trajektorii $\phi(x, t)$, przy $\phi(x, 0) = x$, równań różniczkowych lub iteracji przekształceń f , gdzie $x_{n+1} = f(x_n)$ i $x_0 = x$, czyli działania \mathbb{R} lub \mathbb{Z}^+ , lub innych grup lub półgrup. Badane są własności graniczne trajektorii typowych punktów x , a także typowych działań.

Standardowym narzędziem jest np. twierdzenie ergodyczne Birkhoffa, o tym, że dla każdej przestrzeni probabilistycznej (X, \mathcal{F}, μ) , gdzie \mathcal{F} to σ -ciało zbiorów, μ to określona na nim miara, $\mu(X) = 1$, dla przekształcenia $f : X \rightarrow X$ zachowującego μ , i dla każdej funkcji rzeczywistej $u : X \rightarrow \mathbb{R}$

klasy $L^1(\mu)$, dla μ -prawie każdego punktu $x \in X$ istnieje granica (średnia czasowa) $u^*(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} u(f^j(x))$. Jest ona równa warunkowej wartości oczekiwanej funkcji u względem σ -ciała zbiorów niezmienniczych dla f (tzn. rodziny zbiorów $A \in \mathcal{F}$ takich, że $f^{-1}(A) = A$), w punkcie x . W szczególności jeśli takich nietrywialnych zbiorów (tzn. takich, że $0 < \mu(A) < 1$) nie ma, tzn. f jest przekształceniem ergodycznym, to $u^*(x) = \int_X u d\mu$.

Teoria układów dynamicznych bada przypadki, kiedy nie istnieją wzory pozwalające opisać indywidualne rozwiązania.

4. DYNAMIKA JEDNOWYMIAROWA I RENORMALIZACJA

piątek

wprowadzenie

4.1. Panorama do czasu Avili.

4.1.1. *Wprowadzenie.* Jądrzem zjawisk w dynamice wielowymiarowej są często zjawiska zachodzące w dynamice jednowymiarowej, w szczególności przy iteracjach przekształceń odcinka $I := [0, 1]$. Ta dziedzina wyodrębniła się w latach 70-tych XX wieku, a istotny w tym udział mieli polscy matematycy: A. Lasota oraz M. Misiurewicz i W. Szlenk, [MS], twórcy szkoły w tej dziedzinie w Polsce. Panorama tej dziedziny do lat 90-tych jest przedstawiona w monografii [dMvS].

Przekształcenie ciągle $f : I \rightarrow I$ nazywamy unimodalnym jeśli I ma w swoim wnętrzu dokładnie jeden punkt c_0 , nazywany punktem krytycznym, w którym f ma swoje lokalne ekstremum. Głównym przykładem jednoparametrowej rodziny takich przekształceń jest rodzina kwadratowa (zwana też logistyczną)

$$f_a : I \rightarrow I, \quad f_a(x) = ax(1-x), \quad a \in (1, 4].$$

Oznaczmy $c_n = f^n(c_0)$. W zależności od tego, czy punkt c_n leży na lewo od c_0 , na prawo od c_0 lub jest równy c_0 , piszemy $\epsilon_n := L, R$ lub C . Ten ciąg nazywamy *wygniotkiem*². Wygniotek jest niezmiennikiem topologicznym dla f_a (i ogólniej, dla f unimodalnych, mających ujemną pochodną Schwarza poza punktem krytycznym), pełnym, o ile c_n nie jest przyciągane do trajektorii okresowej, równoważnie: wygniotek nie jest okresowy, [CE].

Dynamika może być jednego z trzech typów:

1. *przypadek hiperboliczny:* Istnieje orbita okresowa przyciągająca. Wtedy taka orbita $O(f)$ może być tylko jedna i przyciąga trajektorię c_n . Zbiór $X(f)$ będący uzupełnieniem zbioru punktów przyciąganych do $O(f)$ jest zbiorem Cantora, na którym f jest jednostajnie rozciągające (ang: expanding), tzn. $\inf_{X(f)} |(f^p)'| > 1$ dla pewnej liczby naturalnej p .³

²Ang.: „kneading sequence”, termin wprowadzony przez Milnora i Thurstona [MT]. Polskie tłumaczenie zostało wprowadzone przez M. Misiurewicza.

³Może się także zdarzyć przypadek 1': Istnieje orbita okresowa paraboliczna, tzn. taka, że $|(f^p)'(x)| = 1$ dla $x \in O(f)$, gdzie p to okres $O(f)$. Dla f_a i ogólniej: dla typowych jednoparametrowych rodzin funkcji unimodalnych, może się to zdarzyć jedynie dla przeliczalnego zbioru parametrów, na brzegach odcinków parametrów z dynamiką hiperboliczną.

2. *przypadek mieszający*: Istnieje cykl takich odcinków $f^k(W)$, $k = 0, 1, \dots, p-1$, że ich wnętrza są wzajemnie rozłączne, $f^p(W) \subset W$, $W \ni c_0$ oraz f^p jest topologicznie mieszające na W . Jeśli istnieje $p > 1$, to mówimy, że istnieje *renormalizacja*.

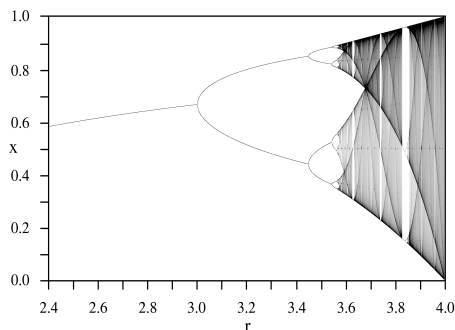
3. *solenoid*: Istnieje zstępujący ciąg otwartych odcinków $W_n \ni c_0$ tworzących cykle jak wyżej dla $p_n \rightarrow \infty$. Wtedy $\Lambda := \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k=0}^{p_n-1} f^k(W_n)$ jest zbiorem granicznym $\omega(c_0)$, jest zbiorem Cantora, a f działa na nim jak „maszyna dodająca” (hodometr). Λ przyciąga trajektorie prawie wszystkich punktów. Ten przypadek nazywamy *nieskończenie renormalizowalnym*. Przekształcenie f jest na Λ topologicznie tranzytywne, ale nie topologicznie mieszające.⁴

uniwersalność

4.1.2. *Uniwersalność i kompleksyfikacja*. W połowie lat 70-tych M. Feigenbaum i, niezależnie od niego, P. Coullet i C. Tresser odkryli zadziwiającą regularność 1-parametrowych przekształceń unimodalnych odcinka f_a , szerokiej klasy, nie tylko rodziny logistycznej. Jeśli (a_n) oznacza rosnący ciąg parametrów, w których następuje „bifurkacja podwojenia okresu”, tzn. dla $a_n < a < a_{n+1}$ jedyne trajektorie okresowe mają okresy minimalne 2^k , $k \leq n$, a dla a_{n+1} trajektoria okresowa okresu 2^n , która była przyciągająca dla a mniejszych, zamienia się w trajektorię odpychającą dla a większych i oddziela się od niej trajektoria okresowa przyciągająca okresu 2^{n+1} . Obserwowane regularności mówiły, że

1) $\frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_{n+2}} \rightarrow \lambda$, gdzie $\lambda \approx 4,669\dots$ to uniwersalna stała niezależna od rodziny f_a .

2) Geometria zbioru granicznego Λ dla $a_\infty(f) := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ i nieskończenie renormalizowalnego $f_{a_\infty(f)}$, nie zależy od rodziny f_a . Dla każdych dwóch takich rodzin f_a i g_a istnieje sprzężenie między zbiorami granicznymi przekształceń $f_{a_\infty(f)}$ a $g_{a_\infty(g)}$, klasy $C^{1+\epsilon}$, dla uniwersalnej liczby $\epsilon > 0$.



Rysunek 1. Rodzina logistyczna (Wikipedia). Parametr r oznacza nasze a . Linie ciągłe z lewej strony pokazują punkty okresowe przyciągające. Przy wzroście a występują bifurkacje podwojenia okresu w a_n . Białe szczeliny na prawo od a_∞ odpowiadają odcinkom parametrów hiperbolicznych.

⁴Topologicznie tranzytywne znaczy, że dla każdych dwóch zbiorów otwartych U, V istnieje > 0 takie, że $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Topologicznie mieszające znaczy, że $f^\ell(U) \cap V \neq \emptyset$ dla każdego $\ell \geq k$.

Rozwiązanie zostało zbudowane w fundamentalnych pracach m.in. D. Sullivan, C. McMullena⁵ i M. Lyubicha, i wynikało (łatwo) z udowodnienia przez nich hiperboliczności różniczki operatora renormalizacji w punkcie stałym (co nazywało się wcześniej Hipotezą Renormalizacyjną *Renormalization Conjecture*). Ten (nieliniowy!) operator R przyporządkowuje funkcji unimodalnej f funkcję $f \circ f$ obciętą do W i odpowiednio afinicznie przeskalowaną tak, żeby uzyskać znowu funkcję unimodalną z poprzedniej klasy, o ile to jest możliwe. Udowodniono najpierw, że istnieje punkt stały tej renormalizacji: f_* (przypadek nieskończenie renormalizowalny – solenoid)⁶, a potem, że różniczka $DR(f_*)$ jest hiperboliczna, tzn. że jej widmo jest rozłączne z okręgiem jednostkowym.

Rozmaitość stabilna $\mathcal{W}^s(f_*)$ dla R i f_* okazała się być rozmaitością banachowską rzeczywistego kowymiaru 1, a niestabilna $\mathcal{W}^u(f_*)$ rzeczywistego wymiaru 1. Uniwersalność typu 1) bierze się zatem stąd, że dla typowej (transwersalnej do $\mathcal{W}^s(f_*)$) krzywej f_a w przestrzeni funkcyjnej, jej obrazy pod działaniem iteracji operatora R rozplaszczają się na jednowymiarowej rozmaitości niestabilnej $\mathcal{W}^u(f_*)$. Wtedy proporcje dla a_n zbiegają wykładniczo do proporcji dla rodziny $\mathcal{W}^u(f_*)$.

Warto zauważyć, że rozmaitość $\mathcal{W}^s(f_*)$ składa się z przekształceń o tej samej kombinatoryce (wygniotku), co wygniotek dla f_* .

Jeśli kolejne renormalizacje są renormalizacjami funkcji wynikłych z poprzedzających renormalizacji, o wspólnie ograniczonych okresach $t_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{p_n}$, $p_0 = 1$, ale niekoniecznie wszystkich równych 2 (dokładniej: $R^{n+1}(f)$ uzyskujemy z $(R^n(f))^{t_{n+1}}$ po odpowiednim obcięciu i przeskalowaniu), to zamiast punktu stałego f_* otrzymujemy w przestrzeni funkcyjnej trajektorię $f_{n+1} = R(f_n)$, dla której odległości między $R^n(f)$, a f_n maleją wykładniczo. Ta trajektoria należy do maksymalnego R -niezmienniczego zbioru Λ dla „podkowy Smale’a, z hiperbolicznym działaniem operatora renormalizacji i niezmienniczą laminacją stabilną $\mathcal{W}^s(\Lambda) = \bigcup_{g \in \Lambda} \mathcal{W}^s(g)$ w przestrzeni funkcyjnej, z liśćmi $\mathcal{W}^s(g)$ kowymiaru 1.

(Oczywiście każdorazowo R zależy nie tylko od t_{n+1} , ale także od kombinatoryki, tzn. kolejności odcinków $(R^n(f))^j(W_n)$, $j = 0, 1, \dots, t_{n+1} - 1$ w I , gdzie W_n to dziedzina $R^n(f)$, jeszcze przed przeskalowaniem. Jednak przy wspólnie ograniczonych okresach t_n liczba możliwych kombinatoryk jest także ograniczona. Zbiór Λ jest homeomorficzny z $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ dla pewnego skończonego alfabetu (zbioru symboli) \mathcal{A} , a R sprzężone tym homeomorfizmem z przekształceniem przesunięcia ciągów symboli należących do \mathcal{A} o jedno miejsce w lewo.)

Jeśli $f \in \mathcal{W}^s(\Lambda)$ jest funkcją rzeczywistą analityczną, to dla m dostatecznie dużego $f_m := R^m(f)$ ma rozszerzenie zespolone $f_m^{\mathbb{C}}$ typu kwadratowego, tzn. istnieje para V_m, U_m obszarów w \mathbb{C} takich, że V_m zawiera domknięcie

⁵FP, *Curtis McMullen, medal Fieldsa, Berlin 1998*, Wiadomości Matematyczne 35 (1999), 101-112.

⁶Pierwszym był O. Lanford, z dowodem wspieranym komputerowo (1982).

\bar{U}_m , $f_m : U_m \rightarrow V_m$ jest przekształceniem właściwym stopnia 2 (brzeg U_m nawija się na brzeg V_m dwukrotnie) oraz punkt krytyczny w U_m pozostaje w U_m przy działaniu iteracji przekształcenia f_m^C .

Dla udowodnienia Hipotezy Renormalizacyjnej kluczowa była obserwacja, że dla wszystkich $n \geq m$ można zapewnić sobie $\text{mod}(V_n \setminus \bar{U}_n) \geq C(f) > 0$, gdzie $C(f)$ to stała niezależna od m , tzw. *zespolone uniwersalnie duże marginesy*⁷ „complex a priori bounds” (chodzi o to, że moduły pierścieni $V_n \setminus \bar{U}_n$ są większe niż dodatnia stała).⁸ To było kluczem do udowodnienia istnienia (jednostajnie) quasikonforemnego topologicznego sprzężenia dla każdych dwóch zespolonych rozszerzeń $f_1, f_2 \in \mathcal{W}^s(\Lambda)(f)$ dostatecznie bliskich $f \in \Lambda$ a następnie wykładniczego zmniejszania odległości w metryce $\log K(f_1, f_2)$, gdzie $K(f_1, f_2)$ to minimalna stała quasikonforemności sprzężenia, przy działaniu iteracjami operatora R .

W dalszym rozwoju tej teorii fundamentalne znaczenie miało udowodnienie, że założenie wspólnej ograniczoności okresów t_n jest zbędne dla udowodnienia własności zespolonych uniwersalnie dużych marginesów, co pozwoliło m.in. udowodnić hiperboliczność działania R na zbiorze niezmienniczym Λ dla ”podkowy” z nieskończoną liczbą kombinatoryk. Alfabet \mathcal{A} może być nieskończony.

dychotomia

4.1.3. *Regularność lub stochastyczność.* Powyższe techniki zostały to wykorzystane do innego wielkiego osiągnięcia przełomu lat 90-tych i 2000: udowodnienia dychotomii „Regular or stochastic” dla rodziny logistycznej f_a :

Twierdzenie (M. Lyubich). Dla prawie każdego a zachodzi jeden z dwóch przypadków:

Przypadek Regularny, równoważnie: Hiperboliczny: Istnieje orbita okresowa O przyciągająca. (Patrz podrozdział ^{wprowadzenie} 4.1.1.)

Przypadek Stochastyczny: Istnieje miara probabilistyczna μ_a bezwzględnie ciągła względem miary Lebesgue’a (tzw. a.c.i.p. - absolutely continuous invariant probability), f_a -niezmiennicza, taka, że dla prawie każdego punktu x w sensie Lebesgue’a i $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ funkcji ciągłej, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} u(f^j(x)) = \int u d\mu_a$. Taka miara nazywana jest miarą Sinaia-Ruelle’a-Bowena.

To jest przypadek „chaosu”. Ale jest to chaos, który można opisać poprzez średnie czasowe jak wyżej. Ponadto ciąg zmiennych losowych $u \circ f^n$ spełnia silne własności statystyczne, np. prawo iterowanego logarytmu.

Dowód tego twierdzenia ma dwie części: Rozważmy wszystkie a dla których nie ma orbity okresowej przyciągającej. Wtedy:

1) dla prawie wszystkich a dla których f_a nie jest nieskończenie renormalizowalny, spełnione są pewne warunki M. Martensa i T. Nowickiego implikujące istnienie a.c.i.p.

⁷Propozycja polskiej nazwy *uniwersalnie duże marginesy* jest moja, FP.

⁸Nieco ogólniejsza własność została nazwana przez D. Sullivana w przypadku rzeczywistym *beau*, od *bounded and eventually universal*.

2) Zbiór wszystkich parametrów a , dla których f_a jest nieskończenie re-normalizowalny, ma miarę Lebesgue'a równą zero.

gestosc

4.1.4. *Gęstość parametrów hiperbolicznych i inne kierunki.* Chociaż zbiór parametrów a takich, że istnieje a.c.i.p., ma miarę dodatnią, to ten zbiór jest brzegowy. Mianowicie dla rodziny wielomianów kwadratowych f_a te parametry a , dla których f_a jest hiperboliczne (regularne), są gęste. Autorami tego znakomitego wyniku, odpowiadającego w tej sytuacji na pytanie Jąggba Palisa o gęstość regularnych dynamik byli J. Graczyk i G. Świątek [GS], a także M. Lyubich [Lyu1]. Wykorzystane były *rzeczywiste i zespolone uniwersalnie duże marginesy*⁹.

M. Lyubich w [Lyu3] wymienił jeszcze kilka innych fundamentalnych kierunków i zakończył rozdział „First 30 years” dramatycznym: „This was the moment when Artur Avila came to the scene. He was only 19.”

wkład

4.2. **Wkład Artura Avili.** Oto kilka najważniejszych wyników Avili w dynamice jednowymiarowej:

1. Avila, de Melo i Lyubich, w 100-stronicowej pracy [AdML] (patrz też opis w Math. Rev. MR2018784, którego byłem autorem), w 2003 roku, udowodnili dychotomię „Regular or stochastic” dla ogólnych rzeczywistych-analitycznych 1-parametrowych rodzin przekształceń unimodalnych g_b . użytą strategią było porównanie z rodziną logistyczną f_a . W tym celu należało zbadać *klasy hybrydalnej równoważności*, zdefiniowane jako klasy topologicznej równoważności (czyli o tym samym wygniotku) dla przekształceń niehiperbolicznych, a dla przekształceń hiperbolicznych f, g także o tym samym multiplikatorach $|(f^p)'(q_f)| = |(g^p)'(q_g)|$ dla q_f i q_g będących punktami okresowymi, odpowiednio dla f i g , przyciągającymi, o minimalnym okresie p . W tym celu autorzy udowodnili, że klasy hybrydalnej równoważności tworzą (poza być może zbiorem miary 0) rozmaitości banachowskie rzeczywiste-analityczne rzeczywistego kowymiaru 1. Rozszerzają one laminacje W^s związaną z funkcyjną „podkową Smale’a”, patrz koniec podrozdziału 4.1.2. uniwersalność

Przekształcenie holonomii wzdłuż liści laminacji klas hybrydalnej równoważności przyporządkowuje przekształceniu g_b przekształcenia $f_{a(b)}$. Niestety ta konstrukcja nie jest kanoniczna i okazuje się, że holonomia nie jest bezwzględnie ciągła (choć jest quasisymetryczna), [AM1].

Jak napisał Lyubich [Lyu3] można się dziwić jak singularna laminacja może być zgodna z metodą holonomii. Otóż, [AdML], transfer stochastycznych parametrów wzdłuż holonomii, od jednej rodziny do drugiej, nie zachodzi. Między każdą parą hybrydalnie równoważnych przekształceń odbywa się transfer geometrii struktury *układanek Yoccoza*, „Yoccoz puzzle” dla kompleksyfikacji tych przekształceń, czyli pewnych rozbić Markowa \mathcal{P} z osobliwością, generowanych dynamiką i z odpowiednio szybką zbieżnością średnic elementów składowych układanek $\mathcal{P}_k := f^{-k}(\mathcal{P})$ do zera wraz ze

⁹A także kurczenie się geometrii, patrz podrozdział 4.2 pkt.1. wkład

wzrostem k , numeru generacji¹⁰, nazywane *kurczeniem się geometrii* (decay of geometry)¹¹. Dzięki temu typowe przekształcenia mieszającego typu są stochastyczne.

2. Powstaje pytanie jak duży jest zbiór parametrów kiedy brak i regularności i stochastyczności. Już wiemy, że ma miarę zero. Avila i Moreira udowodnili w nieopublikowanym preprincie [AM2], o rodzinie logistycznej co następuje:

1) Wymiar Hausdorffa zbioru parametrów z nieskończoną renormalizacją jest ściśle mniejszy niż 1 (Lyubich udowodnił wcześniej, że jest co najmniej równy $1/2$).

2) Wymiar Hausdorffa zbioru parametrów typu mieszającego, ale nie stochastycznego jest ściśle mniejszy niż 1.

Zapytałem o to Avilę w Trieście w 2001, bo wydało mi się, że jego rekurencyjny dowód, że miara jest zero powinien coś dać dla wymiaru Hausdorffa. Trzy lata później Avila przedstawił w Trieście rozwiązanie – przypomniał mi, że to ja go o to pytałem.

3. Do klasy stochastycznych przekształceń unimodalnych należą tzw. przekształcenia Colleta-Eckmanna, tzn. takie, że dla wartości krytycznej c_1 dolny wykładnik Lapunowa $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |(f^n)'(c_1)|$ jest dodatni. Jest to tzw. silny warunek niejednostajnej hiperboliczności. Własność Colleta-Eckmanna razem z brakiem orbit okresowych neutralnych (multiplikator równy 1) jest topologicznym niezmiennikiem (Nowicki & Przytycki). Avila i Moreira w [AM3] udowodnili, że prawie każde stochastyczne przekształcenie logistyczne jest Colleta-Eckmanna, dodatkowo jego geometria kurczy się niezwykle szybko, jak iterowany exp. Rekurencja jest powolna: Dla każdego $\epsilon > 0$, istnieje $C > 0$ takie, że $|f^n(c_0) - c_0| \geq \frac{C}{n^{1+\epsilon}}$.

Te wyniki dzięki [AdML] przenoszą się na dowolne rodziny przekształceń unimodalnych z kwadratowym punktem krytycznym. Tak szybkie ubywanie geometrii wynika z kolejnych wykluczeń złych parametrów. Lyubich napisał: It is true *tour de force* of statistical analysis of dynamics.

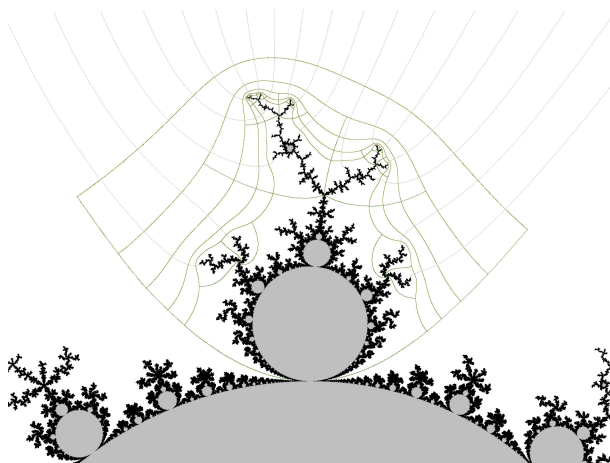
4. Szereg dalszych prac dotyczy rodzin przekształceń unimodalnych z jednym, ale wielokrotnym punktem krytycznym, w szczególności $x \mapsto x^d + c$, $d > 2$ całkowite, parzyste. Metody stworzone wcześniej dla $d = 2$ zawodziły. W szczególności zawodziła tu metoda Yoccoza dowodzenia zbieżności średnic elementów układanek do zera, zatem lokalnej spójności zbiorów Julii¹² dla przekształceń $z^2 + c$ najwyżej skończenie renormalizowalnych i bez

¹⁰To w przypadku nierenormalizowalnym. W przypadku renormalizowalnym dla każdej renormalizacji $f_m := R^m(f)$ definiuje się nową układankę $\mathcal{P}_{m,0}$, otrzymując $\mathcal{P}_{m,k} := f^{-k}(\mathcal{P}_{m,0})$.

¹¹Dokładniej, kurczeniem się geometrii nazywamy istnienie zstępującego ciągu zbiorów $V_n \ni c_0$ i liczb $r_n \in \mathbb{N}$ takich, że $f^{r_n} : V_{n+1} \rightarrow V_n$ są typu kwadratowego (podrozdział 4.1.2), zwanego *gniazdem głównym* „principal nest”, dla którego $\text{mod}(V_n \setminus V_{n+1}) \rightarrow \infty$.

¹²Zbieżność średnic do zera daje natychmiast twierdzenie o lokalnej spójności, bo elementy układanek \mathcal{P}_k przecięte ze zbiorem Julii są spójne.

trajektorii okresowych neutralnych. W 2005 nowa metoda rozwinięta przez J. Kahna i M. Lyubicha ułatwiła wreszcie uzyskanie rozwiązania; zostało ono podane przez Avilę i współautorów w [AKLS]. Autorzy udowodnili też, podobnie jak dla zbioru Mandelbrota dla $d = 2$ przechodząc od układanki „puzzli” do *paraukładanki* „parapuzzli” w parametrach, że zbiór Multibrota $\mathcal{M}_d := \{c \in \mathbb{C} : f_{d,c}^n(0) \not\rightarrow \infty\}$ dla $f_{d,c}(z) := z^d + c$ jest lokalnie spójny w parametrach c jak wyżej.



Rysunek 2. (A. Cheritat¹³) Paraukładanka. Dwa parametry tej samej rodziny należą do tego samego elementu paraukładanki generacji n , jeśli trajektorie wartości krytycznych odwiedzają te same elementy układanki \mathcal{P} w każdym momencie czasu nie większym niż n . Dla parametrów rzeczywistych oznacza to ten sam wygniotek, obcięty do czasu n .

Także teoria „Regular or Stochastic” została rozpracowana dla $d > 2$, patrz [ALS] i [ALy1]. Operator renormalizacji okazał się kontrakcją w metryce Caratheodory’ego na klasach (liściach zespolonego kowymiaru 1) hybrydalnej równoważności rozszerzenia do przekształceń zespolonych typu wielomianowego. Wynika to z lematu Schwarza. Pewna struktura holomorphyzyczna na liściach istnieje, bo topologiczne sprzężenia między ich elementami wynikają z *ruchu holomorphyzycznego*.

(Lemat Schwarza dla udowodnienia kontrakcji R na \mathcal{W}^s w punkcie stałym $R(f_*) = f_*$ był już użyty wcześniej przez Lyubicha, [Lyu2].)

5. Geometria przekształceń zespolonych Feigenbauma.

Dla funkcji wymiernej sfery Riemanna $f : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ stopnia co najmniej 2, definiuje się zbiór Julii $J(f)$ jako $\{z \in \mathbb{C} : \text{dla każdego otoczenia } U \ni z, \text{ ciąg } f^n|_U \text{ nie jest pre-zwarty}\}$. Intuicyjnie $J(f)$ jest dużym chaotycznym repellerem. Wiadomo, że zbiór Julii jest albo całą sferą albo jest brzegowy. Buff i Cheritat, inspirowani przez A. Douady’ego, udowodnili (2005), że

¹³Sylvain Crovisier – „Jean-Christophe Yoccoz” – Images des Mathématiques, CNRS, 2016.

nawet jeśli $J(f) \neq \mathbb{C}$, to może się zdarzyć, że miara Lebesgue'a zbioru $J(f)$ jest dodatnia.

(Inaczej jest dla skończenie generowanych grup Kleina: miara zbioru granicznego różnego od całej sfery $\bar{\mathbb{C}}$ musi być równa 0. Tę hipotezę Ahlforsa udowodnili niedawno, 2004-2006, Agol i niezależnie od niego Calegari i Gabai.)

Avila i Lyubich udowodnili, że, oznaczając przez HD wymiar Hausdorffa, a przez Leb_2 dwuwymiarową miarę Lebesgue'a, dla nieskończenie renormalizowalnych przekształceń typu kwadratowego, każdy z poniższych przypadków może się zdarzyć:

- 1) szczupły (lean): $\text{HD}(J(f)) < 2$;
- 2) zbalansowany: $\text{HD}(J(f)) = 2$, ale $\text{Leb}_2(J(f)) = 0$;
- 3) czarna dziura: $\text{Leb}_2(J(f)) > 0$.

Avila i Lyubich udowodnili w [ALyu2], że przypadek 1) zachodzi. Udowodnili też, że jeśli przypadek czarnej dziury istnieje, to zbalansowany też. Niedawno udowodnili, że czarna dziura może istnieć, [ALyu3], [Lyu4].

W szczególności autorzy podali pierwszy przykład, kiedy wymiar hiperboliczny, HD_{hyp} , jest ostro mniejszy od wymiaru Hausdorffa zbioru Julii.

(Wymiar hiperboliczny jest definiowany jako supremum wymiarów Hausdorffa niezmienniczych podzbiorów $J(f)$, na których f jest hiperboliczne. Wymiar hiperboliczny jest też równy minimalnemu wykładnikowi s miary konforemnej, tzn. dla której f jest bezwzględnie ciągle, o jakobianie $|f'|^s$. Liczbę s można rozumieć jako wykładnik samopodobieństwa fraktala.)

Istnienie przykładów, dla których $\text{HD}_{\text{hyp}}(J(f)) < \text{HD}(J(f))$, było od dawna znanym problemem. Ja udowodniłem, że te wymiary (i wymiar pudełkowy) (który jest zawsze nie mniejszy niż hiperboliczny) zbioru Julii są sobie równe dla przekształceń Colleta-Eckmanna i nierenormalizowalnych wielomianów kwadratowych, [P]. Dla zbiorów granicznych skończenie generowanych grup Kleina także zachodzą równości (C. Bishop, P. Jones).

5. BILARDY W WIELOKĄTACH, PRZEKŁADANIE ODCINKÓW

biłard

5.1. **Wstęp. Słabe mieszanie.** Pudełko z idealnym gazem można interpretować jako pudełko z wieloma kulami bilardowymi. Przy odbijaniu się od brzegów, kąt padania jest równy kątowi odbicia, pomiędzy kolejnymi odbiciami kule poruszają się z ustaloną prędkością po odcinkach. Przyjmijmy, że kule są punktami i że między sobą nie kolidują, nie trafiają także w krawędzie pudełka. Jeśli kul jest N , a pudełko trójwymiarowe, to można tę sytuację interpretować jako bilard z jedną kulą (cząstką), w wymiarze $3N$. Ograniczmy się jednak do bilardu wymiaru 2. Miarą niezmienniczą jest miara Liouville'a (zatem dla przekształcenia między kolejnymi odbiciami od brzegu: różniczka długości brzegu podzielona przez cosinus kąta).

Jeśli powierzchnia takiego stołu bilardowego składa się z łuków wypukłych do środka, to bilard jest ergodyczny (przy ustalonej prędkości kuli,

np. 1), tzn nie ma zbiorów niezmienniczych dodatniej niepełnej miary (porównaj rozdział 4). To jest słynne twierdzenie Y. Sinaia o hiperbolicznych bilardach. Jeśli brzeg bilardu jest gładki ściśle wypukły (tzw bilard eliptyczny) to istnieją kaustyki. Z definicji każda trajektoria wypuszczona stycznie do kaustyki jest między kolejnymi odbiciami też do tej kaustyki styczna. Zatem zbiór trajektorii na zewnątrz kaustyki oraz zbiór trajektorii wewnątrz są nietrywialne niezmiennicze. Nie ma więc ergodyczności.

Bilard wielokątny (sytuacja paraboliczna) jest trudniejszy do zbadania. Np. dla trójkąta ostrokątnego łamana łącząca spodki wysokości jest trajektorią okresową (okresu 3). Dla trójkątów rozwartokątnych (o dużym kącie rozwartym) w ogóle nie wiadomo, czy istnieją trajektorie okresowe.

Założmy, że wszystkie kąty wielokąta są wymiernymi wielokrotnościami π . Wtedy po wypuszczeniu trajektorii w kierunku dowolnie ustalonego wektora jednostkowego V , tylko skończona liczba kątów może się zdarzyć dla tej trajektorii. Niezmiennicza przestrzeń ruchu kuli (przekształcenia powrotu do brzegu bilardu) zawierającego tę trajektorię jest sumą skończonej liczby odcinków odpowiadających brzegowi bilardu, każdy z nich jest powtórzony skończoną liczbę razy, tak żeby uwzględnić wszystkie możliwe kąty.

Przestrzenią konfiguracyjną tego przekształcenia jest więc odcinek I będący sumą skończonej rodziny odcinków I_j , ustawionych po kolei, odpowiednich długości λ_j , a przekształcenie to ich permutacja π . Otrzymujemy tzw. przekształcenie przekładania odcinków, w skrócie: p.p.o., z parametrami λ_j i π . Miara długości μ jest miarą niezmienniczą na I .

Przykład p.p.o. powstaje z obrotu okręgu $f_\alpha(z) = e^{2\pi i\alpha}z$, dla $|z| = 1$. Rozcinamy okrąg w punktach 1 i $e^{2\pi i\alpha}$ i otrzymujemy dwa odcinki – przekształcenie f_α zamienia je kolejnością. Jeśli α jest niewymierne, to f_α jest ergodyczne.

Jednym z pierwszych pytań było, czy miara μ jest jedyną probabilistyczną miarą niezmienniczą dla prawie wszystkich parametrów λ , podobnie jak dla f_α . Tę hipotezę Keane'a udowodnili w 1982 niezależnie od siebie W. Veech [V1] i H. Masur [Ma]. Avila udowodnił, że zbiór „złych” parametrów, dla których nie ma tej jednoznaczności miary (tzn. nie ma *ściślej ergodyczności*¹⁴) nie ma pełnego wymiaru Hausdorffa, [ALeg].

Własnością silniejszą niż ergodyczność jest *slabe mieszanie*. Jest ono definiowane dla przekształcenia f zachowującego skończoną miarę μ przez

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |\mu(A \cap f^{-j}(B)) - \mu(A)\mu(B)| = 0,$$

dla dowolnych mierzalnych zbiorów A i B .

¹⁴W anglojęzycznej terminologii: „unique ergodicity”. „Strict ergodicity” oznacza więcej: jednoznaczność miary i dodatkowo *minimalność*, tzn., że każda trajektoria jest gęsta. Czasem w polskiej terminologii używa się dla „unique ergodicity” nazwy *monoergodyczność*.

Ergodyczność dla odwracalnych f jest równoważna temu, że dla operatora Koopmana $U_f(\phi) = \phi \circ f$ na podprzestrzeni $L^2(\mu)$ funkcji ortogonalnych do funkcji stałych, liczba 1 nie jest wartością własną. Słabe mieszanie jest równoważne nieistnieniu w widmie U_f żadnych wartości własnych.

Widać, że dla $f = f_\alpha$ wartościami własnymi są wszystkie liczby $e^{2\pi i k \alpha}$, $k \in \mathbb{Z}$. Jednak stara hipoteza mówiła, że dla prawie wszystkich nietrywialnych p.p.o. zachodzi słabe mieszanie. Veech w [V2] udowodnił to dla pewnych klas permutacji π . Avila i Forni udowodnili tę hipotezę w pełnej ogólności, patrz [AF] i [F]:

Twierdzenie A. *Jeśli π jest nieredukowalną permutacją d symboli i nie pochodzi z obrotu, to dla prawie każdego wektora długości $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ odpowiednio p.p.o. $f = f(\pi, \lambda)$ jest słabo mieszające.*

Niedawno Avila i Leguil udowodnili, [ALeg], że zbiór tych λ , dla których nie ma słabego mieszania nie ma pełnego wymiaru Hausdorffa (podobnie jak dla ścisłej ergodyczności, patrz wyżej).

plaskie

5.2. Płaskie powierzchnie i potok przesunięć. Renormalizacje.

Każdemu bilardowi w wielokącie z kątami współmiernymi z π można przypisać jeszcze inny obiekt. Odbijmy wielokąt względem każdej jego krawędzi i kontynuujemy odbijanie. Dzięki wymierności procedura ta da, po skończonej liczbie tych operacji, płaską zamkniętą powierzchnię, ze skończoną liczbą punktów osobliwych, w których suma kątów jest wielokrotnością 2π (zamiast 2π). Łamana trajektoria bilardu zamienia się na linię prostą.

Do takiej konstrukcji można też dojść wychodząc z p.p.o. f na $I = \bigcup I_j$. Należy rozważyć wektor $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_d)$ o dodatnich współrzędnych i skleić (spiąć) powierzchnię z d prostokątów P_j , gdzie dolna krawędź każdego P_j jest przyklejona do odcinka I_j długości λ_j , a górna do jego obrazu przy permutacji odcinków. Każda boczna krawędź jest przypięta w części do sąsiada, a w pozostałej części do odpowiedniego sąsiada po permutacji.

Dokładniej, dla funkcji $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej jako stała h_j na I_j rozważamy płaską powierzchnię $D(f, \mathbf{h})$, z osobliwościami, będącą zawieszeniem przekształcenia f z funkcją dachową (roof function) h ($(x, h(x))$ utożsamiamy z $(f(x), 0)$ dla wszystkich $x \in I$ oprócz końców I_j), i ze sklejeniami bocznymi. Tzw. grupa strukturalna tej powierzchni to grupa przesunięć płaszczyzny; stąd nazwa *powierzchnia translacyjna* „translation surface”. Sklejenia boczne sugerują nazwę powierzchni translacyjnej z powyższą strukturą *spięte prostokąty*, „zippered rectangles”.

Punkty, w których są osobliwości, „zmiany przypiętych sąsiadów”, czasami można wyliczyć, mając zadane λ, \mathbf{h} i permutację, tzn. powyższy model jest możliwy. Jest tak, gdy $\mathbf{h} \in H^+$, patrz Uwaga 2 w podrozdziale 5.6. [Teich] Wtedy wysokości, na których są osobliwości są wyznaczone modulo $\ker(\Omega)$.

Rozważmy na powierzchni zawieszenia $D(f, \mathbf{h})$ pionowy potok F_s dla pola $\frac{\partial}{\partial s}$, zwany ogólnie, dla zawieszzeń, *potokiem specjalnym*, a w naszej sytuacji *wertykalnym* (lub *pionowym*) *potokiem przesunięć*.

Oznaczmy przez $g(\pi_t, \pi_b)$ genus powierzchni $D(f, \mathbf{h})$. Jest jasne, że nie zależy on od \mathbf{h} , a jedynie od kombinatoryki nieredukowalnej permutacji w p.p.o. Patrz początek podrozdziału 4.3, dla zapisu permutacji w formie (π_t, π_b) .

Avila i Forni udowodnili w $\frac{\mathbb{A}\mathbb{F}}{[\mathbb{A}\mathbb{F}]}$

Twierdzenie B. ¹⁵

Niech f będzie p.p.o. i $g(\pi_t, \pi_b) \geq 2$. Wtedy pionowy potok przesunięć jest słabo mieszający dla prawie wszystkich λ i \mathbf{h} .¹⁶

Słabe mieszanie jest tu równoważne nieistnieniu niestalej mierzalnej funkcji $\phi : D \rightarrow \mathbb{C}$ takiej, że dla pewnej liczby $t \in \mathbb{R}$ i każdej $s \in \mathbb{R}$, dla $x \in I$ mamy $\phi \circ F_s(x) = e^{2\pi its} \cdot \phi(x)$.

Jest też równoważne, w języku p.p.o. f , ergodyczności i nieistnieniu funkcji mierzalnej $\psi : I \rightarrow \mathbb{C}$ oraz $t \in \mathbb{R}$ takich, że $x \mapsto th$ nie jest funkcją całkowitoliczbową i

$$(*) \quad (5.1) \quad \psi \circ f(x) = e^{2\pi ith(x)} \cdot \psi(x).^{17}$$

Jak napisał Forni w $\frac{\mathbb{F}}{[\mathbb{F}]}$, str. 163], fakt, że prawie wszystkie pionowe potoki przesunięć są słabo mieszające (Twierdzenie B) jest dość łatwą konsekwencją niejednostajnej hiperboliczności kocyklu¹⁸ Rauzy’ego-Veecha-Zoricha (tzn. mającym wszystkie wykładniki Lapunowa różne od 0 – patrz podrozdział 5.4). Możemy bowiem dla prawie każdego λ wybierać \mathbf{h} spoza zbioru miary 0. Udowodnienie słabego mieszania dla p.p.o. jest dużo trudniejsze i polega na probabilistycznej *nieliniowej eliminacji parametrów* λ , dla których p.p.o. nie jest słabo mieszające.

indukowanie

5.3. Indukowanie Rauzy’ego.

Wygodnie jest zapisywać każdą permutację π jako parę permutacji (π_t, π_b) (ten sposób popularyzował Yoccoz): Mając skończony zbiór \mathcal{A} (nazywany alfabetem) składający się z d liter, rozważamy dwie bijekcje $\pi_t : \mathcal{A} \rightarrow \{1, \dots, d\}$ i $\pi_b : \mathcal{A} \rightarrow \{1, \dots, d\}$ nazywane odpowiednio górną i dolną permutacją („top” i „bottom”). Mamy $\pi = \pi_b \circ \pi_t^{-1}$. Nieredukowalność oznacza, że dla każdego $k \in \{1, \dots, d-1\}$, $\pi_t^{-1}\{1, \dots, k\} \neq \pi_b^{-1}\{1, \dots, k\}$. Przekształcenie przekładania odcinków zależy od tych permutacji i współrzędnych wektora λ indeksowanych literami alfabetu \mathcal{A} , $f = f(\lambda, \pi_t, \pi_b)$.

¹⁵Patrz też Twierdzenie B’ w podrozdziale $\frac{\text{Teich}}{5.6}$.

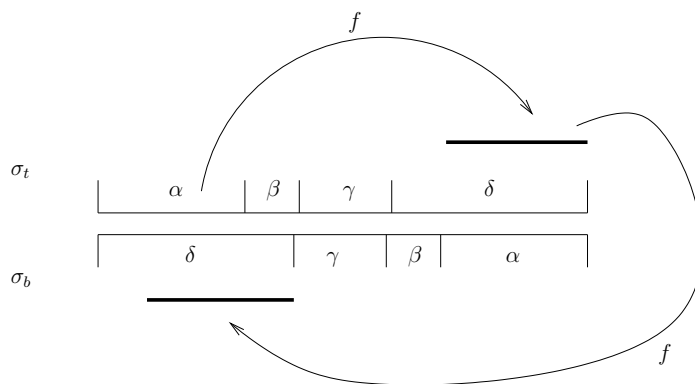
¹⁶Twierdzenia B i B’ nie mówią niestety nic nowego o wymiernych bilardach, bo tym bilardom odpowiada tutaj zbiór parametrów miary zero.

¹⁷Wskazówka: $\phi(x, s) := \psi(x)e^{2\pi is}$.

¹⁸Dla przekształcenia $f : X \rightarrow X$, ciąg funkcji $\Psi_n : X \rightarrow GL(d, \mathbb{C})$, $n = 1, 2, \dots$ nazywamy kocyklem, jeśli dla każdego $x \in X$ i $m, n \in \mathbb{N}$ zachodzi $\Psi_{m+n}(x) = \Psi_n(f^m(x))\Psi_m(x)$.

Definiujemy „przekształcenie renormalizacji”, nazywane przekształceniem Rauzy’ego-Veecha, następująco: Oznaczmy przez α_t i α_b litery odpowiadające odcinkom najbardziej na prawo dla π_t i π_b , tzn $\pi_t(\alpha_t) = \pi_b(\alpha_b) = d$. Zakładając nieredukowalność mamy $\alpha_t \neq \alpha_b$. Jeśli $\lambda_{\alpha_t} > \lambda_{\alpha_b}$, to dokonujemy tzw. „górną operację”, definiując nowe λ', π'_t, π'_b w następujący sposób:

$\pi'_t = \pi_t$, ale $\lambda'_{\alpha_t} = \lambda_{\alpha_t} - \lambda_{\alpha_b}$, tzn. odcinek ustawiony jako ostatni w π_t skrócony jest o ostatni odcinek w π_b , natomiast w π'_b ostatni odcinek, $\pi_b(\alpha_b)$, przestawiony jest po $\pi_b(\alpha_t)$ skróconym przez jego odjęcie. Należy zauważyć, że odpowiednie przekształcenie f' jest przekształceniem pierwszego powrotu dla f do odcinka I bez ostatniego odcinka długości λ_{α_b} .



Rysunek 3. P.p.o. i przekształcenie Rauzy’ego-Veecha (indukowanie Rauzy’ego) górna operacja.

Jeśli $\lambda_{\alpha_b} > \lambda_{\alpha_t}$ to w definicji zamieniamy role t i b dokonując tzw. „dolnej operacji”.

Przekształcenie $R(f, \pi_t, \pi_b) = (f', \pi'_t, \pi'_b)$ nazywane jest *indukowaniem Rauzy’ego* [Rauzy]. Jest ono liniowe przy ustalonych π_t, π_b . W przypadku górnej operacji, jak już napisałem wyżej,

$$\lambda'_\alpha = \begin{cases} \lambda_{\alpha_t} - \lambda_{\alpha_b} & \text{dla } \alpha = \alpha_t; \\ \lambda_\alpha & \text{dla } \alpha \neq \alpha_t. \end{cases}$$

Analogicznie jest dla dolnej operacji.

Będziemy później rozważać (całkowito-liczbową) macierz przekształcenia odwrotnego: $C(\lambda, \pi_t, \pi_b) = I + E_{\alpha_t \alpha_b}$, gdzie dla $\alpha \neq \beta$, $E_{\alpha\beta}$ oznacza macierz mającą 1 w miejscu $\alpha\beta$ (indeksujemy tu wyrazy macierzy literami alfabetu \mathcal{A}), a poza tym same zera, i będziemy rozważać macierz sprzężoną

$$(1) \quad (5.2) \quad C^* = I + E_{\alpha_b \alpha_t}.$$

Operację R możemy iterować. Dopóki $\lambda_{\alpha_t} > \lambda_{\alpha_b}$, powtarzamy górną operację. Kiedy powstaje nierówność przeciwna, działamy dolną operacją. Takie złożenie nazywamy przyspieszonym indukowaniem Rauzy’ego-Zoricha. Zostało wprowadzone przez Antona Zoricha w 1996, [Z1].

Dla $f = f_\alpha$, tzn. obrotu okręgu o kąt niewymierny α , jeśli zaczynamy od przekształcenia f_n pierwszego powrotu pod działaniem f do łuku o końcach $f^{q_{n-1}}(x_0), f^{q_n}(x_0)$, dla dowolnie ustalonego punktu x_0 , gdzie q_n to czasy kolejnych najbliższych podejść trajektorii $f^q(x_0)$ do x_0 (najbliższe podejścia następują naprzemiennie po obu stronach x_0), to łukiem (dziedziną) dla indukowania Rauzy'ego jest łuk o końcach $f^{q_{n-1}+q_n}(x_0), f^{q_n}(x_0)$. Przy kolejnych indukowaniach otrzymujemy łuki $(f^{q_{n-1}+kq_n}(x_0), f^{q_n}(x_0))$, $k = 2, \dots$, aż łuk $(f^{q_{n-1}+kq_n}(x_0), x_0)$ staje się krótszy niż $(x_0, f^{q_n}(x_0))$. Złożenie tych k indukowań na p.p.o. f_n , jest p.p.o. z dziedziną $(f^{q_{n+1}}(x_0), f^{q_n}(x_0))$, dla $q_{n+1} = q_{n-1} + kq_n$, to odpowiada indukowaniu Rauzy'ego-Zoricha.

Przy badaniu p.p.o. możemy zakładać, że $\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha = 1$, bo istotne są tylko proporcje długości. Oczywiście rozważamy tylko $\lambda_i > 0$, czyli odpowiedni dodatni sympleks. Po tej projektywizacji (i ograniczeniu się do wektorów λ o dodatnich współrzędnych) otrzymujemy z indukowania Rauzy'ego przekształcenie \tilde{R} pewnego podzbioru iloczynu kartezjańskiego dodatniego stożka w przestrzeni rzutowej wymiaru $\sharp \mathcal{A} - 1$ i zbioru permutacji alfabetu \mathcal{A} w siebie, czyli $\mathbb{P}_+^{\mathcal{A}} \times \Sigma_{\mathcal{A}}$,

$$\tilde{R}([\lambda], \pi_t, \pi_b) = ([\lambda'], \pi'_t, \pi'_b),$$

nazywane przekształceniem Rauzy'ego. Z indukowania Rauzy'ego-Zoricha otrzymujemy przekształcenie Zoricha $\tilde{Z}([\lambda], \pi_t, \pi_b) = ([\lambda'], \pi'_t, \pi'_b)$.

Klasą Rauzy'ego $\mathcal{C}(\pi_t, \pi_b)$ nazywamy zbiór wszystkich permutacji (π'_t, π'_b) , które mogą być uzyskane z (π_t, π_b) przez złożenia skończoną liczbę razy przekształcenia Rauzy'ego. Niezależnie od siebie H. Masur i W. Veech udowodnili w 1982, że dla każdej klasy Rauzy'ego \mathcal{C} , istnieje na $\mathbb{P}_+^{\mathcal{A}} \times \mathcal{C}$ jedyna (z dokładnością do mnożenia przez skalar) miara $\mu_{\mathcal{C}}$ ergodyczna, \tilde{R} -niezmiennicza, bezwzględnie ciągła względem miary Riemanna. Ta miara jest nieskończona.

kocykle

5.4. Kocykle i widmo. Nad dowolną klasą Rauzy'ego z przekształceniem R rozpatruje się kocykl Rauzy'ego-Veecha macierzy należących do $SL(d, \mathbb{Z})$:

$$C_n^*(\lambda, \pi_t, \pi_b) := \prod_{j=0}^{n-1} C^*(\lambda^{(j)}, \pi_t^{(j)}, \pi_b^{(j)}),$$

gdzie $(\lambda^{(j)}, \pi_t^{(j)}, \pi_b^{(j)}) = R^j(\lambda, \pi_t, \pi_b)$. Nietrudno udowodnić (najpierw dla $n = 1$, a dalej używając własności kocyklu), że

wizyty (5.3)
$$C_n^*(\lambda, \pi_t, \pi_b)_{\alpha\beta} = N_{\alpha\beta}^{(n)}(\lambda, \pi_t, \pi_b)$$

dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ i dowolnej liczby naturalnej n . Liczba $N_{\alpha\beta}^{(n)}$ po prawej stronie równości (5.3) ^{wizyty} oznacza liczbę wizyt dowolnego punktu $x \in I_\alpha(\lambda^{(n)}, \pi_t^{(n)})$ przy iterowaniu p.p.o. f w odcinku $I_\beta(\lambda, \pi_t)$, do czasu pierwszego powrotu do $I(\lambda^{(n)})$. Tutaj $I_\alpha(\lambda^{(n)}, \pi_t^{(n)})$ oznacza odcinek o numerze $\pi_t(\alpha)$ dla p.p.o. $R^n(f)$, a $I(\lambda^{(n)})$ sumę tych odcinków.

Równość (5.3) ^{wizyty} wyjaśnia czemu kocykl Rauzy'ego-Veecha jest użyteczny w badaniu rekurencji, a w szczególności odchyłeń średnich ergodycznych.

Bezpośrednie badanie wykładników Lapunowa kocyklu Rauzy'ego-Veecha nic nie daje, bo zawsze otrzymujemy 0. Poza tym miara $\mu_{\mathcal{C}}$ jest nieskończona, więc trudno ją wykorzystać w Twierdzeniu Oseledca (poniżej). Należy kocykl przyspieszyć, rozpatrując go nad przekształceniem Zoricha Z . Taki kocykl nazywa się Rauzy'ego-Veecha-Zoricha (RVZ). W [Z1] Anton Zorich udowodnił, że istnieje Z -niezmiennicza bezwzględnie ciągła miara skończona¹⁹ i że funkcja \log^+ normy kocyklu RVZ jest całkowalna.

To otworzyło pole do dalszego postępu, którego kulminacją było udowodnienie przez Avilę i Vianę hipotezy Kontsevicha-Zoricha, a mianowicie, że

Twierdzenie C

Twierdzenie C. *Dla każdej klasy Rauzy'ego ograniczone widmo Lapunowa kocyklu RVZ jest proste. Zero nie należy do tego widma.*

Użyta wyżej terminologia wynika z następującego *Multiplikatywnego Twierdzenia Ergodycznego Oseledca*: Jeśli $F : X \rightarrow X$ jest przekształceniem ergodycznym, zachowującym miarę probabilistyczną μ , a A_n jest kocyklem o wartościach w M_d (przestrzeni $d \times d$ macierzy rzeczywistych) z całkowalnym \log^+ normy, to nad X istnieją mierzalne wiązki $V_i, i = 0, \dots, k$, gdzie $k \leq d$, niezmiennicze (tzn. dla każdego i oraz $x \in X$ zachodzi $A_n(x)(V_i(x)) \subset V_i(F^n(x))$), gdzie $V_0(x) = \mathbb{R}^d, V_k(x) = \{0\}$ i $V_i(x) \supset V_{i+1}(x)$, inkluzje są właściwe, oraz istnieją liczby $\chi_i \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, zwane *wykładnikami Lapunowa*, takie, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A_n(u)\| = \chi_i,$$

dla każdego $u \in V_i(x) \setminus V_{i+1}(x)$.

(W dowodzie używa się symetryzacji macierzy, tj. $\sqrt[n]{A_n^* A_n}$, np. Ruelle, Publ. Math. IHES 50 (1979).)

W przypadku kiedy kocykl pochodzi ze składania jednej macierzy, tzn. X jest przestrzenią jednopunktową, Twierdzenie Oseledca wynika z postaci Jordana macierzy, a z prostości widma wynika jednokrotność i rzeczywistość wartości własnych.

Widmo proste w Twierdzeniu C oznacza, że dla wszystkich $i = 0, 1, \dots, g$, $\dim V_i(x) - \dim V_{i+1}(x) = 1$.

Widmo ograniczone oznacza, że zamiast wiązki \mathcal{R}^d z włóknem \mathbb{R}^d , na której działa kocykl Rauzy'ego-Veecha, rozważamy pewien jej faktor $H = \mathcal{R}^d / \ker(\Omega) \simeq \text{Im}(\Omega)$, gdzie Ω_{π_t, π_b} to pewna macierz antysymetryczna zależna tylko od permutacji, wymiaru $2g(\pi_t, \pi_b)$. Wiazka $\ker(\Omega)$ jest niezmiennicza dla naszego kocyklu, a wykładniki Lapunowa (dla przyspieszonego

¹⁹Podobne zachowanie występuje w klasycznych sytuacjach, np. dla przekształcenia rozciągającego stopnia 2 okręgu w siebie z punktem stałym parabolicznym, $f(x) = x + x^a, a > 1$, w otoczeniu punktu 0 w zapisie addytywnym, kiedy miara niezmiennicza bezwzględnie ciągła jest nieskończona dla $a \geq 2$. Tymczasem dla przekształcenia pierwszego wpadnięcia w uzupełnienie ustalonego otoczenia zera taka miara jest skończona.

kocyklu RVZ) są na niej zerowe. Widmo w Twierdzeniu C jest symetryczne względem 0, bo macierze faktor-kocyklu są symplektyczne na H , patrz np. [Via, podrozdział 1.9].

Widmo w Twierdzeniu C jest postaci

$$\chi_1 > \dots > \chi_g > -\chi_g > \dots > -\chi_1.$$

Dzięki Twierdzeniu C, Avila i Viana udowodnili hipotezę Kontsevicha-Zoricha, dotyczącą odchyień od średnich ergodycznych.

Dla p.p.o. $f : I \rightarrow I$, gdzie $I = I_1 \cup \dots \cup I_d$, oznaczmy

$$N_i(x, n) := \#\{k \in [0, 1, \dots, n-1] : f^k(x) \in I_i\}.$$

Z ergodyczności f wynika, że dla każdego i i prawie każdego x

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_i(x, n)}{n} = \lambda_i.$$

Twierdzenie D. [AV]. Istnieją stałe $1 = \nu_1 > \nu_2 > \dots > \nu_g > 0$ i dla prawie każdego λ podprzestrzenie $\mathbb{R}^d = V_0 \supset V_1 \supset \dots \supset V_{g+1}$, $\dim V_i - \dim V_{i+1} = 1$ dla $i \leq g$, nie zależące od x , takie, że dla każdego $u \in V_i \setminus V_{i+1}$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |\langle u, N(x, n) \rangle|}{\log n} = \nu_i.$$

Dla $u \in V_{g+1}$, $|\langle u, N(x, n) \rangle| \leq \text{Constant}$ dla wszystkich naturalnych n .

potok przesuniecie

5.5. Słabe mieszanie pionowego potoku przesunięć. Wróćmy jeszcze do pionowego potoku przesunięć. Brak słabego mieszania implikuje istnienie ϕ , dla którego równanie kohomologiczne (5.1) zachodzi. Stąd wynika (Veech [V2]), że dla każdej klasy Rauzy'ego \mathcal{C} , dla kolejnych czasów powrotu do pewnego $U \subset \mathbb{P}^{d-1} \times \mathcal{C}$ mamy zbieżność

$$(**) \quad (5.4) \quad \lim_{R^n([\lambda], \pi_t, \pi_b) \in U} \|C_n^*([\lambda], \pi_t, \pi_b)(th)\|_{\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d} = 0.$$

Ponieważ macierze C_n^* są całkowito-liczbowe, można $R^{\mathcal{A}}$ podzielić przez $\mathbb{Z}^{\mathcal{A}}$ i kocykl będzie jednoznacznie działać na wiązce torusów. Wtedy (5.4) nie może się zdarzyć dla żadnego t , o ile prosta th (zrzutowana na ten torus) nie przecina globalnej rozmaitości centralno-stabilnej W^{cs} zera torusa nad $([\lambda], \pi_t, \pi_b)$. Tak jest dla prawie wszystkich \mathbf{h} , o ile kowymiar W^{cs} , czyli wymiar przestrzeni niestabilnej kocyklu, równy $g = g(\pi_t, \pi_b)$, jest nie mniejszy niż 2 (Na podstawie Twierdzenia C, z tego, że $\chi_2 > 0$.) To daje pewne wyjaśnienie sformułowania Twierdzenia B.

Teich

5.6. Potok Teichmüllera, wykładnicze mieszanie.

Niejednostajna hiperboliczność kocyklu RVZ na wiązce H daje punkt wyjścia do zbadania własności stochastycznych działania tzw. rozszerzonego indukowania Rauzy'ego-Veecha na przestrzeni powierzchni translacyjnych z osobliwościami (i ze strukturą spiętych prostokątów), a nad tym odpowiedniego potoku specjalnego.

W podrozdziale ^{plaskie} (5.2), w (5.2), i w podrozdziale ^{indukowanie} 5.3, traktowaliśmy $C^* = C^*(\lambda, \pi_t, \pi_b)$ jako macierz. Teraz będziemy działali na wektorach z $\mathbb{R}^{\mathcal{A}}$. Przypomnijmy, że oznaczając $\mathbf{h}' := C^*(\mathbf{h})$, dla górnej operacji Rauzy'ego mamy

$$h'_\alpha = \begin{cases} h_{\alpha_t} + h_{\alpha_b} & \text{dla } \alpha = \alpha_b, \\ h_\alpha & \text{dla } \alpha \neq \alpha_b, \end{cases}$$

a dla dolnej operacji Rauzy'ego

$$h'_\alpha = \begin{cases} h_{\alpha_t} + h_{\alpha_b} & \text{dla } \alpha = \alpha_t, \\ h_\alpha & \text{dla } \alpha \neq \alpha_t. \end{cases}$$

Widać, że ta operacja daje nowe rozbięcie powierzchni na prostokąty, powstałe z potoku specjalnego dla p.p.o. $R(f, \pi_t, \pi_b)$, z funkcją dachową h' . Np. dla górnej operacji Rauzy'ego od prostokąta najbardziej na prawo, o podstawie $I_{\alpha_t}^t$, i wysokości h_{α_t} , zostaje odjęty z prawej strony prostokąt o podstawie długości λ_{α_b} i wysokości h_{α_t} , i przyklejony podstawą do górnego boku $I_{\alpha_b}^b$ prostokąta o podstawie $I_{\alpha_b}^t$ i wysokości h_{α_b} .

Otrzymujemy tzw. odwracalne indukowanie Rauzy'ego-Veecha $(\lambda, h, \pi_t, \pi_b) \mapsto (\lambda', h', \pi'_t, \pi'_b)$ przestrzeni $\hat{\Omega}_{\mathcal{A}} := \{(\lambda, h, \pi_t, \pi_b) \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{A}} \times H_{\pi_t, \pi_b}^+ \times \Sigma_{\mathcal{A}}\}$ w siebie, gdzie H^+ oznacza pewną wiązkę stożków w wiązce H (patrz Uwaga 2, dalej w tym podrozdziale). Na tej przestrzeni działa potok

potokT (5.5) $\Phi_t(\lambda, h, \pi_t, \pi_b) = (e^t \lambda, e^{-t} h, \pi_t, \pi_b).$

Oznaczmy $\hat{\mathcal{Y}} := \{(\lambda, h, \pi_t, \pi_b) \in \hat{\Omega}_{\mathcal{A}} : \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha = 1\}$.

Oznaczmy $r(\lambda, h, \pi_t, \pi_b) := -\log \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda'_\alpha$. Rozważmy przekształcenie \hat{R} przestrzeni $\hat{\mathcal{Y}}$ w siebie

$$\hat{R}(\lambda, h, \pi_t, \pi_b) = (e^{r(\lambda, h, \pi_t, \pi_b)} \lambda', e^{-r(\lambda, h, \pi_t, \pi_b)} h', \pi'_t, \pi'_b).$$

Dla przekształcenia \hat{R} z funkcją dachową r rozważamy potok specjalny, który nazywamy potokiem geodezyjnym na przestrzeni moduli spiętych prostokątów (To jest potok w parametrach, oczywiście zupełnie inny niż pionowy potok przesunięć na indywidualnych spiętych prostokątach, tzn. inny niż potok specjalny dla indywidualnych p.p.o. z funkcją dachową h , podrozdział 4.2 !)

Używając nieco innego języka, możemy rozpatrywać iloraz $\Omega_{\mathcal{A}} = \hat{\Omega}_{\mathcal{A}} / \mathcal{V}$ gdzie \mathcal{V} to grupa przekształceń generowana przez odwracalne indukowanie

Rauzy’ego-Veecha. Na tej przestrzeni działa potok $g_t = \Phi_t/\mathcal{V}$. Uzasadnione jest używanie dla tego potoku nazwy *potok geodezyjny Teichmüllera* na przestrzeni $\Omega_{\mathcal{A}}$ moduli spiętych prostokątów.

Uwaga 1. Przyspieszone indukowanie Rauzy’ego-Veecha-Zoricha jest niejednostajnie rozciągające, przyspieszone odwracalne indukowanie jest skończonym produktem nad jego naturalnym rozszerzeniem²⁰, niejednostajnie hiperbolicznym na włóknach.

Niejednostajność rozciągania pojawia się blisko brzegu sympleksu parametrów λ . Tam Avila definiuje dynamikę brzegową w terminach przekształceń Rauzy’ego-Veecha dla p.p.o. z mniejszą liczbą odcinków i stosuje indukację po tej liczbie.

Przestrzeń $\Omega_{\mathcal{A}}$ jest związana z przestrzenią powierzchni translacyjnych z osobliwościami, w otoczeniu których mapy są postaci $z \mapsto \frac{z^{\kappa+1}}{\kappa+1}$, $\kappa > 1$. Taka powierzchnia (M, ω) ma w szczególności jednowymiarową strukturę zespoloną, z zamkniętą 1-formą $\omega = dz$ po wyjęciu osobliwości, lokalnie, a w odpowiednich mapach w otoczeniu osobliwości $\omega = z^\kappa dz$. Liczby κ nazywane są *stopniami* osobliwości.

Takie zespolone jednowymiarowe powierzchnie nazywane są *różniczkami abelowymi*.

Przestrzeń ich klas równoważności przy translacyjnych zmianach współrzędnych nazywana jest przestrzenią Teichmüllera różniczek abelowych. Oznaczmy ją, dla powierzchni genusu g , przez \mathcal{H}_g . Nietrudno zauważyć (np. z twierdzenia Poincarégo-Hopfa dla pola poziomego lub pionowego, patrz niżej) że $\sum_j \kappa_j = 2g - 2$.

Dla różniczki abelowej (M, ω) można rozpatrywać poziome, lub pionowe, pole wektorów jednostkowych $V_{\mathbf{h}}$, odpowiednio $V_{\mathbf{v}}$, zdefiniowane poza zbiorem osobliwości formy ω przez $\omega(V_{\mathbf{h}}) = 1$, odpowiednio $\omega(V_{\mathbf{v}}) = i$. Odpowiadające im trajektorie (lub potoki przesunięć) nazywamy: *poziomymi* i *pionowymi*. W osobliwości stopnia κ indeks każdego z tych pól jest równy $-\kappa$; jest to „siodło krotności κ ”. Wychodzi z niego i wchodzi po $\kappa + 1$ separatrys (trajektorii) poziomych i wychodzi i wchodzi po $\kappa + 1$ separatrys pionowych.^{21, 22}

²⁰Samo indukowanie RVZ nie jest odwracalne, jest 2-do-1 bo przeciwobraz może zależeć od tego, czy indukowanie jest górne, czy dolne.

²¹Widać analogię z homeomorfizmami pseudo-Anosowa wprowadzonymi przez Thurstona. Dla takiego homeomorfizmu mamy foliacje stabilną i niestabilną, takie że na niezerowych wektorach stycznych do liści odpowiednia różniczka kwadratowa, lokalnie dz^2 , przyjmuje wartości rzeczywiste, odpowiednio dodatnie i ujemne. Na liściach nie jest jednak zdefiniowany zwrot, to znaczy pole kierunków styczne do foliacji). Obrazek topologiczny takich par foliacji w osobliwościach jest taki sam jak dla par (poziomy i pionowy) naszych potoków przesunięć.

²²Dla danej powierzchni translacyjnej (M, ω) , gdzie $\omega = dz$ poza osobliwościami, można rozpatrywać potok przesunięć F_s^θ pod dowolnym kątem θ , tj. poziomy potok przesunięć dla formy $e^{-i\theta}\omega$. Twierdzenie B w podrozdziale 5.2 ^{plaskie} przybiera wtedy postać:

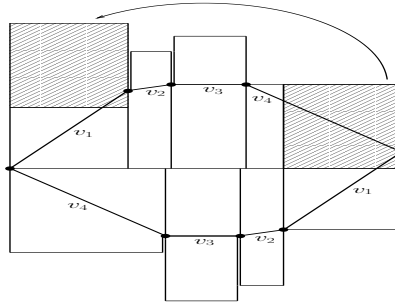
Mając daną powierzchnię translacyjną z osobliwościami (różniczkę abelową), zakładając typowość, w szczególności, że żadne dwie osobliwości nie są połączone separatrą poziomą lub pionową, można prawie kanonicznie utworzyć odpowiednią strukturę spiętych prostokątów, [Z2,]: Dowolnie wybieramy osobliwość Q i rozważamy skończoną część Γ (powiedzmy długości 1) wychodzącej z niej separatrą poziomą. W Γ ustalamy jako Q_1 pierwszy punkt przecięcia z separatrą pionową Y wchodzącą do jakiejś osobliwości. Jeśli z wszystkich punktów łuku $X := [Q, Q_1] \subset \Gamma$ wyprowadzimy linie pionowe (w tym samym kierunku co Y) kończąc je w punktach pierwszego powrotu do łuku X , ułożą się one w rodzinę prostokątów, jak w definicji spiętych prostokątów, 5.2.

Początkowa dowolność wyboru X , ale ze specjalnymi końcami, implikuje, że nasze przyporządkowanie: moduli spiętych prostokątów \rightarrow przestrzeń Teichmüllera różniczek abelowych, jest skończone-do-1.²³

Uwaga 2. Konstrukcję można też zacząć od wektorów v_j łączących kolejne osobliwości, jak na Rysunku 4, co (dla ustalonej permutacji) pozwala wyliczyć $\mathbf{h} = \Omega\tau$ i zdefiniować macierz Ω , gdzie $\tau = (\tau_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ to rzuty na oś y wektorów v_α (na Rysunku 4: v_i). Ponieważ muszą być spełnione dla wszystkich $i = 1, \dots, d-1$ nierówności

$$\sum_{\pi_t(\alpha) \leq i} \tau_\alpha > 0 \quad \text{i} \quad \sum_{\pi_b(\alpha) \leq i} \tau_\alpha < 0$$

(tzn. odpowiednie części łamanej muszą być nad, i pod, X), otrzymujemy $\mathbf{h} \in H^+$, gdzie H^+ to stożek w H opisany tymi nierównościami. Patrz podrozdziały 5.2 i 5.4. Są to dokładnie te \mathbf{h} , które mają geometryczny sens powierzchni translacyjnych z osobliwościami.



Rysunek 4. Dziedziny fundamentalne powierzchni translacyjnej: wielokąt i spięte prostokąty.

Twierdzenie B', [AF]. Dla prawie każdej powierzchni translacyjnej (M, ω) potok F_s^θ na (M, ω) jest słabo mieszający dla prawie każdego θ .

²³Taki „oszczędny” wybór X daje jednocześnie najmniejszą możliwą liczbę d w uzyskanym p.p.o. $d = \sum_j (\kappa_j + 1) + 1 = 2g + \#\Sigma - 1$. Na Rysunku 4, po sklejeniach parami odpowiednich v_i mamy ”precelek”, $g = 2$, z jedną osobliwością, więc $d = 4$.

Przeniesiony z $\Omega_{\mathcal{A}}$ na \mathcal{H} potok g_t będziemy także nazywać geodezyjnym potokiem Teichmüllera i oznaczać g_t .

Uwaga 3. Będziemy rozważać ten potok tylko na powierzchniach o polu równym 1, tzn. $\int dx dy = \frac{i}{2} \int \omega \wedge \bar{\omega} = 1$. To ma sens bo z definicji 5.5 potok Teichmüllera zachowuje pole.

Przestrzeń Teichmüllera różniczek abelowych można podzielić (stratyfikować) na podzbiory (słoje) wg liczby i stopni κ_j punktów osobliwych $\mathcal{H}(\kappa_1, \dots, \kappa_m)$. Jeszcze Masur i Veech udowodnili ergodyczność (a także mieszanie) potoku Teichmüllera na składowych słojach dla kanonicznej bezwzględnie ciągłej miary niezmienniczej ν (udowodnili też jej skończoność).

Powyższy niejednostajnie hiperboliczny krajobraz pozwolił Avili, Gouëzowi i Yoccozowi, używając m.in. idei Dolgopyata, na udowodnienie w [AGY] faktu idącego o wiele dalej niż ergodyczność:

Twierdzenie E. *Potok geodezyjny Teichmüllera g_t na każdej składowej spójności \mathcal{H} każdego słoja $\mathcal{H}(\kappa_1, \dots, \kappa_m)$ jest wykładniczo mieszający, tzn. istnieje $\alpha > 0$ takie, że dla każdych funkcji $\phi, \psi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ (obserwable) ciągłych w sensie Höldera²⁴ i odpowiedniej stałej $C(\phi, \psi)$, dla wszystkich $t > 0$*

$$\left| \int_{\mathcal{H}} (\phi \circ g_t) \cdot \psi d\nu - \int \phi d\nu \int \psi d\nu \right| \leq C(\phi, \psi) e^{-\alpha t}.$$

Szersza dyskusja dynamiki potoku geodezyjnego i ogólniej: grupy $SL(2, \mathbb{R})$, została przedstawiona niedawno w Wiadomościach Matematycznych w prezentacji [Fr] wyników Maryam Mirzakhani.²⁵

6. OPERATORY SCHRÖDINGERA

Ten rozdział jest zapożyczony z prezentacji E. Ghysa [G] (z moim tłumaczeniem na polski). Patrz też [HK].

To jest temat, w którego zrozumienie przez Artura z punktu widzenia układów dynamicznych radykalnie zmieniło krajobraz.

Wyobraźmy sobie jednowymiarową dyskretną cząstkę kwantową. Jej stan jest opisany przez pewną l^2 -funkcję ψ na \mathbb{Z} o wartościach zespolonych. Można przyjąć, że prawdopodobieństwo, że cząstka jest ulokowana w punkcie n jest równe $|\psi(n)|$. Ewolucja ψ w czasie jest, jak zwykle, opisana przez

²⁴Słoje \mathcal{H} nie są zwarte, należy więc odpowiednio zdefiniować ciągłość Höldera. W szczególności zakłada się, że obserwable wielomianowo maleją do zera w otoczeniu nieskończoności. Patrz [AGY, Theorem 2.14].

²⁵W jednym z wywiadów Avila powiedział, że nie spodziewał się na Kongresie ICM w Seulu medalu Fieldsa, bo nie sądził, że mogą być dwa medale Fieldsa z tej samej dziedziny.

równanie Schrödingera: pochodna czasowa ψ jest równa $iH\psi$, gdzie H jest operatorem Schrödingera:

$$\text{Mathieu} \quad (6.1) \quad H(\psi)(n) = \psi(n+1) + \psi(n-1) + V(n)\psi(n).$$

Pierwsze dwa składniki dają dyskretną wersję operatora Laplace'a, a $V(n)$ jest pewnym ograniczonym potencjałem opisującym otoczenie cząstki.

Proszę zauważyć, że H jest ograniczonym, samosprzężonym operatorem na l^2 . Wszystko zależy od *widma* H i od *miary spektralnej*. Przypomnijmy, że widmo, to zbiór energii E takich, że operator $H - E \cdot Id$ nie jest odwracalny. Jest to zwarty podzbiór $\sigma(H)$ płaszczyzny \mathbb{R}^2 .

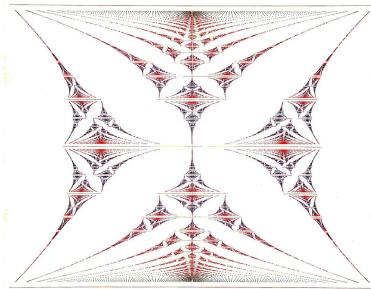
Miara spektralna związana z funkcją ψ to miara μ_ψ (o nośniku w $\sigma(H)$), taka, że dla każdej ciągłej rzeczywistej funkcji g zachodzi $\langle \psi, g(H)\psi \rangle = \int g d\mu_\psi$.

Miara spektralna dostarcza klucza do zrozumienia dynamiki cząstki. Mówiąc nieprecyzyjnie:

- Cząstka „podróżuje swobodnie”, jeśli μ_ψ jest bezwzględnie ciągła; ośrodek jest przewodnikiem.
- Cząstka „trochę podróżuje”, jeśli μ_ψ jest ciągła singularna.
- Cząstka „nie podróżuje” jeśli μ_ψ jest atomowa. Ośrodek jest izolatorem.

Najciekawsza sytuacja powstaje, gdy V jest quasi-okresowe. Można np. myśleć o quasi-kryształach. Specjalny przypadek powstaje, gdy $V(n) = 2\lambda \cos(2\pi n\alpha)$, w naszym kontekście to najprostszy przykład. Jest nazywany *operatorem prawie Mathieu* (almost Mathieu operator).

Bazując na obliczeniach numerycznych, przypuszczano, że kształt widma jest zbiorem Cantora dla wszystkich niewymiernych liczb α . W 1981 Mark Kac oferował 10 Martini za dowód. Barry Simon ukuł termin *Problem za dziesięć Martini* (Ten Martini Problem). Następujący obrazek to sławny *motyl Hofstadter'a* (Hofstadter's butterfly²⁶), patrz: Wikipedia.



Rysunek 5. Motyl Hofstadter'a.

²⁶Douglas R. Hofstadter (1976). "Energy levels and wavefunctions of Bloch electrons in rational and irrational magnetic fields". Physical Review B. 14 (6): 2239 – 2249.

Krojąc motyla wzdłuż linii pionowych z pierwszą współrzędną α otrzymujemy widmo dla przypadku krytycznego $\lambda = 1$. Problemowi Dziesięciu Martini i powiązanim hipotezom było poświęconych wiele prac w latach 1980-tych i 1990-tych. Chyba uczciwie jest powiedzieć, że specjaliści z teorii spektralnej wyczerpali swoje narzędzia. Potrzebne były nowe idee i narzędzia. Artur wprowadził nowe metody układów dynamicznych do badania problemu i zdołał poradzić sobie z najtrudniejszymi hipotezami. Oto próbka niektórych rezultatów:

Twierdzenie (Avila-Jitomirskaya 2009). *Dla wszystkich $\lambda \neq 0$ i niewymiernych α , widmo $\sigma_{\lambda,\alpha}$ jest zbiorem Cantora.*

Twierdzenie (Avila-Krikorian 2006). *Miara Lebesgue’a widma $\sigma_{\lambda,\alpha}$ jest równa $4|1 - |\lambda||$.*

To było udowodnione już wcześniej przez Jitomirską i Krasovsky’ego w sytuacji niekrytycznej, kiedy $\lambda \neq 1$.

Twierdzenie. (Avila, Damianik, 2008). *Dla wszystkich niewymiernych α i $|\lambda| < 1$, widmo jest bezwzględnie ciągłe.*

Etienne Ghys kończy ten rozdział tak:

„Podstawowym narzędziem w dowodach tych trudnych twierdzeń jest znowu *renormalizacja*.

Chcę wspomnieć, bez podania wyjaśnień, że Artur stworzył niedawno globalną teorię operatorów Schrödingera z jedną częstotliwością, opisując szczegółowo to co nazywa analitycznością względem stratyfikacji (stratified analyticity) wykładników Lapunowa i brzegu niejednostajnej hiperboliczności.²⁷

Artur rozpoczął swoją karierę rozwiązując szereg dawno postawionych problemów i hipotez, jest on jednak także nadzwyczajnym budowniczym teorii. Cała ta teoria została rozwinięta przez Artura i wymagało to wybitnej wnikliwości i nadzwyczajnych umiejętności technicznych.”

klejnot

7. PERELKA

Avila udowodnił niewinnie wyglądające, ale w rzeczywistości trudne

²⁷FP: Patrz [A3], gdzie w (6.1) potencjał $V(n) = 2\lambda \cos(2\pi n\alpha)$ w operatorze prawie Mathieu jest zastąpiony ogólniejszym: $V(n) = v(n\alpha + x)$ gdzie $v : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ jest funkcją analityczną. Równanie $H(\psi)(n) = E\psi(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, $E \in \sigma(H)$, przekształca się na równanie $\begin{pmatrix} \psi(n+1) \\ \psi(n) \end{pmatrix} = S_{E-v}(n\alpha + x) \begin{pmatrix} \psi(n) \\ \psi(n-1) \end{pmatrix}$, gdzie $S_{E-v}(y) := \begin{pmatrix} E - v(y) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Szukane są rozwiązania o wzroście najwyżej wielomianowym. Wygenerowany zostaje kocykl, jako produkt macierzy $S_{E-v}^{(n)}(x) := S_{E-v}(x + (n-1)\alpha) \dots S_{E-v}(x) \in SL(2, \mathbb{R})$. Dalsza teoria związana jest z analizą tego kocyklu, w szczególności jego wykładników Lapunowa, przy pomocy jego kompleksyfikacji. Porównaj podrozdział 6.4.

Twierdzenie F. Każdy C^1 -dyfeomorfizm dowolnej zwartej C^∞ -rozmaitości różniczkowej zachowujący formą objętości klasy C^∞ może być dowolnie przybliżony przez dyfeomorfizm klasy C^∞ zachowujący tę formę.

To twierdzenie nie należy do układów dynamicznych. Aproksymacje zrobione są przez indukcję po szkieletach triangulacji, metodami równań cząstkowych. Patrz [A2].

8. PODZIĘKOWANIA

Dziękuję Krzysztofowi Frączkowi i Mariuszowi Lemańczykowi za szereg cennych uwag dotyczących wstępnej wersji tego artykułu i K. Frączkowi za wskazania literatury. Dziękuję Damianowi Orlefiowi za pomoc w wykonaniu Rysunków 3 i 4.

LITERATURA

- | | | |
|-------|---------|---|
| A1 | [A1] | A. Avila, <i>Dynamics of Renormalization Operators</i> , Proc. ICM Hyderabad 2010, Vol. I, 154-175. |
| A2 | [A2] | A. Avila <i>On the regularization of conservative maps</i> , Acta Math. 205 (2010), 5-18. |
| A3 | [A3] | A. Avila <i>Global theory of one-frequency Schrödinger operators</i> , Acta Math. 215.1 (2015), 1 - 54. |
| AdML | [AdML] | A. Avila, W. de Melo, M. Lyubich, <i>Regular or stochastic dynamics in in real analytic families of unimodal maps</i> , Invent. math. 154 (2003), 451-550. |
| AF | [AF] | A. Avila, G. Forni, <i>Weak mixing for interval exchange transformations and translation flows</i> , Annals of Math. 165 (2007), 637-664. |
| AGY | [AGY] | A. Avila, S. Gouëzel, J.-C. Yoccoz, <i>Exponential mixing for the Teichmüller flow</i> , Publ. Math. IHES (2) 104.2 (2006), 143-211. |
| AKLS | [AKLS] | A. Avila, J. Kahn, M. Lyubich, W. Shen, <i>Combinatorial rigidity for unicritical polynomials</i> , Annals Math. 170 (2009), 783-797. |
| ALeg | [ALeg] | A. Avila, M. Leguil, <i>Weak mixing properties of interval exchange transformations & translation flows</i> , arXiv:1605.03048v1 (2016). |
| ALS | [ALS] | A. Avila, M. Lyubich, W. Shen, <i>Parapuzzle of the Multibrot set and typical dynamics of unimodal maps</i> , Journal Europ. Math. Soc.13 (2011), 27-56. |
| ALyu1 | [ALyu1] | A. Avila, M. Lyubich, <i>The full renormalization horseshoe for unimodal maps of higher degree: Exponential contraction along hybrid classes</i> , Publ. Math. IHES, 114 (2011), 171-223. |
| ALyu2 | [ALyu2] | A. Avila, M. Lyubich, <i>Hausdorff dimension and conformal measures of Feigenbaum Julia sets</i> . J. of AMS 21 (2008), 305-383. |
| ALyu3 | [ALyu3] | A. Avila, M. Lyubich, <i>Lebesgue measure of Feigenbaum Julia sets</i> , arXiv:1504.02986v2. |
| AM1 | [AM1] | A. Avila, C. Moreira, <i>Statistical properties of unimodal maps: periodic orbits, physical measures and pathological laminations</i> , Publ. Math. IHES 101 (2005), 1-67. |
| AM2 | [AM2] | A. Avila, C. Moreira, <i>Hausdorff dimension and the quadratic family</i> (2002). |
| AM3 | [AM3] | A. Avila, C. Moreira, <i>Statistical properties of typical quadratic maps: the quadratic family</i> , Annals Math. 161 (2005), 831-881 |
| AV | [AV] | A. Avila, M. Viana, <i>Simplicity of Lyapunov spectra: Proof of the Zorich-Kontsevich conjecture</i> , Acta Math. 198 (2007), 1-56. |
| CE | [CE] | P. Collet, J.-P. Eckmann, <i>Iterated maps on the interval as dynamical systems</i> , Progress in Physics, Birkhäuser 1980. |

- [dMvS] [dMvS] W. de Melo, S. van Strien, *One-dimensional Dynamics*, Springer-Verlag, 1994.
- [F] [F] G. Forni, *On the Brin Prize work of Artur Avila in Teichmüller dynamics and interval-exchange transformations*, J. of Modern Dynamics, 6.2 (2012), 139-182.
- [Fr] [Fr] K. Frączek, *Maryam Mirzakhani, pierwsza laureatka medalu Fieldsa*, Wiadomości Matematyczne, 52.1 (2016), 21-36.
- [G] [G] É. Ghys, *The work of Artur Avila*, Proc. ICM Soeul 2014, Vol I, 47-54.
- [GS] [GS] J. Graczyk, G. Świątek, *Generic hyperbolicity in the logistic family*, Annals of Math. 146 (1997), 1-52.
- [HK] [HK] P. Hubert, R. Krikorian, *Artur Avila, un génie carioca a Paris*, Gazette Des Mathématiciens 142 (2014) 55-69.
- [Lyu1] [Lyu1] M. Lyubich, *Dynamics of quadratic polynomials, I,II*, Acta Math. 178 (1997), 185-297.
- [Lyu2] [Lyu2] M. Lyubich, *Feigenbaum-Coulet-Tresser Universality and Milnor's Hairiness Conjecture*, Ann. Math. 149.2 (1999), 319-420.
- [Lyu3] [Lyu3] M. Lyubich, *Forty years of unimodal dynamics: On the occasion of Artur Avila winning the Brin Prize*, J. Modern Dynamics, 6.2 (2012), 183-203.
- [Lyu4] [Lyu4] M. Lyubich, *Analytic low-dimensional dynamics: From dimension one to two*, Proc. ICM Soeul 2014, Vol I, 443-474.
- [Ma] [Ma] H. Masur, *Interval-exchange transformations and measured foliations*, Ann. of Math. (2), 115 (1982), 169-200.
- [MS] [MS] M. Misiurewicz, W. Szlenk, *Entropy of piecewise monotone mappings*, Studia Math. 67 (1980), 45-63.
- [MT] [MT] J. Milnor and W. Thurston, *On iterated maps of the interval*, Lect. Notes Math., Springer (1988), 465-563.
- [P] [P] F. Przytycki, *Iteration of holomorphic Collet-Eckmann maps: Conformal and invariant measures. Appendix: On non-renormalizable quadratic polynomials*, TAMS 350.2 (1998), 717-742.
- [Rauzy] [Rauzy] G. Rauzy, *Échanges d'intervalles et transformations induites*, Acta Arith. 34.4 (1979), 315-328.
- [V1] [V1] W. Veech, *Gauss measures for transformations on the space of interval exchange maps*, Ann. of Math. (2), 115 (1982), 201-242.
- [V2] [V2] W. Veech, *The metric theory of interval exchange transformations. I. Generic spectral properties*, Amer. J. Math. 106 (1984), 1331-1359.
- [Via] [Via] M. Viana, *Dynamics of Interval Exchange Transformations and Teichmüller Flows*, Lecture notes 2008, Marcelo Viana home web page. Także: Rev. Mat. Complut. 19.1 (2006), 7-100.
- [Yo] [Yo] J.-Ch. Yoccoz, *Interval exchange maps and translation surfaces*, Homogeneous flows, moduli spaces and arithmetic, 1-69, Clay Math. Proc., 10, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.
- [Z1] [Z1] A. Zorich, *Finite Gauss measure on the space of interval exchange transformations. Lyapunov exponents*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 46 (1996), 325-370.
- [Z2] [Z2] A. Zorich, *Flat surfaces*, Frontiers in number theory, physics, and geometry. I, 437-583, Springer, Berlin, 2006.

† FELIKS PRZYTYCKI, INSTITUT MATEMATYCZNY PAN, UL. ŚNIADECKICH 8, 00-956 WARSZAWA.