

WSTĘP DO TEORII ITERACJI FUNKCJI WYMIERNYCH NA SFERZE RIEMANNA

I. Przedmowa i wstęp do Wstępu.

Przedstawiony tekst to notatki części cyklu wykładów wygłoszonych przez pierwszego z autorów w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego w roku 1987/1988. Drugi z autorów był wtedy studentem, słuchaczem tych wykładów i on jest głównym redaktorem tego tekstu.

Wykład składał się z dwóch części:

1. Ogólnej – dotyczącej klasycznej części teorii iteracji funkcji wymiernych z czasów Julii i Fatou oraz zastosowanie teorii przekształceń kwazikonforemnych w Twierdzeniu Dennisa Sullivana o nieistnieniu dziedzin błędzących i oszacowaniu liczby orbit dziedzin okresowych.

2. Dotyczącej iteracji wielomianów kwadratowych – teorii Douady’ego-Hubbarda geometrii zbiorów Julii i zbioru Mandelbrota.

Przedstawiony tekst dotyczy tylko części 1. i to też z dużymi lukami. W ostatnich latach pojawiło się kilka nowych podręcznikowych tekstów dotyczących podstaw teorii iteracji funkcji wymiernych [Beardon, Carleson, Milnor]. Uznaliśmy jednak, że nasz tekst mimo już paroletniego leżenia na półce nadal może jeszcze być użyteczny nawet w formie niekompletnej i postanowiliśmy go udostępnić czytelnikom w postaci tego skryptu.

W teorii iteracji funkcji wymiernych klasyfikuje się punkty sfery Riemanna $\hat{\mathbb{C}}$ w zależności od zachowania się ich trajektorii lub trajektorii ich małych otoczeń. Jeśli f oznacza przekształcenie wymierne (iloraz dwóch wielomianów) to chodzi o trajektorie w przód $z, f(z), f^2(z), \dots$ gdzie f^n oznacza złożenie n razy przekształcenia f : $f^n = f \circ f \circ f \circ \dots \circ f$. Popularnym obiektem badań jest zbiór Julii:

$$J(f) := \{z \in \hat{\mathbb{C}} : \text{dla każdego otoczenia } U \text{ punktu } z \text{ ciąg iteracji } f^n|_U \\ \text{nie jest normalny w sensie Montela}\}$$

Podstawy tej teorii stworzyli na początku XX wieku matematycy francuscy Gaston Julia i Pierre Fatou. Jednak do lat 70-tych teoria ta była mało znana i uważana za nudną.

Za to w ciągu ostatnich 15 lat uzyskano wiele pięknych rysunków zbiorów Julii przy użyciu komputerów. Dzięki temu między innymi stara teoria odżyła i dokonano w niej dużych postępów.

Na ogół zbiór Julii ma niezwykle ”fraktalny” kształt: jego wymiar Hausdorffa jest większy niż wymiar topologiczny jego dowolnie małe fragmenty są podobne do dużych (własność samopodobieństwa).

Innym popularnym zbiorem, tym razem w zbiorze parametrów jest tzw zbiór Mandelbrota M . Oznaczmy $f_c(z) = z^2 + c$. Definiujemy

$$M = \{c \in \hat{\mathbb{C}} : f_c^n(0) \not\rightarrow \infty\}$$

Z tym zbiorem związanych jest wiele nadal nie rozwiązanych problemów, na przykład nie wiadomo czy miara Lebesgue'a w wymiarze 2 brzegu M jest dodatnia czy nie i nie wiadomo czy ten brzeg jest lokalnie spójny. Ciekawe, że dla wielu parametrów zbiór Julii dla f_c jest podobny do zbioru Mandelbrota w otoczeniu tego parametru c .

Rysunki: w środku zbiór Mandelbrota, dookoła zbiory Julii

Spis treści:

- I. Przedmowa i wstęp do wstępu.
 - II. Zbiór Julii i jego własności. Przypadek wielomianów.
 1. Zbiór Julii: podstawowe własności, punkty wyjątkowe, gęstość punktów okresowych.
 2. Sprzężenie z λz lub z^k w okolicy ścieku, odpowiednio superścieku, basen A_∞ dla wielomianów.
 3. Wielomiany stopnia dwa. Spójność $J(f_c) \iff c \in M$.
 - III. Składowe uzupełnienia zbioru Julii.
 1. Sytuacja gdy w zbiorze granicznym dla ciągu funkcji $f^n|_U$ dla składowej U istnieje funkcja niestała. Składowe osobliwe: dyski Siegela, pierścienie Hermana.
 2. Składowa okresowa U na której wszystkie funkcje graniczne ciągu $f^n|_U$ są stałe. Baseny bezpośredniego przyciągania ścieków i punktów neutralnych wymiernych (parabolicznych).
 - IV. Punkty krytyczne.
 1. Punkty krytyczne w basenach bezpośredniego przyciągania ścieków i punktów parabolicznych.
 2. Punkty krytyczne w zbiorze Julii. Expanding.
 - V. Punkty neutralne: klasyczne oszacowania liczby orbit okresowych ścieków i punktów neutralnych.
 - VI. Podsumowanie.
 - VII. Dowód Twierdzenia Sullivan'a o nieistnieniu składowych błądzących.
- Dodatek 1. Automorfizmy dysku Poincaré'go: podstawowe definicje.
- Dodatek 2. Dowód Twierdzenia Montela.

Elementarny artykuł pierwszego z autorów, o fraktalach pojawiających się przy iterowaniu funkcji wymiernych, z rysunkami z komputera, ukazał się w Delcie nr 2 w 1985 roku.

II Zbiór Julii i jego własności. Przypadek wielomianów.

W całej pracy f będzie oznaczało przekształcenie holomorficzne $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, (czyli f jest przekształceniem wymiernym — patrz Appendix) stopnia $\deg(f) \geq 2$.

1. Zbiór Julii.

Definicja 1.1. Zbiorem Julii przekształcenia holomorficznego

$$f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$$

nazywamy zbiór

$$J(f) := \{z \in \hat{\mathbb{C}} : \forall U \in \mathcal{Z} \text{ } U \text{ otwarty, rodzina } \{f^n|_U\}_{n=0}^\infty \text{ nie jest normalna}\}.$$

Przypomnijmy, że rodzina $\{g_n\}_{n=1}^\infty$, $g_n : V \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ jest normalna jeśli z każdego podciągu g_{n_k} można wybrać podciąg $g_{n_{k_i}}$ niemal jednostajnie zbieżny w metryce Riemanna do pewnej funkcji holomorficzej g . Oznaczać będziemy to $g_{n_{k_i}} \rightrightarrows g$. Jeśli g będzie funkcją stałą równą c to będziemy również pisać $g_{n_{k_i}} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} c$.

Przykład 1.2.

(a) Niech f będzie zdefiniowane wzorem

$$f(z) := z^k, \quad |k| \geq 2.$$

Wówczas $J(f) = \{|z| = 1\}$.

Dowód. Najpierw rozpatrzmy przypadek $k \geq 2$. Dla każdego $z \in \hat{\mathbb{C}}$ zachodzi

$$(*) \quad |f(z)| = |z|^k$$

stąd dla z takiego, że $|z| < 1$ mamy $|f^n(z)| = |z|^{(k^n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, czyli $f^n|_{\{|z| < 1\}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Analogicznie $f^n|_{\{|z| > 1\}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$. Stąd $J(f) \subseteq \{|z| = 1\}$. Pokażemy teraz, że $J(f) \supseteq \{|z| = 1\}$. Niech $z \in \{|z| = 1\}$, $U \ni z$ zbiór otwarty. Załóżmy że istnieje podciąg $f^{n_i}|_U \xrightarrow{i \rightarrow \infty} g$. Na mocy (*) otrzymujemy $f^{n_i}|_{U \cap \{|z| < 1\}} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$. Ponieważ $U \cap \{|z| < 1\}$ jest zbiorem otwartym to $g \equiv 0$. Analogicznie $f^{n_i}|_{U \cap \{|z| > 1\}} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \infty$ i $g \equiv \infty$. Sprzeczność. Stąd $J(f) = \{|z| = 1\}$. Dla $k \leq -2$ i $z \in \{|z| < 1\}$ ciąg $\{f^n(z)\}_{n=0}^\infty$ spełnia $|f^n(z)| = |z|^{(k^n)}$ i rozбивa się na dwa podciągi: $f^{2n}(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ & $f^{2n+1}(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$. Prowadząc podobne rozumowanie jak w poprzednim przypadku otrzymujemy tezę. \square

(b) Niech f będzie wielomianem. Wówczas $J(f)$ jest ograniczone (to znaczy istnieje stała C tak, że dla każdego $z \in J(f)$ $|z| < C$).

Dowód. Niech $f(z) = a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \dots + a_0$, $k \geq 2$, $a_k \neq 0$. Dobierzmy $C > 1$ tak duże aby dla $|z| > C$ $|(a_k + a_{k-1} z^{-1} + \dots + a_0 z^{-k}) - a_k| < \frac{1}{2}|a_k|$. Wówczas $|f(z)| > \frac{1}{2}|a_k||z|^k$. Powiększając ewentualnie C możemy zakładać, że $\frac{1}{2}|a_k||z| > 2$ i stąd mamy $|f(z)| > 2|z|$ czyli $|f^n(z)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$. Tak więc $f^n|_{\{|z| > C\}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ ($g \equiv \infty$ jest funkcją holomorficzną na sferze Riemanna) czyli $J(f) \subseteq \{|z| \leq C\}$. \blacksquare

Twierdzenie 1.3. *Zbiór Julii przekształcenia wymiernego f ma następujące własności:*

- (1) *Jest niezmienniczy w przód i w tył względem f , to znaczy $f^{-1}(J(f)) = f(J(f)) = J(f)$.*
- (2) *$J(f) = J(f^k)$ dla $k = 1, 2, 3, \dots$*
- (3) *$J(f)$ jest zwarty.*
- (4) *$\forall z \in J(f) \text{ cl} \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(\{z\}) \right) = J(f)$.*
- (5) *$J(f)$ jest zbiorem niepustym i doskonałym (tzn. domkniętym i w sobie gęstym).*
- (6) *$J(f) = \hat{\mathbb{C}}$ lub $J(f)$ jest zbiorem brzegowym.*

Dowód twierdzenia 1.3.

(1) Weźmy dowolne $z \in J(f)$. Wówczas dla dowolnego otoczenia $U \ni z$ rodzina $\{f^n|_U\}_{n=1}^{\infty}$ nie jest normalna, skąd także $\{f^n|_{f(U)}\}_{n=1}^{\infty}$ i $\{f^n|_{f^{-1}(U)}\}_{n=1}^{\infty}$ nie są normalne. Ponieważ f jest przekształceniem holomorficznym (a więc otwartym) to $f(U)$, $f^{-1}(U)$ są otoczeniami punktów $f(z)$ i $w \in f^{-1}(\{z\})$, czyli $f(z), w \in J(f)$. \square

(2) $J(f^k) \subseteq J(f)$.

Dowód. Niech $z \in J(f^k)$. Dla dowolnego otoczenia $U \ni z$ rodzina $\{(f^k)^m|_U\}_{m=1}^{\infty}$ nie jest normalna, zatem istnieje ciąg $\{(f^k)^{m_j}|_U\}_{j=1}^{\infty}$ bez podciągów zbieżnych. Tak więc $\{f^{k m_j}|_U\}_{j=1}^{\infty}$ jest podciągiem rodziny $\{f^n|_U\}_{n=1}^{\infty}$ bez podciągów zbieżnych, czyli nie jest ona normalna.

$J(f^k) \supseteq J(f)$.

Dowód. Niech $z \in J(f)$. Wówczas istnieje otoczenie $U \ni z$ oraz ciąg $\{f^{k_j}|_U\}_{j=1}^{\infty}$ bez podciągów zbieżnych. Weźmy ciągi s_j i r_j takie, że

$$k s_j = k_j + r_j \quad \text{oraz} \quad 0 \leq r_j < k.$$

Można wybrać podciąg s_{j_i} taki, że r_{j_i} jest stały ($r_{j_i} = r$). Wówczas ponieważ $\{f^{k s_{j_i} + r}|_U\}_{j=1}^{\infty}$ nie ma podciągów zbieżnych, więc także $\{(f^k)^{s_{j_i}}|_U\}_{i=1}^{\infty}$ nie ma podciągów zbieżnych. Z dowolności U mamy $z \in J(f^k)$. \square

(3) $J(f)$ jest zwarty w $\hat{\mathbb{C}}$ ponieważ jest domknięty — ponieważ z definicji zbiór punktów z takich, że rodzina jest normalna na pewnym otoczeniu punktu z jest otwarty. \square

(4) Udowodnimy rzecz silniejszą:

Stwierdzenie 1.4. *Z wyjątkiem co najwyżej dwóch punktów w uzupełnieniu zbioru Julii, nazwiemy je wyjątkowe, dla dowolnego $z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{\text{punkty wyjątkowe}\}$ zachodzi*

$$\text{cl} \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(\{z\}) \supseteq J(f).$$

Jeśli $z \in J(f)$ to

$$\text{cl} \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(\{z\}) = J(f).$$

W przypadku dokładnie dwóch punktów wyjątkowych w odpowiednim układzie współrzędnych na $\hat{\mathbb{C}}$

$$f(z) = z^k \quad |k| \geq 2,$$

i punktami wyjątkowymi są 0 i ∞ .

W przypadku dokładnie jednego punktu wyjątkowego w odpowiednim układzie współrzędnych f jest wielomianem różnym od z^k i punktem wyjątkowym jest ∞ .

Dowód stwierdzenia 1.4. Z twierdzenia Montela mamy:

$$\forall_{z \in J(f)} \quad \forall_{U \ni z} \quad \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(U) = \hat{\mathbb{C}} \setminus \text{co najwyżej dwa punkty.}$$

Rozpatrzmy przypadki.

$$(1) \quad \exists_{z \in J(f), U \ni z} \quad \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(U) = \hat{\mathbb{C}} \setminus W \quad \text{gdzie } W = \{w_1, w_2\}.$$

Wprowadźmy na $\hat{\mathbb{C}}$ układ współrzędnych taki, że $w_1 = 0$, $w_2 = \infty$. Ponieważ $f^{-1}(W) = W$, to f nie ma w $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\}$ zer i biegunów, i stąd musi być postaci $f(z) = \alpha z^k$ gdzie $|k| \geq 2$ (wynika to z postaci funkcji wymiernej $f = \frac{P}{Q}$, gdzie P i Q wielomiany). Biorąc zmianę współrzędnych $\xi = \xi(z) := \beta z$ (z odpowiednim β) uzyskujemy $f(\xi) = \xi^k$.

(2) Nie zachodzi (1) i

$$\exists_{z \in J(f), U \ni z} \quad \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(U) = \hat{\mathbb{C}} \setminus W \quad \text{gdzie } W = \{w\}.$$

Wprowadźmy układ współrzędnych taki, że $w = \infty$. Wówczas f w $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}$ nie ma biegunów, czyli f jest wielomianem.

$$(3) \quad \forall_{z \in J(f), U \ni z} \quad \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(U) = \hat{\mathbb{C}} \quad (W = \emptyset).$$

Ustalmy z i U . Mamy wówczas zbiór W ($\text{card } W = 0, 1$ lub 2). Zauważmy, że w przypadkach (1) i (2) $W \cap J(f) = \emptyset$ oraz dla każdego $x \in J(f)$ i dostatecznie małego otoczenia $V \ni x$ zachodzi

$$(*) \quad \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(V) \subseteq \hat{\mathbb{C}} \setminus W$$

(patrz przykład 1.2). Otrzymujemy wówczas

$$(**) \quad \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(V) = \hat{\mathbb{C}} \setminus W,$$

wynika to w przypadku (1) z twierdzenia Montela (ponieważ $x \in J(f)$), w przypadku (2) z twierdzenia Montela i z definicji, w przypadku (3) z definicji.

Zauważmy, że ostatnia uwaga pokazuje, że kwantyfikator \exists w definicji (1) i (2) można zastąpić kwantyfikatorem \forall . Zbiór W nazywamy zbiorem wyjątkowym. Dzięki (**) mamy

$$\forall_{x \in \hat{\mathbb{C}} \setminus W} \quad \text{cl} \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(\{x\}) \supseteq J(f).$$

Jeśli $\xi \in J(f)$ to z niezmienniczości $J(f)$ mamy

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(\{\xi\}) \subseteq J(f),$$

i z domkniętości

$$\text{cl} \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(\{\xi\}) \subseteq J(f). \blacksquare$$

W ten sposób zakończyliśmy dowód stwierdzenia 1.4 a zarazem punktu (4). \square

Kontynuujemy dowód twierdzenia 1.3.

(5) (a) $J(f)$ jest niepusty.

Gdyby tak nie było to istniałby ciąg n_k i przekształcenie g takie, że

$$f^{n_k} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} g \text{ na całym } \hat{\mathbb{C}} \text{ (ze zwartości } \hat{\mathbb{C}}).$$

Wówczas $g(\hat{\mathbb{C}}) = \hat{\mathbb{C}}$ więc

$$\deg(g) < \infty.$$

Jednocześnie

$$\deg(f^{n_k}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \deg(g) \quad (\text{z topologicznej definicji stopnia — patrz Appendix}),$$

$$\deg(f^{n_k}) = n_k \deg(f) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty$$

co daje sprzeczność.

(b) $J(f)$ jest zbiorem nieskończonym.

Gdyby tak nie było to z niezmienniczości $J(f)$ otrzymalibyśmy, że $f|_{J(f)}$ byłaby różnowartościowa i dla dostatecznie dużego k $f^k|_{J(f)}$ byłaby identycznością, więc $J(f^k) = J(f)$ składałby się, dla f^k , z punktów stałych co daje sprzeczność (patrz **(4)**).

(c) $J(f)$ jest w sobie gęsty.

$J(f)$ jest nieskończony i zwarty więc istnieje $z_0 \in J(f)$ punkt skupienia. Korzystając z niezmienniczości i otwartości przekształcenia holomorficznego otrzymujemy, że zbiorami punktów skupienia $J(f)$ są zbiory:

$$f^{-1}(\{z_0\}) \quad \text{stąd} \quad \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(\{z_0\})$$

i

$$\text{cl} \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(z_0) \right) = J(f)$$

co kończy dowód **(5)**. \square

(6) Załóżmy, że $J(f) \neq \hat{\mathbb{C}}$ i istnieje $z \in \text{int} J(f)$. Weźmy otoczenie U punktu z takie, że $U \subseteq J(f)$. Wówczas $f^n|_U$ omija $\hat{\mathbb{C}} \setminus J(f)$ a jest to zbiór niepusty i otwarty (a więc $\text{card}(\hat{\mathbb{C}} \setminus J(f)) \geq 3$) i stąd na mocy twierdzenia Montela rodzina $\{f^n|_U\}_{n=1}^{\infty}$ jest normalna. Otrzymana sprzeczność kończy dowód **(6)** i zarazem stwierdzenia 1.2. \blacksquare

Definicja 1.5. Punkt z nazywamy punktem okresowym przekształcenia f jeśli dla pewnego $k \geq 1$

$$f^k(z) = z.$$

Najmniejsze takie k nazywamy okresem punktu z . Jeśli $k = 1$ to punkt z nazywamy punktem stałym. Zbiór $\text{Orb}(z) := \{z, f(z), \dots, f^{k-1}(z)\}$ nazywamy orbitą okresową.

Zbiór punktów okresowych przekształcenia f oznaczamy będziemy $\text{Per}(f)$.

Definicja 1.6. Punkt z nazywamy punktem krytycznym przekształcenia f jeśli $f'(z) = 0$. Punkt $f(z)$ nazywamy wartością krytyczną. Jeśli $z = \infty$ lub $f(z) = \infty$ to zamieniamy lokalnie współrzędne na $\hat{\mathbb{C}}$ tak żeby $z, f(z) \neq \infty$. Wtedy f' rozumiemy w zwykłym sensie jako pochodną funkcji holomorficzej na $\hat{\mathbb{C}}$.

Uwaga 1.7. Załóżmy, że $f(\xi) = \eta$, oraz ξ nie jest punktem krytycznym. Wówczas dla dostatecznie małego otoczenia $U \ni \eta$ istnieje gałąź $f_\nu^{-1}|_U$ taka, że $f_\nu^{-1}(\eta) = \xi$.

Twierdzenie 1.8. Punkty okresowe są gęste w zbiorze Julii:

$$\text{cl}(\text{Per}(f)) \supseteq J(f).$$

Dowód twierdzenia 1.8. Rozpatrzmy $x \in J(f)$. Zakładamy, że istnieją przeciwobrazy $w_1 \in f^{-1}(\{x\})$ i $w_2 \in f^{-2}(\{x\})$ nie będące punktami krytycznymi i takie, że w_1, w_2, x są parami różne. Ponadto można zakładać, że $w_1, w_2, x \neq \infty$. Jeśli tak nie jest to z doskonałości $J(f)$ możemy przybliżać punkt x punktami o powyższej własności (bo jest skończenie wiele punktów krytycznych — patrz Appendix). Wówczas gałęzie f^{-1} i f^{-2} prowadzące odpowiednio x w w_1 i w_2 określone są na pewnym otoczeniu U punktu x . Dla $n = 1, 2, 3, \dots$ i $w \in J(f)$ rozpatrzmy równania:

$$\begin{aligned} f^n(w) - w &= 0 \\ f^n(w) - f^{-1}(w) &= 0 \\ f^n(w) - f^{-2}(w) &= 0. \end{aligned}$$

Jeśli dla pewnego n któreś z równań ma rozwiązanie to $w \in \text{Per}(f)$, i z dowolności U otrzymujemy $x \in \text{cl}(\text{Per}(f))$ co kończy dowód twierdzenia.

Założmy, że dla żadnego n nie ma rozwiązań na pewnym otoczeniu U . Zdefiniujmy rodzinę funkcji holomorficzych G_n określonych na U o wartościach w $\hat{\mathbb{C}}$ wzorem:

$$(*) \quad G_n(w) := \frac{f^n(w) - w}{f^n(w) - f^{-1}(w)} \cdot \frac{f^{-2}(w) - f^{-1}(w)}{f^{-2}(w) - w}$$

Można zakładać, że U jest tak małe, że $U, f^{-1}(U), f^{-2}(U) \subseteq \mathbb{C}$. Ponieważ nasze równania nie mają rozwiązań to dla każdego n i $w \in U$ zachodzi:

$G_n(w) \neq 0$ ponieważ jeżeli $f^n(w) = \infty$ to

$$G_n(w) = \frac{f^{-2}(w) - f^{-1}(w)}{f^{-2}(w) - w} \neq 0,$$

a dla wartości skończonych $f^n(w)$ licznik (patrz $(*)$) jest różny od 0,
 $G_n(w) \neq \infty$ analogicznie jak poprzednio,
 $G_n(w) \neq 1$ ponieważ gdyby istniało w spełniające $G_n(w) = 1$ to

$$(f^n(w) - w) \cdot (f^{-2}(w) - f^{-1}(w)) = (f^n(w) - f^{-1}(w)) \cdot (f^{-2}(w) - w),$$

czyli

$$f^n(w)(-f^{-1}(w)) - w(f^{-2}(w) - f^{-1}(w)) = f^n(w)(-w) - f^{-1}(w)(f^{-2}(w) - w).$$

Jeżeli $f^n(w) = \infty$ to $f^{-1}(w) = w$ i otrzymaliśmy sprzeczność. Jeżeli $f^n(w) \neq \infty$ to otrzymujemy

$$f^n(w)(w - f^{-1}(w)) = f^{-2}(w)(w - f^{-1}(w))$$

skąd

$$f^n(w) = f^{-2}(w)$$

co ponownie daje nam sprzeczność.

Tak więc rodzina $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ omija trzy punkty czyli jest normalna. Ponieważ rodzina $\{f^n|_U\}_{n=1}^{\infty}$ nie jest normalna, to istnieje ciąg $\{f^{n_k}|_U\}_{k=1}^{\infty}$ nie mający podciągów zbieżnych. Można jednak wybrać podciąg $\{G_{n_{k_j}}\}_{j=1}^{\infty}$ zbieżny niemal jednostajnie na U o wartościach w $\hat{\mathbb{C}}$.

$G_{n_{k_j}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} g$ czyli

$$\frac{f^{n_{k_j}} - \text{id}}{f^{n_{k_j}} - f^{-1}} \cdot \frac{f^{-2} - f^{-1}}{f^{-2} - \text{id}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} g$$

skąd

$$\frac{f^{n_{k_j}} - \text{id}}{f^{n_{k_j}} - f^{-1}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} g_1 := \frac{f^2 - \text{id}}{f^{-2} - f^{-1}} g,$$

$$1 + \frac{f^{-1} - \text{id}}{f^{n_{k_j}} - f^{-1}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} g_1,$$

$$f^{n_{k_j}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} g_2 := \frac{f^{-1} - \text{id}}{g_1 - 1} + f^{-1}$$

co daje nam sprzeczność. Tak więc dowód twierdzenia został zakończony. ■

Definicja 1.9. Niech z będzie punktem okresowym o okresie k przekształcenia f . Wówczas z nazywamy:

- (a) Ściekiem jeśli $|(f^k)'(z)| < 1$.
Jeżeli ponadto $|(f^k)'(z)| = 0$ to z nazywamy superściekiem.
- (b) Punktem neutralnym jeśli $|(f^k)'(z)| = 1$.
Jeżeli ponadto $(f^k)'(z) = e^{2\pi i\Theta}$ i $\Theta \in \mathbb{Q}$ to z nazywamy punktem neutralnym wymiernym. Jeżeli $\Theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ to z nazywamy punktem neutralnym niewymiernym.
- (c) Źródłem jeśli $|(f^k)'(z)| > 1$.

(Tak jak w definicji punktu krytycznego pochodną rozumiemy w zwykłym sensie. Jeśli więc $\infty \in \text{Orb}(z)$ to zmieniamy współrzędne tak, żeby $\infty \notin \text{Orb}(z)$. $(f^k)'$ od wyboru współrzędnych nie zależy.)

Stwierdzenie 1.10. *Ścieków i punktów neutralnych jest skończenie wiele.*

Dowód tego stwierdzenia przedstawimy później.

Stwierdzenie 1.11. *Źródła należą do zbioru Julii $J(f)$.*

Dowód. Niech z będzie źródłem o okresie k , to znaczy

$$f^k(z) = z \ \& \ |(f^k)'(z)| > 1.$$

Gdyby $z \notin J(f)$ to także $z \notin J(f^k)$ (twierdzenie 1.3 punkt (2)) i wówczas istniałoby otoczenie $U \ni z$ takie, że rodzina $\{(f^k)^n|_U\}_{n=1}^\infty$ byłaby normalna, czyli istniałby ciąg n_j i przekształcenie g takie, że

$$(f^k)^{n_j}|_U \xrightarrow{j \rightarrow \infty} g.$$

Jednocześnie jednak zachodzi

$$((f^k)^{n_j})'(z) = ((f^k)'(z))^{n_j} \rightarrow \infty.$$

Otrzymana sprzeczność kończy dowód stwierdzenia. ■

Stwierdzenie 1.12. *Ścieki nie należą do zbioru Julii.*

Dowód. Niech z będzie ściekiem o okresie k , to znaczy

$$f^k(z) = z \ \& \ |(f^k)'(z)| < 1.$$

Wówczas dla dostatecznie małego ε $f^k(B(z, \varepsilon)) \subseteq B(z, \varepsilon)$ (gdzie $B(z, \varepsilon) = \{w : |z - w| < \varepsilon\}$). Wynika to z definicji pochodnej: $|f^k(w) - f^k(z)| = |(f^k)'(z)||w - z| + o(|w - z|)$. Stąd $(f^k)^n(B(z, \varepsilon)) \subseteq B(z, \varepsilon)$ dla $n = 1, 2, \dots$ a więc rodzina $\{(f^k)^n|_{B(z, \varepsilon)}\}_{n=1}^\infty$ jest normalna (bo jest ograniczona — patrz twierdzenie Montela, Appendix), stąd $z \notin J(f^k) = J(f)$. ■

Stwierdzenie 1.13. *Jak wyżej korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy: dla w dostatecznie bliskiego z (ścieku o okresie k) ciąg $\{(f^k)^n\}_{n=1}^\infty$ zbiega do z eksponencjalnie (to znaczy istnieje $0 < \mu < 1$ takie, że $|(f^k)^n(w) - z| \leq \mu^n$).*

Definicja 1.14. Niech z będzie ściekiem o okresie k . Basenem przyciągania punktu z nazywamy zbiór

$$A_z := \{w : |f^n(w) - f^n(z)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0\}.$$

Basenem bezpośredniego przyciągania z nazywamy składową spójności \tilde{A}_z zawierającą punkt z .

Basenem przyciągania (bezpośredniego przyciągania) orbity okresowej ścieku z nazywamy zbiór

$$A_{\text{Orb } z} := \bigcup_{j=0}^{k-1} A_{f^j(z)} \quad (\tilde{A}_{\text{Orb}(z)} := \bigcup_{j=0}^{k-1} \tilde{A}_{f^j(z)}).$$

Rysunek

Stwierdzenie 1.15. Punkty neutralne wymierne należą do zbioru Julii.

Dowód. Niech z będzie punktem neutralnym wymiernym o okresie k . Zmieniając układ współrzędnych możemy zakładać, że $z = 0$ i $\infty \notin \text{Orb}(z)$. Ponieważ z jest punktem neutralnym wymiernym to istnieje $s \geq 1$ takie, że $(f^{ks})'(0) = ((f^k)'(0))^s = 1$. Wówczas dla w dostatecznie bliskich 0 mamy

$$f^{ks}(w) = w + \alpha w^j + o(|w^j|)$$

dla pewnego $\alpha \neq 0$ i $j \geq 2$. Wówczas

$$\begin{aligned} (f^{ks})^2(w) &= w + \alpha w^j + \alpha(w + \alpha w^j)^j + o(|w^j|) \\ &= w + 2\alpha w^j + o(|w^j|) \end{aligned}$$

i analogicznie

$$(f^{ks})^n(w) = w + n\alpha w^j + o(|w^j|).$$

Stąd wynika, że j -ta pochodna $((f^{ks})^n)^{[j]} = n \cdot \alpha \cdot j! + o(|w|) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, więc rodzina $\{(f^{ks})^n\}_{n=1}^{\infty}$ nie jest normalna w otoczeniu punktu $z = 0$. Stąd $z \notin J(f^{ks}) = J(f)$. ■

Zauważmy, że jeśli z jest neutralnym niewymiernym o okresie k to (jak poprzednio przyjmując $z = 0$) mamy dla w dostatecznie małych

$$f^k(w) = \xi w + \alpha w^j + o(|w^j|)$$

dla pewnego $\alpha \neq 0$, $j \geq 2$ oraz $\xi = \exp(2\pi i\Theta)$ gdzie $\Theta \in [0, 1) \setminus \mathbb{Q}$. Wówczas

$$\begin{aligned} (f^k)^2(w) &= \xi(\xi w + \alpha w^j) + \alpha(\xi w + \alpha w^j)^j + o(|w^j|) \\ &= \xi^2 w + (\alpha\xi + \alpha\xi^j)w^j + o(|w^j|) \\ (f^k)^3(w) &= \xi^3 w + (\alpha\xi^2 + \alpha\xi^{j+1} + \alpha\xi^{2j})w^j + o(|w^j|) \end{aligned}$$

i analogicznie dla wyższych iteracji (f^k) . Tak więc argumentacji zastosowanej w dowodzie stwierdzenia 1.15 nie można stosować dla punktów neutralnych niewymiernych. W istocie:

Uwaga 1.16. Punkty neutralne niewymierne mogą zarówno należeć do zbioru Julii, jak i do jego uzupełnienia. Wynikać to będzie z przykładów podanych w następnych rozdziałach.

Wiemy już, że

$$J(f) \subseteq \text{cl}(\text{Per}(f)).$$

Jednocześnie

$$\text{Per}(f) = \text{ścieki} \cup \text{punkty neutralne} \cup \text{źródła}.$$

Udowodnimy później, że ścieków i punktów neutralnych jest skończenie wiele. Temu problemowi poświęcone będą częściowo rozdziały IV i V. Na razie wyciągniemy z tego dwa wnioski.

Wniosek 1.17. Ponieważ $J(f)$ jest w sobie gęsty (a więc nie ma punktów izolowanych) stąd

$$J(f) = \text{cl}(\text{okresowe źródła}).$$

Wniosek 1.18. Dla dowolnego punktu $z \in J(f)$, dowolnego otoczenia $U \ni z$ oraz dowolnego podciągu n_k ciąg $\{f^{n_k}|_U\}_{k=1}^\infty$ jest rozbieżny.

Dowód. Załóżmy, że istnieje ciąg zbieżny $\{f^{n_j}|_U\}_{j=1}^\infty$. Z Wniosku 1.17 wynika, że istnieje źródło x (o okresie k) leżące w U . Zdefiniujmy podciągi s_j i r_j jako ciągi spełniające

$$n_j = ks_j + r_j \ \& \ 0 \leq r_j < k.$$

Wówczas można wybrać podciąg j_i taki, że r_{j_i} jest stały ($r_{j_i} = r$). Wtedy ciąg $f^{n_{j_i}}|_U = f^{ks_{j_i}+r}|_U$ jest zbieżny. Jednocześnie jednak ponieważ $|(f^k)'(f^r(x))| = |(f^k)'(x)| > 1$ to

$$|(f^{ks_{j_i}+r})'(x)| = |(f^k)'(f^r(x))|^{s_{j_i}} \cdot |(f^r)'(x)| \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \infty.$$

Otrzymana sprzeczność kończy dowód wniosku. ■

2. Sprzężenie w okolicy ścieku i basen A_∞ dla wielomianów.

Zacniemy od sformułowania pewnego ważnego lematu.

Lemat 2.1. Niech $U \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ będzie zbiorem otwartym, a

$$f : U \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$$

będzie funkcją holomorficzną. Niech będzie dany punkt $x \in U$ spełniający następujące warunki:

$$\begin{aligned} f(x) &= x \\ |f'(x)| &< 1. \end{aligned}$$

Wówczas zachodzi:

- $\exists V \subseteq U$ taki, że $x \in V$, V otwarty & $f(V) \subseteq V$,
- $\exists h: V \rightarrow V'$ biholomorficzna, $h(x) = 0$,
- $\exists H: V' \rightarrow \mathbb{C}$ holomorficzna taka, że

$$\begin{array}{ccc} hfh^{-1} & = & H, \\ V & \xrightarrow{f} & V \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ V & \xrightarrow{H} & \mathbb{C} \end{array}$$

oraz

- (a) jeśli $0 < |f'(x)|$ to $H(z) = f'(x) \cdot z$ (przypadek ścieku),
- (b) jeśli $0 = |f'(x)|$ to $H(z) = z^k$ dla pewnego k (przypadek superścieku).

Dowód. Można zakładać, że $x = 0$.

(a) Połóżmy

$$H(z) := f'(0) \cdot z.$$

Skonstruujemy równanie na szukaną funkcję h :

$$\begin{aligned} hfh^{-1} &= H \\ (hfh^{-1})^n &= hf^n h^{-1} = H^n \\ H^{-n}hf^n &= h. \end{aligned}$$

(1) O ile $H^{-n}f^n$ jest zbieżne jednostajnie na pewnym otoczeniu V do funkcji odwrotnej to można za h przyjąć granicę

$$H^{-n}f^n \underset{n \rightarrow \infty}{\rightrightarrows} h.$$

Istotnie spełnione będzie równanie $H^{-1}hf = h$ gdyż

$$H^{-1}(H^{-n}f^n)f = H^{-(n+1)}f^{n+1}$$

oraz

$$\begin{aligned} H^{-n}f^n &\underset{n \rightarrow \infty}{\rightrightarrows} h \\ H^{-(n+1)}f^{n+1} &\underset{n \rightarrow \infty}{\rightrightarrows} h. \end{aligned}$$

(2) O ile $H^{-n}f^n$ jest zbieżne jednostajnie to granica jest funkcją odwracalną, ponieważ pochodna w punkcie $x = 0$ wynosi

$$(H^{-n}f^n)'(0) = (f'(0))^{-n} \cdot (f'(0))^n = 1.$$

(3) Ciąg $H^{-n}f^n$ jest zbieżny ponieważ jest zbieżny w jednym punkcie

$$H^{-n}f^n(0) = 0,$$

oraz ciąg pochodnych jest zbieżny jednostajnie na dostatecznie małym V . Mianowicie

$$(H^{-n}f^n)'(z) = (f'(0))^{-n}(f^n)'(z) = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{f'(z_i)}{f'(0)}$$

gdzie $z_i := f^i(z)$.

Logarytmując badany ciąg mamy wówczas

$$\log \left| \prod_{i=0}^{n-1} \frac{f'(z_i)}{f'(0)} \right| = \sum_{i=0}^{n-1} \log \left| \frac{f'(z_i)}{f'(0)} \right|.$$

Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać $V := \{|z| < c_1\}$, takie, że

$$\forall_{z \in V} \quad \left| \frac{f(x)}{z} \right| \leq |f'(0)| + \varepsilon < 1,$$

skąd otrzymujemy

$$\forall z \in V \quad |z_i| \leq c_1 |f'(0) + \varepsilon|^i < c_1, \quad f(V) \subseteq V.$$

Ponadto korzystając z drugiej pochodnej otrzymujemy

$$f'(z) = f'(0) + f''(0)z + o(|z|)$$

czyli

$$\exists_{c_2} \quad \forall z \in V \quad \left| \frac{f'(z)}{f'(0)} \right| \leq 1 + \frac{c_2}{|f'(0)|} |z|.$$

Stosując to do naszego szeregu mamy

$$\sum_{i=0}^{n-1} \log \left| \frac{f'(z_i)}{f'(0)} \right| \leq \frac{c_2}{|f'(0)|} \sum_{i=0}^{n-1} |z_i| \leq \frac{c_1 c_2}{|f'(0)|} \sum_{i=0}^{n-1} |f'(0) + \varepsilon|^i \leq \infty.$$

Tak więc badany iloczyn jest zbieżny co kończy dowód przypadku (a). \square

(b) Ponieważ $f(0) = 0$ oraz $f'(0) = 0$ to istnieje liczba naturalna k i funkcja holomorphyzna g taka, że

$$f(z) = z^k g(z) \ \& \ g(0) \neq 0.$$

Położmy

$$H(z) := z^k.$$

Zdefiniujmy funkcje

$$\begin{aligned} h_n &:= \sqrt[k^n]{f \circ \dots \circ f} \\ &:= \sqrt[k^n]{z^{k^n} \cdot g(z_{n-1}) \cdot g(z_{n-2}) \cdot \dots \cdot g(z_0)^{k^{n-1}}} \end{aligned}$$

(gdzie jak poprzednio $z_i = f^i(z)$) jako

$$:= z \cdot \sqrt[k^n]{g(z_{n-1})} \cdot \sqrt[k^{n-1}]{g(z_{n-2})} \cdot \dots \cdot \sqrt[k]{g(z_0)}.$$

Gałęzie pierwiastków bierzemy dowolnie, tak żeby

$$\sqrt[k^n]{g(0)} = \sqrt[k]{\sqrt[k^{n-1}]{g(0)}} \quad (\text{dla dowolnie wybranej gałęzi } \sqrt[k^n]{}),$$

oraz $\sqrt[k^n]{} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ (niemal jednostajnie na pewnym otoczeniu $g(0)$). To jest możliwe bo $g(0) \neq 0$.

O ile ciąg h_n jest zbieżny niemal jednostajnie to można za h wziąć tę granicę. Istotnie mamy wówczas

$$h_n \circ f = H \circ h_{n+1}$$

(z definicji h_n, h_{n+1} — ważna jest zgodność gałęzi pierwiastka) i stąd

$$h \circ f = H \circ h.$$

Dla zbieżności $h_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h$ wystarczy udowodnić niemal jednostajną zbieżność w otoczeniu 0, do funkcji różnej od zera, iloczynu nieskończonego

$$\prod_{n=0}^{\infty} {}^{k^{n+1}}\sqrt{g(z_n)},$$

czyli zbieżność szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 - {}^{k^{n+1}}\sqrt{g(z_n)}).$$

Szereg ten jest zbieżny, nawet eksponencjalnie, ponieważ $g(z_n)$ pozostaje w małym otoczeniu $g(0)$ oraz ${}^{k^n}\sqrt{} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ i 1 jest źródłem dla przekształcenia $z \mapsto z^k$ i podobnie jak we wniosku 1.13 przyciąganie jest dla ${}^{k^n}\sqrt{}$ eksponencjalne. Wówczas

$$h(z) = z \cdot \prod_{n=0}^{\infty} {}^{k^{n+1}}\sqrt{g(z_n)}$$

gdzie $\prod_{n=0}^{\infty} {}^{k^{n+1}}\sqrt{g(z_n)}$ jest różny od 0. Stąd h jest odwracalne na dostatecznie małym otoczeniu $V \ni 0$. Na mocy wniosku 1.13 $f(V) \subseteq V$. ■

Rozpatrywać będziemy teraz wielomiany stopnia $d \geq 2$. Traktować je będziemy jako przekształcenia sfery Riemanna $\hat{\mathbb{C}}$ w siebie.

Definicja 2.2. Niech będzie dany wielomian $f(z)$. Basenem przyciągania nieskończoności nazywamy zbiór

$$A_{\infty} := \{z \in \hat{\mathbb{C}} : f^n(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty\}.$$

Stwierdzenie 2.3. Niech f będzie wielomianem. Wówczas:

- (a) Punkt $\infty \in \hat{\mathbb{C}}$ jest superścikiem tzn. $f(\infty) = \infty$ & $f'(\infty) = 0$ (w układzie współrzędnych h takim, że $h(\infty) \in \mathbb{C}$).
- (b) A_{∞} jest spójny i otwarty. Zatem basen przyciągania A_{∞} i basen bezpośredniego przyciągania \tilde{A}_{∞} są równe.

Ponieważ ∞ jest ściekiem to definicja 2.2 jest zgodna z definicją 1.14.

Dowód.

- (a) Wprowadźmy zamianę współrzędnych

$$w := \frac{1}{z}.$$

Wówczas $\infty \mapsto 0$, oraz wielomian

$$f(z) = a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \dots + a_0, \quad a_k \neq 0, \quad k \geq 2$$

przyjmuje postać

$$f(w) = \frac{w^k}{a_k + a_{k-1}w + \dots + a_0 w^k}$$

oraz $f(0) = 0$ & $f'(0) = 0$. \square

(b) Dzięki lematowi 2.1 wiemy, że istnieje zbiór otwarty $U \subseteq A_\infty$ taki, że $\infty \in U$ oraz (z definicji A_∞)

$$(*) \quad A_\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(V),$$

Spójność A_∞ , którą chcemy wykazać oznacza, że dla \tilde{A}_∞ (składowej spójności A_∞ zawierającej ∞ , inaczej basen bezpośredniego przyciągania ∞) mamy $\tilde{A}_\infty = A_\infty$. Wystarczy na mocy (*) pokazać, że $f^{-1}(\tilde{A}_\infty) = \tilde{A}_\infty$ czyli, że dla dowolnej składowej spójności V zbioru $f^{-1}(\tilde{A}_\infty)$ mamy $V = \tilde{A}_\infty$. Wystarczy pokazać, że f przekształca V na \tilde{A}_∞ bo wtedy w V musi być przeciwobraz ∞ a jedynym przeciwobrazem ∞ w \hat{C} jest ∞ .

Gdyby $\tilde{A}_\infty \setminus f(V) \neq \emptyset$ to istniałby punkt $x \in \tilde{A}_\infty \cap \partial f(V)$. Niech $y_j \in V$ takie, że $f(y_j) \rightarrow x$. Niech y będzie granicą jakiegoś zbieżnego podciągu y_{j_s} . Wówczas $y \notin V$, w przeciwnym wypadku z otwartości odwzorowania f byłoby $f(y) = x \in \text{int } f(V)$. Stąd $y \in \partial V$ i istnieje otoczenie $W \ni y$ takie, że $f(W) \subseteq \tilde{A}_\infty$, zatem V nie było całą składową spójności $f^{-1}(\tilde{A}_\infty)$. Sprzeczność. \blacksquare

Stwierdzenie 2.4. Niech f będzie wielomianem. Wówczas

$$J(f) = \partial A_\infty.$$

Dowód.

$$(1) J(f) \subseteq \partial A_\infty .$$

Dowód. Weźmy $z \in A_\infty$. Wówczas $z \notin J(f)$ ponieważ istnieje zbiór otwarty V taki, że $z \in V \subseteq A_\infty$ i rodzina $f^n|_V$ jest normalna gdyż

$$f|_V \rightrightarrows \infty.$$

Weźmy $z \in \hat{C} \setminus \text{cl } A_\infty$. Wówczas $z \notin J(f)$ ponieważ istnieje zbiór otwarty V taki, że $z \in V \subseteq \hat{C} \setminus \text{cl } A_\infty$ i rodzina $f^n|_V$ jest normalna gdyż omija A_∞ . \square

$$(2) \partial A_\infty \subseteq J(f) .$$

Dowód. Weźmy $z \in \partial A_\infty$. Wówczas $z \in J(f)$ ponieważ dla dowolnego otoczenia otwartego V punktu z zachodzi:

$$V \cap A_\infty \neq \emptyset \text{ \& } f^n|_{V \cap A_\infty} \rightrightarrows \infty,$$

$$V \cap \partial A_\infty \neq \emptyset \text{ \& } f^n|_{V \cap \partial A_\infty} \text{ omija } A_\infty,$$

a więc rodzina $f^n|_V$ nie może być normalna bo w granicy nie ma funkcji ciągłych. \blacksquare

Powyższy dowód pokazuje, że dla A basenu przyciągania (lub bezpośredniego przyciągania) dowolnego ścieku, $\partial A \subseteq J(f)$.

Definicja 2.5. Dla wielomianu f wypełnionym zbiorem Julii nazywamy zbiór

$$K_f := \hat{\mathbb{C}} \setminus A_\infty.$$

3. Rodzina stopnia 2.

Stwierdzenie 3.1. *Każdy wielomian stopnia dwa jest liniowo sprzężony z wielomianem postaci*

$$z \mapsto z^2 + c$$

dla pewnego parametru $c \in \hat{\mathbb{C}}$.

Dowód. Niech będzie dany wielomian f stopnia 2. Przeprowadzimy następującą konstrukcję:

(1) Przesuniemy punkt krytyczny do 0.

Jeżeli z_0 jest punktem krytycznym dla f to weźmy przekształcenie liniowe

$$h(z) := z - z_0$$

i niech

$$f_1 := h f h^{-1}.$$

Wówczas $f_1(z) = \alpha z^2 + \beta$ (dla pewnych $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$).

(2) Weźmy przekształcenie liniowe

$$g(z) := \alpha z$$

i niech

$$f_2 := g f_1 g^{-1}.$$

Wówczas $f_2(z) = z^2 + \alpha\beta$. ■

Stwierdzenie 3.2. *Dwa wielomiany postaci*

$$f_1(z) = z^2 + c_1, \quad f_2(z) = z^2 + c_2$$

są holomorficznie sprzężone na $\hat{\mathbb{C}}$ wtedy, i tylko wtedy gdy $c_1 = c_2$.

Dowód. Załóżmy, że są holomorficznie sprzężone. Wówczas istnieje przekształcenie holomorficzne h

$$h : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$$

takie, że

$$f_1 = h f_2 h^{-1}.$$

Jest ono odwracalne, więc musi być homografią. Ponadto ∞ jest super ściekiem a 0 punktem krytycznym dla f_1 i f_2 i h przeprowadza punkty krytyczne na punkty krytyczne, ścieki

na ścieki (wystarczy policzyć pochodną). Jeżeli 0 jest super ściekiem dla f_1 to $f_1(z) = z^2$. Wtedy także f_2 musi mieć dwa super ścieki, więc

$$f_1(z) = f_2(z) = z^2.$$

W przeciwnym wypadku h musi zachowywać punkt krytyczny, czyli

$$h(\infty) = \infty \ \& \ h(0) = 0,$$

skąd mamy

$$h(z) = \alpha z \quad \text{dla pewnego } \alpha \in \mathbb{C}.$$

Wówczas

$$z^2 + c_1 = f_1(z) = hf_2h^{-1}(z) = \frac{1}{\alpha}z^2 + \alpha c_2$$

skąd mamy $\alpha = 1$, co kończy dowód. ■

Udowodniliśmy więc, że badanie dynamiki wielomianów stopnia 2 można ograniczyć do badania rodziny $\{f_c\}_{c \in \mathbb{C}}$ gdzie

$$f_c(z) := z^2 + c.$$

Definicja 3.3. Zbiorem Mandelbrota nazywamy zbiór

$$M := \{c \in \mathbb{C} : f_c^n(c) \not\rightarrow_{n \rightarrow \infty} \infty\}.$$

Uwaga 3.4. Basen przyciągania nieskończoności jest otwartym otoczeniem ∞ więc dla dowolnego $c \in \mathbb{C}$ mamy

$$f_c^n(c) \not\rightarrow_{n \rightarrow \infty} \infty \quad \iff \quad \{f_c^n(c)\}_{n=0}^{\infty} \text{ jest ciągiem ograniczonym.}$$

Czasem pisze się, że $f_c^n(0) \not\rightarrow_{n \rightarrow \infty} \infty$, co na jedno wychodzi bo $f_c(0) = c$. Przypominamy, że dla f_c 0 jest punktem krytycznym a c jest wartością krytyczną.

Twierdzenie 3.5. Dla rodziny $\{f_c\}_{c \in \mathbb{C}}$ (gdzie $f_c(z) = z^2 + c$) równoważne są następujące warunki:

- (a) $c \in M$.
- (b) $J(f_c)$ jest spójny.
- (c) Wypełniony zbiór Julii K_{f_c} jest spójny.
- (d) A_{∞} jest jednospójny.

Dowód. Równoważność (b),(c),(d) jest nietrywialnym faktem topologicznym — przypominamy, że $J(f_c) = \partial A_{\infty}$, $K_{f_c} = \hat{\mathbb{C}} \setminus A_{\infty}$ (dowód pozostawiamy czytelnikowi — warto wykorzystać twierdzenie Jordana dla gładkich krzywych Jordana).

Dowodzimy (a) \Rightarrow (d).

Jeśli $c \in M$ to $c \notin A_\infty$ (z definicji). Na podstawie lematu 2.1 istnieją V otoczenie ∞ , $a > 1$ i przekształcenie biholomorficzne $h : \{|z| > a\} \rightarrow V$ takie, że $h(z^2) = f(h(z))$ (i h rozszerza się holomorficznie na otoczenie zbioru $\{|z| \geq a\}$). Oznaczmy $P = \text{cl}(V \setminus f(V))$. To jest topologicznie domknięty pierścień bo $V \setminus f(V) = h(\{a < |z| \leq a^2\})$ (Rys.3.1).

Założmy, że wiemy już, że $V_j = \text{cl}(f^{-j}(V))$ jest homeomorficzny z dyskiem, dla $j = 1, 2, \dots, n$, $f(V_j) = V_{j-1}$ i $P_j = \text{cl}(V_j \setminus V_{j-1})$ jest homeomorficzne z domkniętym pierścieniem (Rys.3.2). Ponieważ f nie ma punktów krytycznych w A_∞ , zbiór $f^{-1}(P_n)$ jest (topologicznie) pierścieniem, oznaczmy go P_{n+1} , lub sumą dwóch rozłącznych pierścieni. Ten drugi przypadek jest jednak nie możliwy bo składowe brzegu tych pierścieni przechodzące przy f na ∂V_{n-1} byłyby zawarte w ∂V_n (a są to topologiczne okręgi). Oznaczmy przez ∂_1 składową ∂P_{n+1} , która przechodzi na ∂V_{n-1} . Oznaczmy drugą składową ∂_2 (Rys.3.3).

Rysunki 3.1, 3.2, 3.3

Mamy $\text{int}(P_{n+1}) \cap V_n = \emptyset$ bo $f(\text{int}(P_{n+1})) = \text{int}(P_n)$, $f(V_n) = V_{n-1}$ i $\text{int}(P_n) \cap V_{n-1} = \emptyset$. Oczywiście $\partial_2 \cap V_n = \emptyset$ bo ∂_2 jest rozłączne z ∂_1 .

Zatem $f^{-(n+1)}(\text{cl } V)$ to dysk z dolepionym pierścieniem czyli topologiczny dysk i dla $n + 1$ spełnione jest założenie indukcyjne.

Stąd wynika, że $A_\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(V)$ jest otwartym topologicznym dyskiem. \square

Można podać inny dowód implikacji (a) \Rightarrow (d), bliższy rozważaniom lematu 2.1:

Definiujemy funkcje $G : A_\infty \setminus \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem

$$G(z) := \frac{1}{2^n} \log |h^{-1}(f^n(z))|,$$

dla n takiego, że $f^n(z) \in V$. Z równości $h(z^2) = f(h(z))$ widać, że ta definicja nie zależy od wyboru n .

G nie ma punktów krytycznych z definicji, bo f nie ma w $A \setminus \{\infty\}$ punktów krytycznych. Pole wektorowe $\text{grad}(G)$ jest transwersalne do ∂V . Zatem parametr na ∂V (topologicznym okręgu) i czas t dla potoku ϕ_t pola $\text{grad}(G)$ parametryzują $A_\infty \setminus \{\infty\}$ jako pierścień. Ale dla $t \rightarrow \infty$ mamy $G \rightarrow \infty$ czyli $\phi_t(z) \rightarrow \infty$. Zatem A_∞ jest dyskiem topologicznym.

Uwaga 3.6. G (lub $-G$) nazywa się funkcją Greena na A_∞ , spełnia ona standardowe założenia o funkcji Greena.

Dowodzimy (d) \Rightarrow (a).

Jeśli $c \notin M$ czyli $c \in A_\infty$ to konstruujemy V_n jak poprzednio dla $n = 0, 1, \dots, N$, gdzie N takie, że $V_N \ni c$, $c \notin V_n$ dla $n < N$ (V_k są domknięte). Można wybrać stałą a tak, żeby $h(\{|z| = a\}) \cap \bigcup_{j=0}^{\infty} f^j(c) \neq \emptyset$. Wtedy $c \in \partial V_N$ i $f^{-1}(\partial V_N)$ jest topologiczną

ósemką (Rys.3.4). Każda z obu składowych W_1, W_2 zbioru $\hat{\mathbb{C}} \setminus f^{-1}(V_N)$ jest biholomorficznie przekształcana przez f na $\hat{\mathbb{C}} \setminus V_N \supseteq \hat{\mathbb{C}} \setminus f^{-1}(V_N)$. Zatem w W_1 (podobnie W_2) jest punkt stały czyli punkt należący do $\hat{\mathbb{C}} \setminus A_\infty = K_{f_c}$ (z definicji basenu A_∞). $\hat{\mathbb{C}} \setminus A_\infty$ nie jest więc spójne. \blacksquare

Przyjrzyjmy się skonstruowanym w dowodzie zbiorom W_1, W_2 (Rys. 3.4). Trójka $W_1, W_2, \partial V_{N+1}$ stanowi “okulary” \mathcal{O} . W_1, W_2 nazywamy szkiełkami. (Czasami okularami nazywa się trójkę $W_1, W_2, V_{N+1} \setminus V_N$; Są też inne warianty: np. żądamy aby $c \in V_N$ & $c \notin \partial V_{N-1}$, dalsza konstrukcja bez zmian (Rys.3.5).)

Rysunki 3.4, 3.5

Zbiór $(f|_{W_j})^{-1}(\mathcal{O})$, $j = 1, 2$ nazywamy okularami 2 rzędu (o “szkiełkach” $W_{11}, W_{12}, W_{21}, W_{22}$) (Rys.3.6). Okulary trzeciego rzędu to $(f|_{W_j})^{-1}(\text{okulary 2 rzędu})$, itd.

K_{f_c} to zbiór widziany przez okulary dowolnie wysokiego rzędu ($K_{f_c} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (W_{n1} \cup W_{n2} \cup \dots \cup W_{n2n})$). Udowodniliśmy przy okazji, że K_{f_c} ma ∞ wiele składowych spójności.

Rysunek 3.6

Uwaga 3.7. Tak jak poprzednio także i w tym przypadku można zdefiniować funkcję Greena G . Ma ona punkty krytyczne dokładnie na zbiorze $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(\{0\})$.

III. Składowe spójności uzupełnienia zbioru Julii

W rozdziale tym zajmiemy się zbadaniem dynamiki przekształcenia f na składowych spójności uzupełnienia zbioru Julii. Zbiór tych składowych oznaczamy będziemy $\mathcal{S}(f)$. Będziemy zakładać, że $J(f) \neq \hat{C}$ oraz tak jak zawsze $\deg f \geq 2$. Niech C będzie taką składową. Wówczas rodzina $\{f^n|_C\}_{n=1}^\infty$ jest normalna na całym $C \subseteq \hat{C} \setminus J(f)$, ponieważ można wybierać podciągi zbieżne lokalnie (gdyż jesteśmy w uzupełnieniu zbioru Julii) i stosować metodę przekątniową. Zauważmy, że obrazem składowej jest składowa: niech $C \in \mathcal{S}(f)$, wówczas $f(C) \subseteq \hat{C} \setminus J(f)$, co wynika z niezmienniczości $J(f)$. Ze spójności C mamy $f(C) \subseteq C'$, gdzie $C' \in \mathcal{S}(f)$. Ponieważ $f(\partial C) \subseteq J(f)$, więc $\partial f(C) \subseteq J(f)$. Zatem ze spójności C' mamy $C' = f(C)$. Dalsze rozważania rozbijają się na dwa przypadki, które badać będziemy osobno:

(1) Istnieje w zbiorze funkcji granicznych rodziny $\{f^n|_C\}_{n=1}^\infty$ funkcja nie stała (nazywamy ten przypadek osobliwym, a taką C składową osobliwą).

(2) Wszystkie funkcje graniczne rodziny $\{f^n|_C\}_{n=1}^\infty$ są funkcjami stałymi (nazywamy ten przypadek regularnym).

Najpierw zajmiemy się przypadkiem (1).

Dla uproszczenia przyjmujemy, że w tym rozdziale C będzie zawsze oznaczać składową spójności zbioru $\hat{C} \setminus J(f)$.

1. Istnieje w zbiorze funkcji granicznych funkcja różna od stałej.

Podstawowym krokiem w naszych rozważaniach będzie udowodnienie lematu 1.1. Analogiczna własność ma miejsce w przypadku (2), lecz jej dowód jest bez porównania trudniejszy (patrz rozdział VII — Twierdzenie Sullivana).

Lemat 1.1. *Każda składowa osobliwa C wpada w składową okresową to znaczy*

$$\exists_{s,k>0} : f^s(C) = f^{s+k}(C) =: C'$$

oraz rodzina $\{f^n|_{C'}\}_{n=1}^\infty$ ma w zbiorze funkcji granicznych funkcję $\text{id}|_{C'}$.

Dowód. Zakładaliśmy, że istnieje różna od stałej funkcja graniczna, czyli istnieje ciąg n_k i funkcja F

$$F : C \rightarrow \hat{C}$$

taka, że

$$f^{n_k}|_C \xrightarrow{k \rightarrow \infty} F \text{ \& } F \neq \text{const.}$$

Niech A będzie zbiorem otwartym takim, że

$$\emptyset \neq \text{cl } A \subseteq C.$$

Wówczas

$$\exists_K \quad \forall_{n_i > K} \quad f^{n_i}(C) \supseteq F(A).$$

Jest tak, ponieważ istnieje $\varepsilon > 0$ oraz zbiór otwarty B takie, że dla każdego $z \in A$ istnieje otoczenie $B_z \subseteq B \subseteq \text{cl } B \subseteq C$ i $F(\partial B_z) = \partial F(B_z)$, $\text{dist}(\partial F(B_z), F(z)) > \varepsilon$ (ze

zwartości $\text{cl} A$ i lokalnej postaci funkcji holomorficznej). Wówczas dla każdego $w \in B$ $\text{dist}(F(w), f^{n_i}(w)) < \varepsilon$ (dla n_i dostatecznie dużych), a więc dla każdego $z \in A$ $F(z) \in f^{n_i}(B_z) \subseteq f(C)$ (z twierdzenia Rouché).

Stąd

$$\forall_{n_i, n_j > K} \quad f^{n_i}(C) \cap f^{n_j}(C) \neq \emptyset$$

i ponieważ obrazem składowej jest składowa, to

$$\forall_{n_i, n_j > K} \quad f^{n_i}(C) \cap f^{n_j}(C) \in \mathcal{S}(f).$$

Niech $s := n_{i_0} > K$ będzie pierwszym momentem takim, że $f^s(C) = C'$. Niech $k := n_{i_0+1} - n_{i_0}$. Wówczas $f^{s+k}(C) = f^s(C) = C'$. Ze zbieżności $f^{n_i}|_C$ wynika, że istnieje takie n_{i_t} , że $f^{n_{i_t}}|_C = f^{s+km_t}|_C$ dla pewnego ciągu m_t . Stąd wynika, że $\{f^{km_t}|_{C'}\}_{t=0}^\infty$ zachowuje C' (dla t dostatecznie dużych) oraz jest zbieżne do różnej od stałej funkcji G . Ponadto G jako granica przekształceń zachowujących C' przekształca C' w C' ($G(C') \subseteq C'$).

Weźmy dowolny zbiór zwarty $K \subseteq G(C')$. Weźmy otwarty zbiór $B \subseteq \text{cl} B \subseteq G(C')$ taki, że $G(B) \supseteq K$. Korzystając z twierdzenia Rouché $f^{km_t}(B) \supseteq K$, dla dostatecznie dużych m_t .

Pokażemy, że

$$\text{dist}(f^{k(m_{t'}, -m_{t''})}(x), x)$$

dąży jednostajnie do zera (dla $t', t'' \rightarrow \infty$, $t'' < t'$, $x \in K$). Istnieje $\tilde{x}_i \in B$ takie, że $f^{km_{t''}}(\tilde{x}) = x$. Wówczas

$$\text{dist}(f^{k(m_{t'}, -m_{t''})}(x), x) = \text{dist}(f^{km_{t'}}(\tilde{x}), f^{km_{t''}}(\tilde{x})).$$

Z warunku zbieżności Cauchy $\text{dist}(f^{km_{t'}}(\tilde{x}), f^{km_{t''}}(\tilde{x}))$ dąży jednostajnie do zera dla $\tilde{x} \in \text{cl} B$, a więc z dowolności zbioru K otrzymujemy

$$f^{k(m_{t'}, -m_{t''})}|_{G(C')} \xrightarrow[t', t'' \rightarrow \infty]{} \text{id}|_{G(C')}.$$

Ponieważ $G(C')$ jest zbiorem otwartym spójnym mamy

$$f^{k(m_{t'}, -m_{t''})}|_{C'} \xrightarrow[t', t'' \rightarrow \infty]{} \text{id}|_{C'},$$

co kończy dowód lematu 1.1. ■

W dalszych rozważaniach będziemy zakładać, że dziedzina C jest okresowa i (ewentualnie biorąc iteracje f^s jako nasze przekształcenie zamiast samego f) jej okres wynosi 1, czyli

$$f(C) = C.$$

Rozważać będziemy f jako przekształcenie obcięte do

$$f : \text{cl} C \rightarrow \text{cl} C.$$

Ponadto ponieważ $J(f)$ jest zbiorem nieskończonym to

$$C \subseteq \hat{\mathbb{C}} \setminus \text{co najmniej trzy punkty}$$

więc uniwersalnym holomorficznym nakryciem dziedziny jest dysk (patrz Appendix). Ponadto istnieje podgrupa Γ grupy automorfizmów dysku $\mathbb{D} := D(0, 1) = \{|z| < 1\}$, działająca w sposób całkowicie nieciągły (to znaczy

$$\forall z \in \mathbb{D} \quad \exists U \ni z \quad U \text{ otwarte} : \quad \forall g \in \Gamma \setminus \{\text{id}\} \quad g(U) \cap U = \emptyset$$

taka, że

$$C \cong \mathbb{D}/\Gamma,$$

(Γ jest grupą podstawową C).

Mamy więc nakrycie H

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D} & & \mathbb{D} \\ H \downarrow & & H \downarrow \\ C & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

i z lematu 1.1. wiemy, że istnieje ciąg $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ taki, że

$$f^{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \text{id}.$$

Udowodnimy kolejny ważny krok na drodze do klasyfikacji dziedzin i ich dynamik.

Lemat 1.2. *W rozważanej sytuacji istnieje ciąg przekształceń holomorficznych $\{\tilde{f}^{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$*

$$\tilde{f}^{n_k} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$$

takich, że

- (1) \tilde{f}^{n_k} są podniesieniami przekształceń f^{n_k} ,
- (2) \tilde{f}^{n_k} są automorfizmami dysku \mathbb{D} ,
- (3) $\tilde{f}^{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \text{id}$.

Dowód. Przekształcenie

$$H : \mathbb{D} \rightarrow C$$

jest nakryciem, więc istnieją podniesienia \tilde{f}^{n_k} przekształceń f^{n_k} . Niech \tilde{f}^{n_k} będzie dowolnym podniesieniem, wówczas:

\tilde{f}^{n_k} jest “na” ponieważ f^{n_k} jest holomorficzne i “na”.

Można to udowodnić następująco: Weźmy dowolny $\tilde{x} \in \mathbb{D}$. Istnieje $\tilde{y} \in \mathbb{D}$ taki, że $\tilde{y} \in H^{-1}(H(\tilde{x}))$ i $\tilde{y} = \tilde{f}^{n_k}(\tilde{z})$ dla pewnego $\tilde{z} \in \mathbb{D}$ (ponieważ f^{n_k} jest “na”). Niech $\tilde{\gamma} \subseteq \mathbb{D}$ będzie krzywą gładką łączącą \tilde{x} i \tilde{y} . Wtedy można znaleźć krzywą $\gamma' \subseteq C$ taką, że $f^{n_k}|_{\gamma'}$ jest homeomorfizmem γ' na $H(\tilde{\gamma})$, a γ' zaczyna się w $z := H(\tilde{z})$. Podnieśmy γ' do $\tilde{\gamma}' \subseteq \mathbb{D}$

tak, żeby początek $\tilde{\gamma}'$ był w \tilde{z} . Wtedy drugi koniec $\tilde{\gamma}'$ przechodzi pod działaniem \tilde{f}^{n_k} na \tilde{x} (Rys.1.1). (Zauważmy, że ogólnie podniesienie przekształcenia “na” nie musi być “na”: np. $g: \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $g(x) := \sin(2\pi x)$.)

\tilde{f}^{n_k} jest różnowartościowe, ponieważ f^{n_k} nie ma punktów krytycznych — gdyby miało to f też musiałoby mieć i wtedy wszystkie f^{n_k} miałyby punkty krytyczne więc nie mogłyby zachodzić $f^{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \text{id}$ — więc także \tilde{f}^{n_k} nie może mieć punktów krytycznych. Tak więc \tilde{f}^{n_k} jest przekształceniem dysku na siebie, bez punktów krytycznych więc musi być różnowartościowe.

Dotychczas udowodnione własności (1) i (2) dotyczyły wszystkich podniesień każdego przekształcenia f^{n_k} . W celu otrzymania własności (3) trzeba wybrać specjalne podniesienie:

Wybermy dowolny punkt $\tilde{z}_0 \in \mathbb{D}$ i jego rzut $z_0 = H(\tilde{z}_0) \in C$. Niech V będzie dostatecznie małym otoczeniem z_0 , tak, żeby $H^{-1}(V)$ rozpadało się na składowe, na których H jest różnowartościowe. Weźmy \tilde{V} składową zawierającą \tilde{z}_0 . Ponieważ $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(z_0) = z_0$ to dla dostatecznie dużych n_k $f^{n_k}(z_0) \in V$. Weźmy \tilde{f}^{n_k} taki, aby

$$\tilde{f}^{n_k}(\tilde{z}_0) \in \tilde{V}.$$

Wówczas ponieważ $H\tilde{f}^{n_k}|_{\tilde{V}} = f^{n_k}H|_{\tilde{V}} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} H|_{\tilde{V}}$ oraz na \tilde{V} przekształcenie rzutowania H jest różnowartościowe, mamy

$$\tilde{f}^{n_k}|_{\tilde{V}} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \text{id}|_{\tilde{V}}.$$

Oczywiście \tilde{f}^{n_k} są holomorficzne więc

$$\tilde{f}^{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \text{id},$$

co zakończyło dowód lematu. ■

Przypomnijmy teraz, że automorfizmy dysku dzielą się na hiperboliczne, paraboliczne i eliptyczne.

Definicja 1.3. Niech f będzie automorfizmem dysku \mathbb{D} . Zbiorem punktów stałych automorfizmu f nazywamy zbiór

$$\text{Fix}(f) := \{z \in \text{cl } \mathbb{D} : f(z) = z\}.$$

Uwaga 1.4. Jeżeli f jest eliptycznym lub parabolicznym automorfizmem dysku \mathbb{D} , to

$$\text{card}(\text{Fix}(f)) = 1,$$

jeżeli zaś jest hiperboliczny, to

$$\text{card}(\text{Fix}(f)) = 2.$$

Ponadto dla f eliptycznego $\text{Fix}(f) \subset \text{int } \mathbb{D}$, a dla f parabolicznego $\text{Fix}(f) \subset \partial \mathbb{D}$.

Lemat 1.5. Niech f i g będą automorfizmami dysku \mathbb{D} , różnymi od identyczności, komutującymi, to znaczy

$$f = g^{-1}fg.$$

Wówczas zbiory punktów stałych obu przekształceń są równe.

Dowód. Z komutacji wynika, że

$$g(\text{Fix}(f)) = f(g(\text{Fix}(f))).$$

Rozważmy teraz dwa przypadki:

(a) f jest paraboliczne lub eliptyczne. Wówczas

$$\text{Fix}(f) = \{w\},$$

Ponieważ w jest jedynym punktem stałym f , to

$$g(w) = w.$$

Jeżeli istnieje inne $w' \in \text{Fix}(g)$, to z własności $f(\text{Fix}(g)) = g(f(\text{Fix}(g)))$ mamy $f(w') = w'$, co niemożliwe, bo f ma tylko jeden punkt stały.

(b) f jest hiperboliczne. Można zakładać, że g także jest hiperboliczny, gdyż w przeciwnym przypadku mamy sytuację z punktu (a). Wówczas ani f ani g nie mają punktów okresowych i $\text{Fix}(f) = \{w, w'\}$, $w \neq w'$. Wówczas $g(w) = w' \& g(w') = w$ (co niemożliwe ponieważ przekształcenie hiperboliczne nie ma punktów okresowych) albo $g(w) = w \& g(w') = w'$, czyli $\text{Fix}(g) = \text{Fix}(f)$. ■

Wracamy teraz do naszej sytuacji. Będziemy rozważać skonstruowany w lemacie 1.2 ciąg $\{\tilde{f}^{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ i podgrupę Γ grupy automorfizmów dysku $\mathbb{D} := D(0,1)$, taką, że

$$C \cong \mathbb{D}/\Gamma.$$

Lemat 1.6.

$$\forall_{g \in \Gamma} \quad \exists_K \quad \forall_{n_k > K} \quad \tilde{f}^{n_k} = g^{-1} \tilde{f}^{n_k} g.$$

Dowód. Wszystkie przekształcenia \tilde{f}^{n_k} są odwracalne, więc ma sens następująca definicja

$$h_{n_k} := (\tilde{f}^{n_k})^{-1} g^{-1} \tilde{f}^{n_k} g.$$

Wówczas $\{h_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ jest ciągiem automorfizmów dysku oraz ponieważ \tilde{f}^{n_k} są podniesieniami przekształceń f^{n_k} zbioru $C \cong \mathbb{D}/\Gamma$, a $g \in \Gamma$, to otrzymujemy $h_{n_k} \in \Gamma$. Ponadto ponieważ $\tilde{f}^{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \text{id}$, to

$$h_{n_k} = (\tilde{f}^{n_k})^{-1} g^{-1} \tilde{f}^{n_k} g \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \text{id}.$$

Grupa Γ działa w sposób całkowicie nieciągły, więc dla dostatecznie dużych n_k zachodzi $h_{n_k} = \text{id}$. Tak więc dla dostatecznie dużych n_k

$$\text{id} = (\tilde{f}^{n_k})^{-1} g^{-1} \tilde{f}^{n_k} g,$$

co kończy dowód lematu. ■

Przekształcenia \tilde{f}^{n_k} (dla dowolnego $n_k \neq 0$) są różne od identyczności, ponieważ w przeciwnym przypadku $\tilde{f}^{n_k}|_{C'} \equiv \text{id}|_{C'}$, stąd $\tilde{f}^{n_k} \equiv \text{id}$, co niemożliwe, gdyż $\deg(f) \geq 2$. Możemy więc zastosować lematy 1.5 i 1.6 i otrzymujemy, że dla dowolnego ustalonego $g_0 \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}$ i dla dostatecznie dużych n_k \tilde{f}^{n_k} i g_0 mają te same punkty stałe ($\text{Fix}(\tilde{f}^{n_k}) = \text{Fix}(g_0) =: A$). Zatem wszystkie $g \in \Gamma$ mają wspólne punkty stałe ($\text{Fix}(g_1) = A = \text{Fix}(g_2)$). Stąd cała grupa Γ musi się składać z automorfizmów jednego typu o wspólnych punktach stałych. Dokładniej Γ musi być podgrupą grupy jednoparametrowej Γ_0 , hiperbolicznej, parabolicznej lub eliptycznej (patrz Appendix). Ponadto dla dostatecznie dużych n_k $\tilde{f}^{n_k} \in \Gamma_0$ (bo $\text{Fix}(\tilde{f}^{n_k}) = A$). Weźmy dowolne podniesienie \tilde{f} przekształcenia f . Dla dostatecznie dużych n_k istnieją g i h elementy Γ takie, że

$$(\tilde{f})^{n_k} = g \tilde{f}^{n_k} h.$$

Zatem $(\tilde{f})^{n_k} \in \Gamma_0$. Ponieważ \tilde{f} i $(\tilde{f})^{n_k}$ mają te same punkty stałe, to $\tilde{f} \in \Gamma_0$.

Jesteśmy teraz przygotowani do sklasyfikowania dziedzin C i ich dynamik. Wystarczy rozpatrzyć następujące przypadki:

(1) $\Gamma = \{\text{id}\}$,

Wiemy ponadto, że wówczas

$$(\tilde{f})^{n_k} \underset{k \rightarrow \infty}{\rightrightarrows} \text{id}$$

więc \tilde{f} nie może być ani paraboliczne ani hiperboliczne, ponieważ wtedy $(\tilde{f})^n \underset{n \rightarrow \infty}{\rightrightarrows} \text{const}$.

Tak więc \tilde{f} musi być eliptyczne. Po odpowiedniej zmianie współrzędnych na dysku \mathbb{D} jest obrotem o kąt $2\pi\lambda$ dla pewnego $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Jeżeli by λ było wymierne, to dla pewnego k zachodziłoby

$$(\tilde{f})^k = \text{id}$$

i stąd $f^k = \text{id}$ na C , a zarazem na $\hat{\mathbb{C}}$, co niemożliwe, gdyż f jest przekształceniem stopnia co najmniej 2.

Tak więc w tym przypadku istnieje przekształcenie biholomorficzne $h : C \rightarrow \mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ takie, że

$$hfh^{-1}(z) = z \cdot \exp(2\pi i\lambda) \quad (\text{obrót o kąt } \lambda)$$

gdzie λ niewymierne.

Dziedzinę C takiej postaci nazywamy dyskiem Siegela (Rys.1.2).

(2) Γ jest eliptyczna. Tak nie może być, ponieważ grupa eliptyczna nie działa w sposób całkowicie nieciągły.

(3) Γ jest paraboliczna. Pokażemy, że to również nie może się zdarzyć. Jeżeli zamiast dysku bierzemy zbiór $\{\text{Im}(z) > 0\}$ i punktem stałym jest ∞ , to grupa Γ jest postaci

$$\Gamma = \{z \mapsto z + \lambda : \lambda \in \Lambda\},$$

gdzie $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ jest pewnym zbiorem parametrów. Wówczas ponieważ grupa Γ działa w sposób całkowicie dyskretny, to istnieje takie λ_0 , że przekształcenie

$$g(z) := z + \lambda_0$$

jest generatorem grupy Γ .

Wówczas dziedzina \mathbb{D}/Γ ($\mathbb{D} \cong \{\text{Im}(z) > 0\}$) jest biholomorficznie równoważna dyskowi z usuniętym punktem, bo $\exp(2\pi i \frac{1}{\lambda_0} z)$ jest biholomorfizmem $\{\text{Im} z > 0\}/\Gamma \rightarrow \mathbb{D} \setminus \{0\}$ (Rys.1.3). Zatem $C \cong \mathbb{D}/\Gamma \cong \mathbb{D} \setminus \{0\}$ musiałoby być holomorficznie równoważne topologicznemu dyskowi z usuniętym punktem. Jednocześnie topologiczny dysk w $\hat{\mathbb{C}}$ z usuniętym zbiorem spójnym i zwartym K większym niż punkt, oznaczmy go C' (Rys 1.4), jest holomorficznie różny od $\mathbb{D} \setminus \{0\}$. Wynika to na przykład stąd, że funkcja holomorficzna $h : \mathbb{D} \setminus \{0\} \rightarrow C' = \mathbb{D} \setminus K$ jako ograniczona miałaby przedłużać się do ciągłej w 0 i mieliśmyby $h(0) = \partial K$, czyli punkt przechodziłby na zbiór niejednopunktowy. Sprzeczność.

Zatem C byłby topologicznym dyskiem z usuniętym punktem (Rys. 1.4), co niemożliwe, bo nie ma izolowanych punktów w zbiorze Julii.

(4) Γ jest hiperboliczna. Wówczas jeżeli zamiast dysku bierzemy zbiór $\{\text{Im}(z) > 0\}$ i punktami stałymi są 0 i ∞ , to grupa Γ jest postaci

$$\Gamma = \{z \mapsto \lambda z : \lambda \in \Lambda\}$$

gdzie $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^+$ jest pewnym zbiorem parametrów. Ponadto \tilde{f} jest postaci

$$z \mapsto \mu z$$

dla pewnego $\mu \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Ponieważ grupa Γ działa w sposób całkowicie nieciągły, to istnieje λ_0 takie, że przekształcenie

$$g(z) := \lambda_0 z$$

jest generatorem grupy Γ . Wówczas dziedzina $C \cong \mathbb{D}/\Gamma$ jest równoważna pierścieniowi (posługując się na przykład przekształceniem $\exp(\frac{2\pi i}{\log \lambda_0} \log z)$), a f jest obrotem na tym pierścieniu (Rys. 1.5). Ponadto gdyby obrót ten miał punkty okresowe, to sam byłby okresowy, to znaczy istniałoby k takie, że

$$f^k = \text{id},$$

co niemożliwe, gdyż f jest przekształceniem holomorficznym i $\deg(f) \geq 2$.

Tak więc w tym przypadku w odpowiednim układzie współrzędnych mamy:

C jest pierścieniem,

f jest obrotem na tym pierścieniu o kąt niewspółmierny z π .

Dziedzinę C takiej postaci nazywamy pierścieniem Hermana (Rys. 1.5).

W ten sposób zakończyliśmy klasyfikację w przypadku, gdy w zbiorze funkcji granicznych są jakieś funkcje inne niż stałe. Jako uzupełnienie podamy jeszcze jedną dodatkową informację:

Stwierdzenie 1.7. *Jeżeli przekształcenie f*

$$f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$$

jest wielomianem, to nie mogą istnieć pierścienie Hermana.

Dowód. Załóżmy, że istnieje pierścień Hermana H dla wielomianu f . Możemy zakładać, że

$$f(H) = H.$$

(Jeżeli okres wynosi s , to rozważamy f^s , które także jest wielomianem.) H rozcina $\hat{\mathbb{C}}$ na zbiory A, B (Rys. 1.6). $f|_H$ jest obrotem, więc

$$f(\partial A) = \partial A \text{ \& } f(\partial B) = \partial B.$$

Punkt ∞ jest punktem stałym, więc $\infty \notin H$. Załóżmy, że $\infty \in A$. Ponieważ basen bezpośredniego przyciągania ∞A_∞ jest z składową uzupełnienia zbioru Julii, to $A_\infty \cap H = \emptyset$ i stąd $A_\infty \subseteq A$. Zatem $J(f) = \partial A_\infty \subseteq \text{cl } A$ (patrz rozdział II, 2.4), czyli $J(f) \cap \text{cl } B = \emptyset$ — sprzeczność, bo $\partial B \subseteq J(f)$. ■

2. Wszystkie funkcje graniczne są funkcjami stałymi.

Będziemy stosować metodę analogiczną do zastosowanej w poprzednim przypadku. Kluczem do tego będzie zastosowanie Twierdzenia Sullivana, które jest analogiczne do lematu 1.1 w poprzednim przypadku.

Twierdzenie 2.1. (Twierdzenie Sullivana) *Niech*

$$f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$$

będzie przekształceniem holomorficznym. Wówczas nie ma składowych błądzących, to znaczy każda składowa uzupełnienia zbioru Julii $J(f)$ pod działaniem f wpada w składową okresową.

Dowód tego twierdzenia jest bardzo trudny i zamieścimy go w osobnym rozdziale.

Dzięki temu twierdzeniu możemy w dalszych rozważaniach zakładać, że dziedzina C jest okresowa i (ewentualnie biorąc iteracje f^s jako nasze przekształcenie zamiast samego f) jej okres wynosi 1, czyli

$$f(C) = C.$$

Rozważać będziemy f jako przekształcenie obcięte do

$$f : \text{cl } C \rightarrow \text{cl } C.$$

Ponadto rodzina $\{f^n|_C\}_{n=1}^\infty$ ma tylko funkcje stałe jako funkcje graniczne.

Lemat 2.2. Niech punkt a będzie wartością stałą funkcji granicznej rodziny $\{f^n|_C\}_{n=1}^\infty$, to znaczy istnieje podciąg n_k taki, że

$$f|_C^{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} a.$$

Wówczas punkt ten jest jedyną funkcją graniczną tej rodziny oraz a jest punktem stałym przekształcenia f .

Dowód.

(a) Punkt a jest punktem stałym przekształcenia f .

Dowód. Wybierzmy dowolny $z \in C$, niech $w := f(z)$. Oczywiście $w \in C$ i mamy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(z) = a \ \& \ \lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(w) = a.$$

Wówczas

$$f(a) = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(f(z)) = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(w) = a. \quad \square$$

(b) Funkcja stała a jest jedyną funkcją graniczną.

Dowód. Ustalmy dowolny punkt $z \in C$. Weźmy dostatecznie małe otoczenie U punktu a w zbiorze $\text{cl}C$. Niech

$$V := f^{-1}(U)$$

(Rys.2.1).

Rysunek 2.1

Wówczas V jest także otoczeniem punktu a . Gdyby a nie było jedyną funkcją graniczną, to nieskończenie wiele razy ciąg $\{f^n(z)\}_{n=1}^\infty$ nie wpadałby w U . Jednocześnie punkt a jest funkcją graniczną, więc istnieje podciąg n_k taki, że

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(z) = a.$$

Można więc skonstruować ciąg $\{m_k\}_{n=1}^\infty$ “ostatni moment przed wpadnięciem w U ”, to znaczy

$$f^{m_k+1}(z) \in U \ \& \ f^{m_k}(z) \notin U.$$

Wówczas z definicji V mamy

$$f^{m_k}(z) \in V.$$

Rodzina $\{f^m|_C\}_{n=1}^\infty$ jest normalna, więc z ciągu $\{f^{m_k}|_C\}_{n=1}^\infty$ można wybrać podciąg zbieżny i jego granica musi być funkcją stałą i ów punkt graniczny b musi leżeć w $\text{cl}(V \setminus U)$, a więc jest różny od punktu a . Dzięki udowodnionemu już punktowi (a) wiemy, że każdy punkt graniczny musi być punktem stałym przekształcenia f , zatem $b \notin f^{-1}(\{a\})$. Dzięki dowolności otoczenia U otrzymujemy więc, że funkcja f ma nieskończenie wiele punktów stałych, co jest niemożliwe (ponieważ $f : \hat{C} \rightarrow \hat{C}$ jest holomorficzna). ■

Mamy więc punkt stały $a \in \text{cl } C$, który jest jedyną funkcją graniczną. W celu uzyskania klasyfikacji dynamik rozpatrzmy dwa przypadki.

(1) $a \in \text{int } C$. Wówczas a jest ściekiem, to znaczy

$$|f'(a)| < 1.$$

Istotnie, weźmy kulę $B(a, \varepsilon)$ o środku a i dostatecznie małym promieniu ε . Wówczas

$$B(a, \varepsilon) \subseteq C$$

i stąd, ponieważ a jest punktem granicznym, istnieje n tak duże, że

$$f^n(B(a, \varepsilon)) \subseteq B\left(a, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Korzystając z lematu Schwarz'a otrzymujemy

$$|(f^n)'(a)| \leq \frac{1}{2}.$$

Ale $|(f^n)'(a)| = |f'(a)|^n$ więc a jest ściekiem.

Ponadto punkt a jest jedyną funkcją graniczną, więc dla dowolnego $z \in C$ mamy

$$f^n(z) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a.$$

W tym przypadku otrzymujemy więc:

a jest ściekiem,

C jest basenem bezpośredniego przyciągania ścieku a .

(2) $a \in \partial C$. Wówczas $a \in J(f)$ i stąd mamy

$$|f'(a)| \geq 1,$$

gdyż ścieki nie mogą należeć do zbioru Julii $J(f)$ (patrz rozdział II, 1.12). Pokażemy, że punkt a nie może być źródłem, to znaczy nie może być

$$|f'(a)| > 1.$$

Załóżmy, że jest źródłem, i weźmy dostatecznie małe otoczenie U punktu a oraz wybierzmy dowolny punkt $z \in C$. Z niezmienniczości $J(f)$ mamy $z \notin \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(\{a\})$. Wówczas, ponieważ punkt a jest jedyną funkcją graniczną, to

$$f^n(z) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a,$$

czyli dla dostatecznie dużych n

$$f^n(z) \in U \setminus \{a\}.$$

Jednak na dostatecznie małym otoczeniu źródło odpycha punkty, czyli jeżeli $f^n(z) \in U$, to dla pewnego $k > 0$ $f^{n+k}(z) \notin U$, co daje sprzeczność.

Udowodniliśmy więc, że a jest punktem neutralnym, to znaczy

$$|f'(a)| = 1.$$

Udowodnimy teraz, że punkt a musi być punktem neutralnym wymiernym, to znaczy w zapisie

$$f'(a) = \exp(2\pi i\mu)$$

μ musi być wymierne.

Udowodnimy nawet więcej, mianowicie jeżeli okres dziedziny C wynosi s ($f^s(C) = C$), to

$$(f^s)'(a) = 1.$$

Ponieważ w naszych oznaczeniach przyjęliśmy, że okres wynosi 1 (za f wzięliśmy iterację f^s gdzie s jest okresem), to będziemy dowodzić, że

$$f'(a) = 1.$$

Założmy, że tak nie jest, to znaczy

$$f'(a) = \exp(2\pi i\lambda) \text{ \& } \lambda \notin \mathbb{Z}.$$

Będziemy dowodzić, że $a \notin J(f)$, co jest sprzeczne z założeniem, że $a \in \partial C \subseteq J(f)$.

Zdefiniujmy dla dostatecznie małego ε zbiór

$$L := B(a, \varepsilon) \setminus \{a\}.$$

Przekształcenie $H : \{\text{Im}(\tilde{z}) > 0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{a\}$ zdefiniowane wzorem $H(\tilde{z}) := a + \text{Im}(\tilde{z}) \cdot \exp(2\pi i \text{Re } \tilde{z})$ i zbiór $\tilde{L} = \{\tilde{z} \in \mathbb{C} : 0 < \text{Im}(\tilde{z}) < \varepsilon\}$ jest nakryciem (nieholomorficznym) zbioru L .

Ustalmy dowolny punkt $z_0 \in C$. Niech γ będzie krzywą o początku w punkcie z_0 i końcu w $f(z_0)$, oraz taką, że $\gamma \subseteq C$. Oznaczmy

$$\Xi_M := \bigcup_{n=M}^{\infty} f^n(\gamma)$$

(Rys.2.2).

Rysunek 2.2

Ponieważ punkt a jest jedyną funkcją graniczną, to

$$f^n|_C \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a,$$

więc dla dostatecznie dużego M krzywa Ξ_M leży w zbiorze L . Niech $\tilde{\gamma}_M$ będzie podniesieniem krzywej $f^M(\gamma)$ do \tilde{L} . Niech $\tilde{f} : \tilde{L} \rightarrow \{\text{Im}(\tilde{z}) > 0\}$ będzie podniesieniem przekształcenia f przekształcającym początek krzywej $\tilde{\gamma}_M$ w jej koniec.

Dla dowolnego $z \in C$ mamy

$$f^n(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a,$$

co w nakryciu (dla $z \in L$) oznacza

$$\text{Im}(\tilde{f}^n(\tilde{z})) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Pochodna w punkcie a wynosi $\exp(2\pi i\lambda)$, więc przekształcenie pochodne ma postać

$$z \mapsto (z - a) \exp(2\pi i\lambda) + a,$$

więc w nakryciu ma postać

$$\tilde{z} \mapsto \tilde{z} + \lambda$$

(Rys.2.3).

Rysunek 2.3

Ponieważ $\lambda \notin \mathbb{Z}$, to przyjmujemy, że $\lambda > 0$ (przypadek $\lambda < 0$ jest analogiczny).

Wówczas (jeśli ε było dostatecznie małe) przekształcenie \tilde{f} jest dobrze przybliżane przez podniesienie przekształcenia pochodnego, w szczególności

$$(*) \quad \forall_{\tilde{z} \in \tilde{L}} \quad |(\tilde{f}(\tilde{z}) - \tilde{z}) - \lambda| < \frac{\lambda}{2},$$

ponadto jeśli $\tilde{z} \in H^{-1}(C)$, to $\tilde{f}^n(\tilde{z}) \in \tilde{L}$ (dla dowolnego n).

Krzywa $\tilde{\Xi}_M := \bigcup_{n=0}^{\infty} \tilde{f}^n(\tilde{\gamma}_M)$ jest podniesieniem Ξ_M do \tilde{L} . Można zakładać, że M

jest tak duże, że tam gdzie leży krzywa $\tilde{\Xi}_M$ przekształcenie \tilde{f} jest dobrze przybliżane przez podniesienie przekształcenia pochodnego. Stąd wiemy, że krzywa $\tilde{\Xi}_M$ zbiega do $+\infty$, dokładniej $\text{Re}(\tilde{f}^n(\tilde{\gamma}_M)) \xrightarrow{M \rightarrow \infty} +\infty$ (ponieważ $\lambda > 0$, patrz (*)). Zdefiniujmy zbiór $\tilde{K} \subset \tilde{L}$

jako obszar leżący pod krzywą $\tilde{\Xi}_M$, na prawo od $\tilde{f}^{M+T}(\tilde{z}_0)$ (dla pewnego T), z tym, że jeżeli krzywa ma samoprzecięcia, to pętle odcinamy (Rys.2.4).

Rysunek 2.4.

Formalnie \tilde{K} można zdefiniować następująco:

Utwórzmy krzywą τ z krzywej $\tilde{\Xi}_M$ przez dodanie półprostej rzeczywistej zaczynającej się w punkcie $\text{Re}(\tilde{f}^{M+T}(\tilde{z}_0))$ oraz odcinka łączącego punkty $\tilde{f}^{M+T}(\tilde{z}_0)$ i $\text{Re}(\tilde{f}^{M+T}(\tilde{z}_0))$.

Dokładniej: oznaczmy

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{M+T} &:= \{\tilde{z} \in \mathbb{R} : \text{Re}(\tilde{z}) \geq \text{Re}(\tilde{f}^{M+T}(\tilde{z}_0))\}, \\ I_{M+T} &:= \{\tilde{z} \in \mathbb{C} : \text{Re}(\tilde{z}) = \text{Re}(\tilde{f}^{M+T}(\tilde{z}_0)) \ \& \ 0 \leq \text{Im}(\tilde{z}) \leq \text{Im}(\tilde{f}^{M+T}(\tilde{z}_0))\}, \\ \tau &:= \tilde{\Xi}_M \cup \mathbb{R}_{M+T} \cup I_{M+T}. \end{aligned}$$

Wówczas jako \tilde{K} bierzemy składową spójności zbioru $\mathbb{C} \setminus \tau$, do której należą punkty leżące tuż nad \mathbb{R}_{M+T} .

Uwaga 2.3. Można dobrać $T \geq 1$ tak duże, że $\tilde{f}(\tilde{K}) \subseteq \tilde{K}$.

Dowód. Niech T będzie takie, że $\tilde{f}^{M+T}(\tilde{z}_0)$ leży na prawo od $\tilde{\gamma}_M$, to znaczy $\tilde{\gamma}_M \cap \{\tilde{z} : \operatorname{Re}(\tilde{z}) > \operatorname{Re}(\tilde{f}^{M+T}(\tilde{z}_0))\} = \emptyset$. Weźmy dowolny $\tilde{z} \in \tilde{K}$. Wówczas istnieje krzywa ϱ łącząca \tilde{z} i $\operatorname{Re}(\tilde{z})$ zawarta w \tilde{K} . Gdyby $\tilde{f}(\tilde{z}) \notin \tilde{K}$, to

$$\tilde{f}(\varrho) \cap (\tilde{\Xi}_M \cup I_{M+T}) \neq \emptyset,$$

Oczywiście $\tilde{f}(\varrho) \cap I_{M+T} = \emptyset$ ponieważ ϱ leży na prawo od I_{M+T} z definicji zbioru \tilde{K} (patrz (*)). Stąd i z definicji T mamy $\tilde{f}(\varrho) \cap \tilde{\gamma}_M = \emptyset$. Tak więc $\tilde{f}(\varrho) \cap (\tilde{\Xi}_M \setminus \tilde{\gamma}_M) = \tilde{f}(\varrho) \cap (\tilde{f}(\tilde{\Xi}_M)) \neq \emptyset$. Stąd $\varrho \cap \tilde{\Xi}_M \neq \emptyset$. Sprzeczność. ■

Mamy $\tilde{f}(\tilde{K}) \subseteq \tilde{K}$. Ponadto $\tilde{K} \subseteq \tilde{L}$ oraz krzywa $\tilde{\Xi}_N$ zbiega do $+\infty$ więc po zrzutowaniu na L mamy:

$$K \cup \{a\} \text{ jest otoczeniem punktu } a,$$

$$f(K) \subseteq K.$$

Stąd dla dowolnego n mamy

$$f^n(K) \subseteq K,$$

więc rodzina $\{f^n|_K\}_{n=1}^\infty$ jest normalna i z definicji punkt $a \notin J(f)$, co jest sprzeczne z założeniem $a \in \partial C$.

Udowodniliśmy więc, że

$$|f'(a)| = 1.$$

W tym przypadku otrzymujemy więc:

a jest punktem neutralnym wymiernym,

$$f^n|_C \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a.$$

Na tym zakończyliśmy badanie składowych okresowych uzupełnienia zbioru Julii. Udowodniliśmy, że każda regularna składowa jest zbieżna pod działaniem przekształcenia f do ścieku lub punktu neutralnego wymiernego leżącego w jej brzegu. Przyjrzyjmy się teraz zbiorowi punktów przyciąganych przez wziętą *a priori* dowolną okresową trajektorię ścieku lub trajektorię okresową punktu neutralnego wymiernego. Dla ścieku są to baseny przyciągania będące składowymi regularnymi typu (1). Zbadamy teraz składowe okresowe przyciągane do trajektorii punktu neutralnego wymiernego. Zakładać teraz będziemy, że okres punktu neutralnego wymiernego wynosi 1 (to znaczy badamy f^s zamiast f , gdzie s jest okresem punktu neutralnego).

Sformułujemy najpierw następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.4. Niech $U \subseteq \mathbb{C}$ będzie zbiorem otwartym oraz

$$f : U \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$$

będzie przekształceniem holomorficznym. Niech $p \in U$ będzie punktem neutralnym wymiernym, to znaczy

$$f(p) = p \quad \& \quad f'(p) = \lambda \quad \& \quad \exists_m \lambda^m = 1$$

gdzie m jest najmniejszą liczbą naturalną o tej własności.

Dla uproszczenia zapisu założyliśmy, że okres punktu p wynosi 1. Wówczas $F := f^m$ w otoczeniu punktu p jest topologicznie sprzężone z przekształceniem

$$z \mapsto z(1 + z^{mk}) \quad \text{dla pewnego } k,$$

tak, że obrazem p jest punkt 0. Ponadto przekształcenie sprzęgające ma różniczkę w punkcie 0, równą id.

Dowód tego twierdzenia przedstawimy w następnych rozdziałach.

Przyjrzyjmy się dynamice przekształcenia

$$g(z) = z(1 + z^s) \quad \text{gdzie } s \geq 1,$$

w otoczeniu punktu 0. Zachowuje ono promienie

$$\left\{ z : \arg(z) = \frac{2\pi}{2s}k \right\} \quad k = 0, 1, \dots, 2s - 1.$$

Dla k parzystych wzdłuż tych promieni $1 + z^s > 1$, więc g odpycha od punktu 0, dla k nieparzystych $1 + z^s < 1$, więc g przyciąga do punktu 0 (Rys.2.5).

Każdy kąt wyznaczony przez kolejne promienie: odpychający i przyciągający ich dwusieczna dzieli na obszary gdzie $\operatorname{Re}(1 + z^s) > 1$ i następuje odpychanie od promienia odpychającego oraz od punktu 0, oraz obszar gdzie $\operatorname{Re}(1 + z^s) < 1$ i następuje przyciąganie do promienia przyciągającego (Rys.2.6).

Dla każdego promienia przyciągającego $\{z : \arg(z) = \frac{2\pi}{2s}(2l + 1)\}$, $l = 0, 1, \dots, s - 1$, zdefiniujmy P_1'' jako zbiór punktów zawartych pomiędzy dwusiecznymi promienia przyciągającego i sąsiednich promieni odpychających (te dwusieczne to $\{z : \arg(z) = \frac{2\pi}{2s}(2l + \frac{1}{2})\}$ i $\{z : \arg(z) = \frac{2\pi}{2s}(2l + 2 - \frac{1}{2})\}$), i odcinkami prostymi do tych dwusiecznych i przecinającymi się w punkcie $z_1 = \frac{1}{s} \exp(\frac{2\pi}{2s}(2l + 1)i)$ promienia przyciągającego (Rys.2.7). Łatwo sprawdzić, że

$$g(P_1'') \subseteq P_1'',$$

$$g^n|_{P_1''} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

oraz jeżeli z jest takim punktem, że $g^n(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, to

$$(**) \quad \exists_{N,1} \quad \forall_{n \geq N} \quad g^n(z) \in P_1''.$$

Przenieśmy tak zdefiniowane zbiory P_1'' przez sprzężenie z przekształceniem F w otoczenie punktu p i nazwijmy je P_1' .

Definicja 2.5. Zbiory P_1' $l = 0, 1, \dots, s - 1$ nazywamy małymi płatkami.

Wniosek 2.6. Każdy mały płatek ma własności

$$F(P_1') \subseteq P_1',$$

$$F^n|_{P_1'} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p.$$

Ponadto $p \in J(f)$ (patrz rozdział II, 1.15), i małe płatki są parami rozłączne (z konstrukcji). Każdy mały płatek jest zawarty w pewnej składowej regularnej C typu (2) (to znaczy takiej, że punkt graniczny należy do ∂C) o okresie 1 (Rys.2.8). Tę składową nazywać będziemy płatkami (dużym płatkami).

Lemat 2.7.

(a) Każda okresowa składowa C taka, że $f^n|_C \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} p \in \partial C$ (p jest punktem stałym neutralnym) jest dużym płatkami.

(b) W każdym dużym płatku C leży dokładnie jeden mały płatek P' i

$$C = \bigcup_{n=0}^{\infty} (F^{-n}(P'))^{\sim},$$

gdzie $(F^{-n}(P'))^{\sim}$ oznacza tę składową $F^{-n}(P')$ która zawiera P' .

Dowód. (a) Wynika to z własności (**) i wniosku 2.6.

Dowód. (b) Na mocy (**) istnieją l_1, \dots, l_r takie, że

$$C = \bigcup_{i=1}^r C_{l_i},$$

gdzie $C_{l_i} = \bigcup_{n=0}^{\infty} (F^{-n}(P'_{l_i}))^{\sim}$. Wystarczy brać składowe $(F^{-n}(P'_{l_i}))^{\sim}$ ponieważ: dla dowolnego $z \in C$ ze spójności C można połączyć z i $f(z)$ krzywą $\gamma \subseteq C$. Ponieważ $f^n(\gamma) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} p$ (p punkt neutralny wymierny — punkt graniczny rodziny $\{f^n|_C\}_{n=0}^{\infty}$). Zatem istnieje $M \geq 0$ takie, że $f^M(\gamma) \subseteq P'_{l_i}$ (mały płatek). Stąd $z \in \bigcup_{n=0}^M f^n(\gamma) \subseteq \bigcup_{n=0}^M (F^{-n}(P'_{l_i}))^{\sim}$. Zauważmy, że C_{l_i} są otwarte i parami rozłączne (patrz wniosek 2.6) i niepuste. Ponieważ C jest spójne, to $C = C_{l_i}$ dla pewnego i .

Opisaliśmy dynamikę $F = f^m$. Zbiór dużych płatków dla F rozkłada się na k trajektorii, każda o okresie m . Wynika to stąd, że duży płatek (dla F) pod działaniem f musi przejść na składową przyciąganą przez p , bo $F^n(C) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} p$ implikuje $F^n(f(C)) = f(F^n(C)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(p) = p$ ($f(p) = p$, $F = f^m$ patrz twierdzenie 2.4). Na mocy Lematu 2.7 punkt (a) ta składowa musi być dużym płatkami.

Długość okresu dużego płatka wynosi m , ponieważ jest równa długości okresu małego płatka w niej zawartego (lemat 2.7). Ten zaś ma okres równy m na mocy twierdzenia 2.4.

Otrzymujemy z (*) i wniosku 2.6 następujący wniosek:

Wniosek 2.8. Niech p będzie punktem neutralnym wymiernym stałym dla f . Zbiór składowych okresowych przyciąganych przez p jest zbiorem dużych płatków i są one składowymi regularnymi typu (2).

Wniosek 2.9. Z twierdzenia 2.4 wnioskujemy, że brzegi sąsiednich dużych płatków są styczne w punkcie p do siebie (i do odpychającego promienia). Z lematu 2.7 wnioskujemy,

że w szczelinach między płatkami nie ma składowych spójności $\hat{\mathbb{C}} \setminus J(f)$ przyciąganych do p i mających p w swoim brzegu. Za to są w tych szczelinach składowe przyciągane do p . Wynika to z gęstości $f^{-n}(P)$ w $J(f)$ (P duży płatek) z twierdzenia II.1.3.

Sumę dużych płatków będziemy nazywać kwiatkiem. Tę samą terminologię stosujemy, gdy p jest punktem neutralnym o okresie k niekoniecznie równym 1. Wtedy dla najmniejszego m takiego, że $(f^{km})'(p) = 1$ duże płatki są ułożone w trajektorie o długości km .

Dotychczas wiemy (korzystając z twierdzenia Sullivana, które udowodnimy w osobnym rozdziale), że każda składowa spójności uzupełnienia zbioru Julii $J(f)$ wpada w składową okresową. Składowe okresowe mogą być **dyskami Siegela** (wówczas wewnątrz znajduje się punkt neutralny niewymierny), **pierścieniami Hermana**, **basenami bezpośredniego przyciągania ścieków** (wówczas wewnątrz znajduje się ściek) lub **płatkami kwiatka wokół trajektorii punktu neutralnego wymiernego** (wówczas w brzegu znajduje się punkt neutralny wymierny).

Ponadto poza środkami dysków Siegela (które są punktami neutralnymi niewymiernymi) i ściekami nie ma innych punktów okresowych w uzupełnieniu zbioru $J(f)$. Udowodnimy później, że mogą istnieć punkty neutralne niewymierne nie leżące w dyskach Siegela (a więc należące do $J(f)$).

Z lematu II.2.1. wiemy, że każdy ściek ma swój basen przyciągania, a z twierdzenia 2.4 każdemu punktowi neutralnemu wymiernemu odpowiada kwiatek z płatkami będącymi składowymi uzupełnienia zbioru Julii.

IV Punkty krytyczne

1. Punkty krytyczne w składowych okresowych.

Zajmiemy się teraz problemem, czy w orbicie okresowej składowej spójności uzupełnienia zbioru Julii dokładnie, w sumie zbiorów jej okresowej orbity, musi leżeć punkt krytyczny. Udowodnimy, że basen bezpośredniego przyciągania orbity przyciągania dowolnego ścieku oraz orbita dowolnego płatka kwiatka mają tę własność. Ponieważ punktów krytycznych jest skończenie wiele, pozwoli nam to oszacować liczbę takich składowych.

Dla uproszczenia zapisu będziemy zazwyczaj zakładać, że okres składowej (którą oznaczamy C) jest 1, to znaczy

$$f(C) = C.$$

Jeżeli okres wynosi s , to znaczy

$$f^s(C) = C,$$

wówczas badamy f^s i jeżeli znajdziemy punkty krytyczny dla tego przekształcenia

$$(f^s)'(x) = 0,$$

to stąd mamy, że jeden z punktów $x, f(x), f^2(x), \dots, f^{s-1}(x)$ jest punktem krytycznym dla przekształcenia f .

Na początek przypomnimy znany fakt dotyczący funkcji holomorficzych (patrz Appendix).

Uwaga 1.1. Niech przekształcenie holomorficzne

$$f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$$

będzie stopnia $d \geq 1$. Wówczas f ma (licząc z krotnościami) dokładnie $2d - 2$ punktów krytycznych.

Stwierdzenie 1.2. Niech składowa C będzie basenem bezpośredniego przyciągania ścieku ($f(C) = C$). Wówczas w C leży punkt krytyczny.

Dowód. Z definicji mamy

$$C \subseteq \hat{\mathbb{C}} \setminus J(f)$$

więc

$$C \subseteq \hat{\mathbb{C}} \setminus \text{co najmniej trzy punkty}$$

i stąd mamy, że nakryciem uniwersalnym C jest dysk \mathbb{D} . Niech H będzie przekształceniem nakrywającym, a \tilde{f} podniesieniem f . Mamy wówczas

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{D} \\ H \downarrow & & \downarrow H \\ C & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

i \tilde{f} jest przekształceniem “na” (ponieważ f jest holomorficzne i “na” — patrz rozdział III, dowód lematu 1.2).

Gdyby f nie miała w C punktów krytycznych, to także \tilde{f} nie miałaby punktów krytycznych, czyli jako przekształcenie

$$\tilde{f} : \mathbb{D} \xrightarrow{\text{“na”}} \mathbb{D}$$

bez punktów krytycznych byłaby różnowartościowa, czyli byłaby automorfizmem. Automorfizmy dysku są jego izometriami (w metryce hiperbolicznej), więc nie mogłyby istnieć ścieki. Sprzeczność. ■

Wniosek 1.3. Ścieków jest skończenie wiele.

Dowód. Każdy ściek ma basen bezpośredniego przyciągania. W orbicie tego okresowego basenu jest punkt krytyczny przekształcenia f , a tych jest skończenie wiele. ■

Twierdzenie 1.4. Niech C będzie dużym płatkim “kwiatka” wokół punktu neutralnego. Wówczas orbita okresowa C zawiera punkt krytyczny.

Dowód. Załóżmy, że tak nie jest. Załóżmy, że $f(C) = C$. Tak jak w dowodzie stwierdzenia 1.2 nakryciem C jest dysk oraz podniesienie f przekształcenia f jest automorfizmem. Ponadto C jest postaci

$$C = \bigcup_{n=0}^{\infty} (f^{-n}(P'))^{\sim}$$

gdzie P' jest “małym płatkim”, a $(f^{-n}(P'))^{\sim}$ to składowa $f^{-n}(P')$ zawierająca P' . Składowa C jest jednospójna. Weźmy bowiem dowolną krzywą zamkniętą γ zawartą w C . Pod działaniem f^n (dla dostatecznie dużych n) obraz leży w P' , jest zatem ściągalny. Ponieważ $f|_C$ jest nakryciem (przypuściliśmy, że nie ma punktów krytycznych w C), krzywa γ jest zatem ściągalna w C . Zatem składowa C jest biholomorficznie równoważna przez przekształcenie biholomorficzne H dyskowi \mathbb{D} .

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{D} \\ H \downarrow & & \downarrow H \\ C & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

Założyliśmy, że f nie ma punktu krytycznego, więc także \tilde{f} nie ma. Stąd mamy, że \tilde{f} jest automorfizmem dysku. Mamy więc zdefiniowane $f^{-1}|_C$. Zbudujemy teraz w C dwie niezmiennicze krzywe τ_1 i τ_2 w następujący sposób. Wybierzmy dwa punkty q_1 i q_2 leżące po dwóch różnych stronach półprostej separującej (promienia przyciągającego) L (Rys.1.1). Niech γ_1 i γ_2 będą krzywymi łączącymi q_1 z $f(q_1)$ i q_2 z $f(q_2)$ odpowiednio. Niech

$$\begin{aligned} \tau_1 &:= \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} f^n|_C(\gamma_1) \\ \tau_2 &:= \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} f^n|_C(\gamma_2). \end{aligned}$$

Wówczas τ_1 i τ_2 są niezmiennicze i rozcinają C na trzy składowe o brzegach w C odpowiednio τ_1 , τ_2 , $\tau_1 \cup \tau_2$ (Rys.1.2). W \hat{C} dwa spośród tych obszarów (nazwijmy je A_1 , A_2) mają brzegi odpowiednio $\tau_1 \cup$ (*punkt neutralny*), $\tau_2 \cup$ (*punkt neutralny*). Korzystamy z obrazka topologicznego danego przez twierdzenie III.2.4.

Rozważymy przypadki.

\tilde{f} jest automorfizmem eliptycznym lub $\tilde{f} = \text{id}$. Wówczas wewnątrz C jest punkt stały, co jest niemożliwe ponieważ C jest płatkami “kwiatka” punktu neutralnego.

\tilde{f} jest automorfizmem parabolicznym lub hiperbolicznym. Wówczas krzywe

$$\tilde{\tau}_1 := H^{-1}(\tau_1) = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{f}^n(H^{-1}(\gamma_1))$$

$$\tilde{\tau}_2 := H^{-1}(\tau_2) = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{f}^n(H^{-1}(\gamma_2))$$

rozcinają \mathbb{D} na trzy obszary (Rys.1.3 i 1.4). Dwa z nich (\tilde{A}_1 , \tilde{A}_2) mają brzegi (w dysku otwartym \mathbb{D}) dokładnie $\tilde{\tau}_1$ i $\tilde{\tau}_2$. Zatem $H(\tilde{A}_1) = A_1$, $H(\tilde{A}_2) = A_2$. Brzeg \tilde{A}_1 lub \tilde{A}_2 (lub w przypadku hiperbolicznym oba) w $\text{cl } \mathbb{D}$ zawiera dodatkowo łuk zawarty w $\partial \mathbb{D}$. Jego obraz przy granicy radialnej przekształcenia H musiałby być punktem. To przeczy twierdzeniu Fatou, że obraz łuku przy granicy radialnej nie może być stały. ■

2. Punkty krytyczne w zbiorze Julii.

Zajmować się teraz będziemy zbiorem obrazów punktów krytycznych i udowodnimy szereg własności z nim związanych.

Definicja 2.1. Niech zbiór wszystkich punktów krytycznych będzie oznaczany Crit

$$\text{Crit} := \{z \in \hat{C} : f'(z) = 0\},$$

i domknięcie zbioru jego obrazów $\hat{\text{Crit}}$

$$\hat{\text{Crit}} := \text{cl} \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(\text{Crit}).$$

Twierdzenie 2.2. Rozważmy składową okresową o funkcjach granicznych nie stałych. Jak wiemy może to być tylko dysk Siegela (oznaczymy go S) lub pierścień Hermana (oznaczymy go H). Wówczas

$$\partial S, \partial H \subseteq \hat{\text{Crit}}.$$

Najpierw udowodnimy lemat.

Lemat 2.3. Niech U będzie jednospójnym zbiorem otwartym o następujących własnościach:

$$U \cap \hat{\text{Crit}} = \emptyset \ \& \ U \cap J(f) \neq \emptyset,$$

Wówczas rodzina $\{f_\nu^{-n}|_U\}_{n,\nu}$ po wszystkich gałęziach ν jest określone, normalne i mają one wyłącznie stałe funkcje graniczne.

Dowód lematu 2.3. $f_\nu^{-n}|_U$ są określone, ponieważ U jest jednospójny oraz $U \cap \hat{\text{Crit}} = \emptyset$. Rodziny te są normalne, gdyż omijają zbiór $\hat{\text{Crit}}$. To wystarczy, gdyż ma on co najmniej trzy punkty, z wyjątkiem przekształceń, które mają dwa punkty krytyczne (nie licząc krotności) i oba są stałe lub leżą na jednej trajektorii okresowej o okresie 2. Wówczas $f(z) = z^{\pm d}$ (lub holomorficznie z nim sprzężony), $J(f) = \{|z| = 1\}$ i $|f'|_{J(f)}| \equiv d$ więc rodziny przekształceń odwrotnych są normalne, o pochodnej dążącej do 0, czyli lemat także zachodzi.

Założmy, że istnieje gałąź ν , ciąg n_k i niestała funkcja g taka, że

$$f_\nu^{-n_k}|_U \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} g.$$

Wybermy dowolny punkt $z_0 \in U \cap J(f)$. Oznaczmy

$$z_{n_k} := f_\nu^{-n_k}(z_0) \ \& \ z_\infty := g(z_0)$$

(Rys.2.1), oczywiście z niezmienniczości i domkniętości zbioru $J(f)$ $z_{n_k}, z_\infty \in J(f)$. Niech V będzie otwartym otoczeniem z_∞ tak małym, żeby $\text{cl } V \subseteq g(U)$. Wówczas (dla dostatecznie dużych n_k) $f_\nu^{-n_k}(U) \supseteq V$ (Rys. 2.2) (twierdzenie Rouché — patrz rozdział III, dowód lematu 1.1), stąd $f^{n_k}(V) \subseteq U$, a więc ciąg $\{f^{n_k}|_V\}_{k=1}^\infty$ omija zbiór $\hat{\text{C}} \setminus U$ (dla n_k dostatecznie dużych), w szczególności $\hat{\text{Crit}}$. Stąd mamy że jest normalny, czyli ma podciągi zbieżne. Jest to sprzeczność, gdyż na żadnym otoczeniu punktu ze zbioru Julii ciąg f^n nie ma podciągów zbieżnych (patrz rozdział II wniosek 1.18), co kończy dowód lematu 2.3. ■

Dowód twierdzenia 2.2. Przeprowadzimy go dla dysku Siegela. W przypadku pierścienia Hermana jest on dokładnie taki sam. Będziemy zakładać, że okres S wynosi 1 (jeżeli okres wynosi s , to rozważamy f^s , co oczywiście wystarczy, ponieważ $\hat{\text{Crit}}$ jest wówczas mniejszym zbiorem).

Założmy, że tak nie jest, to znaczy istnieje zbiór otwarty U taki, że

$$U \cap \partial S \neq \emptyset \ \& \ U \cap \hat{\text{Crit}} = \emptyset.$$

Możemy zakładać, że U jest jednospójnym zbiorem.

Rozważmy rodzinę $\{f_\nu^{-n}|_U\}_{n,\nu}$. Na mocy lematu 2.3 jest ona określona, normalna i ma jedynie stałe funkcje graniczne. Jednocześnie na S przekształcenie jest obrotem, więc istnieje ciąg gałęzi $f_\nu^{-n_k}|_U$ taki, że

$$f_\nu^{-n_k}|_{U \cap S} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \text{id}.$$

Sprzeczność. ■

Wniosek 2.4. Dla dowolnego dysku Siegela S (lub pierścienia Hermana H) zachodzi

$$\omega(\text{Crit}) \supseteq \partial S,$$

gdzie $\omega(\text{Crit}) := \bigcap_{n=0}^{\infty} \text{cl} \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} (f^n \text{Crit}) \right)$.

Dowód. Jeżeli istnieje $x \in \partial S$ takie, że $x \in \hat{\text{Crit}} \setminus \omega(\text{Crit})$, to istnieje otoczenie otwarte $U \ni x$ i

$$\exists_{N \geq 0} \bigcup_{n=N}^{\infty} f^n(\text{Crit}) \cap U = \emptyset.$$

Ponieważ zbiór $\bigcup_{n=0}^N f^n(\text{Crit})$ jest skończony, to z twierdzenia 2.2 otrzymujemy, że x jest izolowanym punktem zbioru ∂S . Weźmy dostatecznie mały dysk $V := \{z : |z - x| < \delta\}$. Ponieważ $(V \setminus \{x\}) \cap \partial S = \emptyset$, to albo $V \cap S = \emptyset$, co nie jest możliwe, ponieważ $x \in \partial S$, albo $V \subseteq S \cup \{x\}$ i wówczas x jest izolowanym punktem zbioru $J(f)$. Sprzeczność. ■

Kolejna własność będzie związana z rozciąganiem. Przypomnijmy definicję rozciągania (expandingu).

Definicja 2.5. Niech K będzie dowolnym podzbiorem $\hat{\mathbb{C}}$.

$$f \text{ jest expandingiem na } K \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists_N \forall_{z \in K} |(f^N)'(z)| > 1.$$

Możemy teraz sformułować twierdzenie.

Twierdzenie 2.6.

$$f \text{ jest expandingiem na } J(f) \iff \hat{\text{Crit}} \cap J(f) = \emptyset.$$

Dowód.

“ \Rightarrow ”

Ponieważ f na $J(f)$ ma własność “expandingu”, to mamy

$$\text{Crit} \cap J(f) = \emptyset.$$

Z własności “expandingu” wynika istnienie $N > 0$ i otoczenia U zbioru $J(f)$ postaci $U = \{z \in \hat{\mathbb{C}} : \text{dist}(z, J(f)) < \delta\}$, $\delta > 0$, $U \cap \left(\bigcup_{i=0}^N f^i(\text{Crit}) \right) = \emptyset$ takich, że

$$(*) \quad \forall_{z \in U} |(f^N)'(z)| \geq \text{const} > 1.$$

Można założyć, że U jest na tyle małe, że jeśli $z \in \hat{\mathbb{C}}$, $w \in U$ i $f^N(z) = w$, to istnieje dobrze zdefiniowana gałąź f_v^{-N} na dysku

$$D_z := \{x : \text{dist}(x, z) < 2 \text{dist}(z, J(f))\}$$

taka, że $f_\nu^{-N}(w) = z$. Przypuśćmy, że istnieje $x \in \hat{\text{Crit}} \setminus J(f)$ i $f^{n_k}(x) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} J(f)$. Niech M będzie najmniejszą liczbą taką, że $f^M(x) \in U$. Wtedy istnieje gałąź f_ν^{-N} na $D_{f^M(x)}$ taka, że

$$f_\nu^{-N}(f^M(x)) = f^{M-N}(x).$$

Wnioskujemy przy pomocy (*), korzystając z tego, że $D_{f^M(x)} \cap J(f) \neq \emptyset$ i z niezmienniczości $J(f)$, że

$$\text{dist}(f^{M-N}(x), J(f)) < \text{dist}(f^M(x), J(f)),$$

czyli $f^{M-N}(x) \in U$. Sprzeczność. \square

Można podać krótki dowód implikacji “ \Rightarrow ” inny niż powyższy, wykorzystujący jednak klasyfikację składowych $\hat{\text{C}} \setminus J(f)$ (w szczególności twierdzenie Sullivana):

Rozważmy $x \in \text{Crit}$. Ponieważ $x \notin J(f)$ (gdyż $\text{Crit} \cap J(f) = \emptyset$), to x wpada w składową okresową zbioru $\hat{\text{C}} \setminus J(f)$. Rozważmy przypadki:

x wpada w dysk Siegela lub pierścień Hermana lub basen ścieku. Wówczas $f^{n_k}(x)$ nie dąży do brzegu i

$$f^{n_k}(x) \not\rightarrow J(f);$$

x wpada w kwiatek. Środek kwiatka, punkt neutralny p należy do $J(f)$. Czyli istnieje k takie, że

$$f^k(p) = p \ \& \ |(f^k)'(p)| = 1.$$

Z założenia, że f jest expandingiem na $J(f)$ mamy, że dla pewnego n $|(f^n)'(p)| > 1$. Stąd sprzeczność, bo jednocześnie $|(f^{n_k})'(p)| = 1$. Ponieważ zbiór Crit jest skończony otrzymujemy, że $\hat{\text{Crit}} \cap J(f) = \emptyset$. \square

“ \Leftarrow ”

Zakładamy, że

$$\hat{\text{Crit}} \cap J(f) = \emptyset.$$

Wówczas istnieje pokrycie otwarte zbiorami jednorodnymi $\{U_i\}$ otoczenia zbioru $J(f)$ (bo $J(f)$ to zbiór zwarty) takie, że

$$U_i \cap \hat{\text{Crit}} = \emptyset.$$

Korzystając z lematu 2.3. wiemy, że rodziny $\{f_\nu^{-n}|_{U_i}\}_{n,\nu}$ są określone, normalne i mają wyłącznie stałe funkcje graniczne. Załóżmy, że $f|_{J(f)}$ nie jest expandingiem czyli

$$\forall_n \ \exists_{\tilde{z}_n \in J(f)} \quad |(f^n)'(\tilde{z}_n)| \leq 1.$$

Oznaczmy

$$z_n := f^n(\tilde{z}_n),$$

wówczas dzięki zwartości $J(f)$ wiemy, że istnieje podciąg n_k i punkt $z_\infty \in J(f)$ taki, że

$$z_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} z_\infty$$

(Rys.2.3). Wówczas $z_\infty \in U_j$ (dla pewnego j) i będziemy rozpatrywać $f_\nu^{-n_k}|_{U_j}$, po takich gałęziach, że $f_\nu^{-n_k}|_{U_j}(z_{n_k}) = \tilde{z}_{n_k}$ dla k tak dużych, że $z_{n_k} \in U_j$. Z lematu 2.3 wiemy, że

ciąg $\{f_\nu^{-n_k}|_{U_j}\}_{k=1}^\infty$ jest normalny i ma tylko stałe funkcje graniczne, czyli można zakładać, że jest zbieżny i

$$|(f_\nu^{-n_k}|_{U_j})'| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0.$$

Jednocześnie, z definicji punktów z_{n_k} mamy

$$|(f_\nu^{-n_k}|_{U_j})'(z_{n_k})| = \frac{1}{|(f^{n_k})'(\tilde{z}_{n_k})|} \geq 1$$

czyli sprzeczność, co kończy dowód twierdzenia. ■

Na koniec przedstawimy jeszcze jedną własność zbioru $\hat{\text{Crit}}$.

Twierdzenie 2.7. *Niech p będzie punktem neutralnym dla przekształcenia f , to znaczy istnieje k takie, że*

$$f^k(p) = p \ \& \ |(f^k)'(p)| = 1.$$

Ponadto założmy, że p nie jest środkiem dysku Siegela. Wówczas

$$p \in \hat{\text{Crit}}.$$

Uwaga 2.8. *Jeżeli p jest punktem neutralnym wymiernym, to dowód twierdzenia jest bardzo prosty. Mianowicie w każdym płatk kwiatka leży punkt krytyczny oraz $f^n|_{\text{płatek}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} p$ więc $p \in \hat{\text{Crit}}$.*

Dowód twierdzenia 2.7. Ponieważ p nie jest środkiem dysku Siegela, to $p \in J(f)$. Założmy, że nie jest spełniona teza, to znaczy że istnieje zbiór otwarty U taki, że

$$p \in U \ \& \ U \cap \hat{\text{Crit}} = \emptyset.$$

Wówczas można zdefiniować rodzinę przekształceń $\{f_\nu^{-nk}|_U\}_{n=1}^\infty$, gdzie ν jest gałęzią taką, że

$$f_\nu^{-nk}(p) = p.$$

Mamy wówczas

$$|(f_\nu^{-nk})'(p)| = 1.$$

Jak wynika z Lematu 2.6, rodzina $\{f_\nu^{-nk}|_U\}_{n=1}^\infty$ jest normalna i ma tylko stałe funkcje graniczne. Jeżeli jednak

$$f_\nu^{-nk}|_U \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \text{const}$$

to

$$(f_\nu^{-nk}|_U)' \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Otrzymaliśmy więc sprzeczność, gdyż $|(f_\nu^{-nk})'(p)| = 1$. ■

Jako ćwiczenie pozostawiamy czytelnikowi udowodnienie silniejszej tezy:

$$p \in \omega(\text{Crit}).$$

V. Punkty neutralne.

Dotychczas udowodniliśmy już szereg własności punktów okresowych. W naturalny sposób dzielą się one na ścieki, punkty neutralne i źródła. Wiemy, że ścieków jest skończenie wiele, gdyż z każdym ściekiem związany jest jego basen przyciągania, a w nim musi leżeć punkt krytyczny, a tych jest skończenie wiele. Z analogicznych przyczyn skończenie wiele jest punktów neutralnych wymiernych. Wiemy także, że punktów okresowych jest nieskończenie wiele, gdyż są one gęste w zbiorze Julii $J(f)$. Korzystaliśmy już z faktu, że punktów neutralnych (wszystkich) jest skończenie wiele. Dowód tej własności jest dość obszerny i dlatego poświęcamy mu oddzielny rozdział. Udowodnimy tu nawet pewną mocniejszą własność, a mianowicie oszacowania ilości różnych punktów okresowych.

Na początek wprowadzimy szereg oznaczeń. Jeżeli będą występować różne przekształcenia, to oznaczenia te będziemy uzupełniać dodatkowymi indeksami.

n_a := liczba trajektorii (orbit) okresowych ścieków.

n_p := liczba trajektorii punktów neutralnych wymiernych (orbit "kwiatków").

\hat{n}_p := liczba trajektorii płatków (w orbicie "kwiatka" może być kilka trajektorii płatków).

n_{irr} := liczba trajektorii (orbit) punktów neutralnych niewymiernych.

Badane przekształcenie oznaczamy f , a jego stopień d

$$d := \deg(f).$$

Dowodzić będziemy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1.

$$(1) \quad n_a + \frac{1}{2}(n_p + n_{\text{irr}}) \leq 2d - 2.$$

$$(2) \quad n_a + \hat{n}_p \leq 2d - 2.$$

W następnych rozdziałach udowodnimy silniejsze oszacowania, dotyczące także ilości dysków Siegela i pierścieni Hermana.

Uwaga 2. W dowodzie skorzystamy z własności dowiedzionych w §1 rozdziału IV. Nie prowadzi to do pętli logicznej, gdyż dowodzonej własności ("punktów neutralnych jest skończenie wiele") używaliśmy dotychczas tylko w rozdziale II punkty 1.17 i 1.18, z których korzystaliśmy tylko w rozdziale IV §2.

Uwaga 3. Nierówność (2) jest bardzo prosta, ale jej dowód pokazuje drogę dowodu nierówności (1).

Przypomnijmy na początek prosty fakt dotyczące funkcji wymiernych.

Uwaga 4. Jeżeli f jest przekształceniem

$$f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$$

wymiernym, stopnia $d \geq 2$, to ma (licząc z krotnościami) dokładnie $2d - 2$ punktów krytycznych.

Idea dowodu twierdzenia 1 opiera się na szacowaniu ilości odpowiednich trajektorii ilością punktów krytycznych. W przypadku nierówności (2) jest to bardzo proste.

Dowód twierdzenia 1, nierówność (2).

Każdej trajektorii ścieku odpowiada trajektoria jego basenu przyciągania, a w niej leży punkt krytyczny (patrz rozdział “Punkty krytyczne”). Analogicznie w trajektorii płatka leży punkt krytyczny. Tak więc

$$n_a + \hat{n}_p \leq \text{liczba punktów krytycznych} = 2d - 2$$

co kończy dowód (2). ■

Dowód twierdzenia 1, nierówność (1).

Ustalmy dowolną liczbę naturalną k . Rozważmy punkty okresowe o okresie nie większym niż k . Oznaczmy

$$N := \text{liczba trajektorii punktów neutralnych o okresie nie większym niż } k.$$

Udowodnimy następującą nierówność:

$$n_a + \frac{1}{2}N \leq 2d - 2.$$

Oczywiście to wystarczy do dowodu (2), gdyż z dowolności k otrzymujemy

$$n_a + \frac{1}{2} (\text{liczba trajektorii punktów neutralnych}) \leq 2d - 2.$$

Mówiąc dalej o punktach neutralnych zawsze będziemy mieli na myśli punkty neutralne o okresie nie większym niż nasze ustalone k .

Dalsza droga dowodu będzie następująca. Znajdziemy przekształcenie g będące małym zaburzeniem przekształcenia f , o następujących własnościach:

g będzie przekształceniem wymiernym;

g będzie tak małym zaburzeniem f , że $\deg(g) = \deg(f)$;

zaburzenie będzie dostatecznie małe, aby liczba ścieków nie zmalała (jest ich skończenie wiele i są punktami przyciągającymi, więc przy dostatecznie małym zaburzeniu blisko orbity ścieku dla f istnieje orbita ścieku dla g);

co najmniej połowa orbit okresowych punktów neutralnych zamieni się na leżące blisko nich orbity ścieków dla g .

Oczywiście cała trudność tkwi w ostatnim warunku. Wówczas będzie zachodziło

$$n_{a,f} + \frac{1}{2}N \leq n_{a,g} \quad \& \quad n_{a,g} \leq 2d - 2,$$

i w ten sposób dowód będzie zakończony. Problem sprowadza się więc do znalezienia takiego g .

Przechodzimy do konstrukcji przekształcenia g . f jest przekształceniem wymiernym stopnia d , więc

$$f(z) = \frac{\tilde{P}(z)}{\tilde{Q}(z)},$$

gdzie \tilde{P} i \tilde{Q} są wielomianami, z których jeden jest stopnia d , a drugi stopnia nie większego niż d (ponieważ $\deg(f) = d$). Dalej będziemy zakładać, że $\deg(\tilde{P}) = d$ i $\deg(\tilde{Q}) \leq d$. Jeśli jest odwrotnie, to pojawiające się w dalszej konstrukcji przekształcenie $z \mapsto z^d$ należy zastąpić przekształceniem $z \mapsto \frac{1}{z^d}$. Możemy więc zapisać:

$$f(z) = \gamma \frac{P(z)}{Q(z)},$$

gdzie $\gamma \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ oraz

$$\begin{aligned} P(z) &= (z - \alpha_1) \dots (z - \alpha_d), \\ Q(z) &= (z - \beta_1) \dots (z - \beta_c), \end{aligned}$$

gdzie $0 \leq c \leq d$ oraz $\alpha_s \neq \beta_t$ (ponieważ $\frac{P}{Q}$ ma być nieskracalne). Skonstruujemy teraz rodzinę przekształceń f_λ parametryzowaną parametrem $\lambda \in \hat{\mathbb{C}}$, taką by dla $\lambda \in [0, 1] \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ zachodziło:

$$\begin{aligned} f_\lambda &\text{ są przekształceniami stopnia } d, \\ f_\lambda(z) &\text{ analitycznie zależy od } (\lambda, z), \\ f_0 &= f \quad \& \quad f_1(z) = \tau z^d \text{ dla pewnego } \tau \in \mathbb{C}, |\tau| = 1. \end{aligned}$$

Rodzinę zdefiniujemy w następujący sposób: niech

$$f_\lambda(z) = \gamma_\lambda \frac{P_\lambda(z)}{Q_\lambda(z)},$$

gdzie

$$P_\lambda(z) := (z - (1 - \lambda)\alpha_1) \dots (z - (1 - \lambda)\alpha_d),$$

czyli dla λ przebiegających odcinek $[0, 1]$ jest to ściągnięcie pierwiastków $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ po promieniach do punktu 0 (Rys. 1);

$$Q_\lambda(z) := ((z - \beta_1)(1 - \lambda) - \xi_1 \lambda) \dots ((z - \beta_c)(1 - \lambda) - \xi_c \lambda),$$

gdzie warunki na współczynniki ξ_j wynikną z dalszej konstrukcji. Można zapisać Q_λ jako

$$Q_\lambda(z) := (1 - \lambda)^c \left(z - \left(\beta_1 + \frac{\lambda}{1 - \lambda} \xi_1 \right) \right) \dots \left(z - \left(\beta_c + \frac{\lambda}{1 - \lambda} \xi_c \right) \right),$$

czyli dla λ przebiegających odcinek $[0, 1]$ jest to przesunięcie pierwiastków β_1, \dots, β_c w kierunkach (odpowiednio) ξ_1, \dots, ξ_c do punktu ∞ (Rys.2). Ponadto

$$\gamma_\lambda := (1 - \lambda)\gamma + \lambda(-1)^c \xi_1 \dots \xi_c \tau$$

i wówczas

$$f_1(z) = (-1)^c \xi_1 \dots \xi_c \tau \frac{z^d}{(-\xi_1) \dots (-\xi_c)} = \tau z^d.$$

Współczynnik τ ($|\tau| = 1$) trzeba dodać, gdyż jeżeli γ oraz $(-1)^c \xi_1 \dots \xi_c$ leżałyby po dwóch stronach punktu 0 (na pewnej prostej przechodzącej przez punkt 0), to dla pewnego $\lambda \in [0, 1]$

$$(1 - \lambda)\gamma + \lambda(-1)^c \xi_1 \dots \xi_c = 0.$$

Tak więc aby przekształcenie f_λ było stopnia d , trzeba mnożnikiem τ (dobranym do ξ_1, \dots, ξ_c) zlikwidować tę współliniowość (Rys.3).

Jedynym problemem pozostaje sprawdzenie, czy spełniony jest warunek

$$\forall \lambda \in [0, 1] \quad \deg(f) = d,$$

czyli czy pierwiastki wielomianów P_λ i Q_λ nie pokrywają się. Z założenia $\alpha_s \neq \beta_t$ oraz dla $\lambda \in [0, 1]$ następuje ściągnięcie pierwiastków wielomianu P_λ po promieniach (Rys. 1). Wystarczy więc żądać, by dla dowolnego $\lambda \in (0, 1]$ pierwiastki wielomianu Q_λ leżały poza tymi promieniami. W tym celu wystarczy wziąć współczynnik ξ_j taki by $|\xi_j| = 1$ oraz półprosta $\beta_j + \frac{\lambda}{1-\lambda} \xi_j$, $\lambda \in (0, 1]$, była rozłączna z promieniami łączącymi punkty α_t z punktem 0 (Rys. 4). Wówczas pierwiastki nie pokrywają się oraz

$$\deg(f_\lambda) = d.$$

Oczywiście dla dostatecznie małego otoczenia Ω (w $\hat{\mathbb{C}}$) odcinka $[0, 1]$ własności te zachowują się, to znaczy dla dowolnego $\lambda \in \Omega$ zachodzi:

$$\deg(f_\lambda) = d, \quad f_0 = f, \quad f_1 = \tau z^d.$$

Ponadto $f_\lambda(z)$ analitycznie zależy od każdej zmiennej (λ i z) z osobna, oraz dla każdego $(\lambda_0, z_0) \in \Omega \times \hat{\mathbb{C}}$ bądź $Q_{\lambda_0}(z_0)$, bądź $\gamma_{\lambda_0} P_{\lambda_0}(z_0)$ jest różne od zera, a więc w otoczeniu punktu (λ_0, z_0) przekształcenie (zmiennych λ i z) $f_\lambda(z)$ lub $\frac{1}{f_\lambda(z)}$ jest ciągle. Stąd $f_\lambda(z)$ jako przekształcenie $\Omega \times \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ jest ciągle, a więc analitycznie zależy od pary zmiennych (λ, z) (twierdzenie Hartogsa).

Zaburzenia g będziemy szukać jako przekształcenia f_λ , dla λ dostatecznie bliskiego 0.

Ustalmy na razie $i \leq k$ i zdefiniujmy zbiór M_i :

$$M_i := \{(\lambda, z) \in \Omega \times \hat{\mathbb{C}} : f_\lambda^i(z) = z\},$$

oraz przekształcenie $F(\lambda, z)$

$$F : \Omega \times \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$$

wzorem

$$F(\lambda, z) := f_\lambda^i(z) - z.$$

Wówczas M_i jest zbiorem punktów zerowych funkcji F .

Niech z_1, \dots, z_m będą wszystkimi rozwiązaniami równania

$$F(0, z) = 0$$

spełniającymi warunek

$$|(f_0^i)'(z_j)| = 1,$$

czyli wszystkimi punktami neutralnymi o okresie i przekształcenia $f_0 = f$.

Chcielibyśmy teraz w otoczeniu punktów $(0, z_j) \in \Omega \times \hat{\mathbb{C}}$ rozwikłać równanie $F(\lambda, z) = 0$, to znaczy przedstawić M_i (w otoczeniu $(0, z_j)$) jako wykres przekształcenia $z_j(\lambda)$. Nie zawsze jest to możliwe, ponieważ nie zawsze $\frac{\partial F(0, z_j)}{\partial z} \neq 0$. Ta pochodna jest równa 0 dokładnie wtedy, gdy $(f_0^i)'(z_j) = 1$. Wówczas M_i przedstawiamy jako powierzchnię parametryzowaną przez pierwiastek z z λ , to znaczy $M_i \ni (\lambda, z) = (\mu^p, z(\mu))$ dla pewnych $p \geq 1$.

Zastosujemy w tym celu kilka twierdzeń. Będziemy się opierać na książce Łojasiewicza “Wstęp do geometrii analitycznej zespolonej” ([Ł]), w której czytelnik znajdzie dokładne dowody.

Założmy, że funkcja $H(\lambda, z)$ jest holomorphyzna w otoczeniu punktu $0 \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, $H(0, 0) = 0$ oraz $H(0, z)$ nie jest stała. Wówczas $H(\lambda, z)$ można rozłożyć na:

$$H(\lambda, z) = H_1 \cdots \cdots H_r,$$

gdzie H_s ($s = 1, \dots, r$) są holomorphyzne, $H_s(0, 0) = 0$. Każdy czynnik H_s jest nierozkładalny, to znaczy H_s nie może być przedstawione jako iloczyn dwóch funkcji o powyższych własnościach (nie zakładamy, że $H_i \neq H_j$) (patrz [Ł], I, §2). Z tego, że $H_s(0, 0) = 0$ i $H_s(0, z)$ nie jest stała, wynika, że istnieje $p_s > 0$ i funkcja holomorphyzna $c_s(z)$, $c_s(0) \neq 0$, takie, że $H_s(0, z) = c_s(z)z^{p_s}$. Funkcję H_s nazywamy z -regularną rzędu p_s .

Twierdzenie przygotowawcze Weierstrassa. ([Ł], str.88) *Jeżeli funkcja $H(\lambda, z)$ holomorphyzna w otoczeniu zera w $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ jest z -regularna rzędu p wówczas*

$$H = h \cdot G,$$

gdzie h jest holomorphyzna, stale różna od zera, a G jest wielomianem unitarnym względem z stopnia p (to znaczy $G(\lambda, z) = z^p + a_{p-1}(\lambda)z^{p-1} + \dots + a_0(\lambda)$ dla pewnych a_0, \dots, a_{p-1} funkcji holomorphyznych zmiennej λ).

Zauważmy, że H jest nierozkładalne wtedy i tylko wtedy, gdy G jest nierozkładalne.

Stwierdzenie. ([Ł], str.29) *Jeżeli H jest nierozkładalny w otoczeniu zera, to pierwiastki wielomianu $z \mapsto H(\lambda, z)$ (dla każdego λ dostatecznie bliskiego 0, ale $\lambda \neq 0$) są jednokrotne.*

Stąd dość łatwo wynika:

Twierdzenie Puiseux. ([Ł], str. 133) Niech $G(\lambda, z)$ będzie wielomianem względem z , unitarnym, stopnia p o współczynnikach holomorficznym w otoczeniu zera, nierozkładalnym, to istnieje funkcja holomorficzna w kole $\{|z| < \delta\}$ g taka, że

$$G(\lambda, z) = \prod_{\mu: \mu^p = \lambda} (z - g(\mu)).$$

Uwaga. W przypadku gdy $p = 1$ (wówczas $\frac{\partial G(0,0)}{\partial z} \neq 0$) twierdzenie Puiseux jest twierdzeniem o funkcji uwikłanej.

Wniosek 5. Dla funkcji holomorficznnej $H(\lambda, z)$ takiej, że $H(0, z)$ nie jest stała, rozważmy zbiór $M := \{(\lambda, z) : H(\lambda, z) = 0\}$. Wówczas zbiór (oznaczymy go M') punktów $(\lambda, z) \in M$ takich, że w dowolnie małym ich otoczeniu M nie daje się przedstawić jako wykres funkcji $z(\lambda)$, jest zbiorem punktów izolowanych.

Dowód. Weźmy $(\lambda_0, z_0) \in M'$. Rozłóżmy H na czynniki nierozkładalne. Wówczas na mocy twierdzeń Weierstrassa i Puiseux mamy

$$H = h \cdot G_1 \cdot \dots \cdot G_r,$$

gdzie h holomorficzna stała różna od zera, $G_s(\lambda, z) = \prod_{\mu: \mu^{p_s} = \lambda} (z - g_s(\mu))$, gdzie $s = 1, \dots, r$, $p_s \geq 1$, g_s holomorficzne. Wówczas (λ, z) (z otoczenia (λ_0, z_0)) należy do M' tylko wtedy, gdy istnieje przeszkoda w rozwikłaniu, to znaczy dla pewnych $1 \leq s < k \leq r$

$$g_s(\mu_1) = g_k(\mu_2) = z \quad \text{dla} \quad \mu_1, \mu_2 : \mu_1^{p_s} = \mu_2^{p_k} = \lambda.$$

(Ze Stwierdzenia po Twierdzeniu Weierstrassa.) To oznacza, że $\hat{g}_s(\mu) = \hat{g}_k(\mu)$ dla $\mu : \mu^{p_s p_k} = \lambda$, gdzie $\hat{g}_s(\mu) := g_s(\mu^{p_s})$, $\hat{g}_k(\mu) := g_k(\mu^{p_k})$. Równość $\hat{g}_s(\mu) = \hat{g}_k(\mu)$ może zachodzić w izolowanych punktach chyba, że $\hat{g}_s \equiv \hat{g}_k$ i wtedy $G_s \equiv G_k$ i nie ma przeszkody w rozwikłaniu. ■

Przechodzimy do naszej konkretnej sytuacji. Zauważmy, że dla każdego punktu $(\lambda_0, z_0) \in M_i$ $F(\lambda_0, z)$ nie jest stała, gdyż oznaczałoby to, że $f_{\lambda_0}^i(z) - z$ jest stała, czyli $f_{\lambda_0}^i(z) = z + \xi$ (dla pewnego ξ). Jest to niemożliwe, ponieważ $\deg(f_{\lambda_0}) = \deg(f) = d \geq 2$.

Wniosek 6. Dla dowolnego $(\lambda_0, z_0) \in M_i$ dokonujemy rozkładu F na czynniki nierozkładalne, stosujemy twierdzenia Weierstrassa i Puiseux, otrzymujemy (w otoczeniu (λ_0, z_0))

$$F = h \cdot G_1 \cdot \dots \cdot G_r \quad \& \quad G_s(\lambda, z) = \prod_{\mu: \mu^{p_s} = \lambda} (z - g(\mu)),$$

gdzie h holomorficzne stałe różne od zera, $s = 1, \dots, r$, g_s holomorficzne. Stąd w otoczeniu $(\lambda_0, z_0) \in M_i$

$$\{(\lambda, z) : F(\lambda, z) = 0\} = \bigcup_{s=1}^r \bigcup_{\mu: \mu^{p_s} = \lambda} \{(\lambda, z) : \lambda = \lambda_0 + \mu^{p_s}, z = g_s(\mu)\}.$$

Poszczególne elementy sumy zbiorów mogą się nawet pokrywać, w przypadku gdy $G_s = G_k$.

Zastosujemy teraz wniosek 6 do punktów $(0, z_j)$ ($j = 1, \dots, m$), gdzie z_j są wszystkimi punktami neutralnymi o okresie i przekształcenia f_0 . Otrzymujemy, że w otoczeniu każdego punktu $(0, z_j) \in \Omega \times \hat{\mathbb{C}}$ istnieją przekształcenia holomorfczne $g_{j,s}$ ($s = 1, \dots, r_j$), i wykładniki $p_{j,s} \geq 1$ takie, że dla μ z dostatecznie małego otoczenia 0 i (λ, z) z otoczenia $(0, z_j)$

$$(\lambda, z) \in M_i \iff \exists_{\mu,s} \lambda = \mu^{p_{j,s}} \ \& \ z = g_{j,s}(\mu)$$

Inaczej mówiąc dla λ z otoczenia 0 zbiór wszystkich punktów okresowych o okresie i przekształcenia f_λ powstałych z zaburzenia punktu z_j , to zbiór

$$N_{j,s} := \{(\lambda, g_{j,s}(\mu)) : s = 1, \dots, r_j, \mu^{p_{j,s}} = \lambda\}.$$

Zdefiniujemy teraz funkcję, która charakteryzować będzie, jakiego typu są to punkty. Niech przekształcenie $\eta(\lambda, z)$

$$\eta : \Omega \times \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$$

będzie dane wzorem

$$\eta(\lambda, z) := (f_\lambda^i)'(z).$$

Ograniczając się do M_i , w otoczeniu punktów $(0, z_j)$ przedstawiamy ją jako rodzinę funkcji parametru μ

$$\eta_{j,s}(\mu) := \eta(\mu^{p_{j,s}}, g_{j,s}(\mu^{p_{j,s}})), \quad \text{gdzie } s = 1, \dots, r_j,$$

a to z kolei rozwijamy

$$\eta_{j,s}(\mu) = (f_0^i)'(z_j) + a_{\nu_{j,s}} \mu^{\nu_{j,s}} + \dots$$

Przypomnijmy, że ponieważ z_j jest punktem neutralnym, to $|(f_0^i)'(z_j)| = 1$.

Tutaj $a_{\nu_{j,s}}$ jest pierwszym niezerowym współczynnikiem Taylora. Takie a_ν (dla każdych j, s — dla uproszczenia zapisu pomijamy indeksy j, s) istnieje, bo zachodzi następujący lemat.

Lemat 6. *Istnieje a_ν takie, że $a_\nu \neq 0$.*

Dowód lematu 6. Załóżmy, że tak nie jest. Wówczas

$$\eta(\mu) \equiv (f_0^i)'(z_j)$$

dla μ z otoczenia punktu 0. Rozważmy zbiór $\Omega_0 := \Omega \setminus \{\lambda \in \Omega : \text{istnieje } z \in \hat{\mathbb{C}} \text{ takie, że w punkcie } (\lambda, z) \in M_i \text{ nie ma rozwikłania } z(\lambda)\}$. Zbiór usuniętych punktów jest zbiorem punktów izolowanych (wniosek 5). Zatem Ω_0 jest spójny i istnieje rozwikłanie, to znaczy istnieje funkcja $\varphi : \Omega_0 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ taka, że wykres φ jest otwartym (w M_i) podzbiorem M_i oraz taka, że zbiór $(\text{id}, \varphi)(\Omega_0) = \{(\lambda, \varphi(\lambda)) : \lambda \in \Omega_0\}$ zawiera punkty dowolnie blisko $(0, z_j)$ należące do $N_{j,s}$.

Ponadto $1 \in \Omega_0$, bo dla $\lambda = 1$ $f_1(z_0 = \tau z^d$ i punktami okresowymi są tylko ścieki i źródła.

Ale dla λ bliskich 0 mamy $|(f_\lambda^i)'(\varphi(\lambda))| = |(f_0^i)'(z_j)| = 1$ (ponieważ $\eta(\mu)$ jest stała w otoczeniu 0). Zatem $|(f_\lambda^i)'(\varphi(\lambda))| \equiv 1$ na całym Ω_0 w szczególności dla $\lambda = 1$. Sprzeczność. ■

Powracamy do dowodu twierdzenia.

Z definicji przekształcenia $\eta_{j,s}(\mu)$ mamy: jeżeli dla pewnego μ (z otoczenia punktu 0) zachodzi

$$|\eta_{j,s}(\mu)| < 1,$$

wówczas punkt $g_{j,s}(\mu)$ jest ściekiem dla przekształcenia f_λ (gdzie $\lambda = \mu^{p_{j,s}}$) powstałym z punktu neutralnego z_j przekształcenia f_0 .

Dotychczas konstrukcję prowadziliśmy dla punktów neutralnych o okresie i . Z dowolności $1 \leq i \leq k$ uzyskujemy funkcję η dla wszystkich punktów neutralnych (o okresach nie większych niż k). Wprowadźmy oznaczenia:

Wybermy z_1, \dots, z_M po jednym punkcie z każdej orbity punktu neutralnego o okresie nie większym niż k ,

$\{\eta_{1,s}\}_{s=1}^{r_1}, \dots, \{\eta_{M,s}\}_{s=1}^{r_M}$ odpowiadające tym punktom funkcje (każdemu punktowi odpowiada rodzina funkcji). Zastąpmy teraz parametr μ wspólnym parametrem ζ , gdyż dotychczas dla różnych funkcji to samo μ odpowiada różnym wartościom λ ($\lambda = \mu^{p_{j,s}}$):

Niech

$$p := \prod_{j=1}^M \prod_{s=1}^{r_j} p_{j,s}, \quad \hat{\eta}_{j,s}(\zeta) := \eta_{j,s}(\zeta^{p/p_{j,s}}) \quad \& \quad \lambda = \zeta^p$$

to znaczy $\zeta^{p/p_{j,s}} = \mu$.

Nasze zadanie sprowadza się do tego, by znaleźć ζ takie, żeby nie mniej niż $\frac{M}{2}$ spośród punktów z_1, \dots, z_M stało się ściekami, czyli ζ takiego, by dla nie mniej niż $\frac{M}{2}$ spośród $j = 1, \dots, M$ istniało $s = 1, \dots, r_j$ takie, by

$$|\hat{\eta}_{j,s}(\zeta)| = |(f_0^{i_j})'(z_j) + a_{\hat{\nu}_{j,s}}(\zeta)^{\hat{\nu}_{j,s}} + \dots| < 1,$$

gdzie i_j to okres punktu z_j .

W tym celu wybierzmy dla każdego j jedno s . Obiekty, które będą się dalej pojawiać, będą właśnie z tym indeksem s , będziemy go opuszczać.

Ponieważ ζ ma być dowolnie blisko 0, wystarczy dobrać ζ tak małe, by dla nie mniej niż połowy spośród $j = 1, 2, \dots, M$

$$|(f_0^{i_j})'(z_j) + a_{\hat{\nu}_j}(\zeta)^{\hat{\nu}_j}| < 1.$$

Ponieważ $|(f_0^i)'(z_j)| = 1$ oraz $a_{\hat{\nu}_j} \neq 0$, a ζ można zapisać jako

$$\zeta = \varrho \exp(i\Theta),$$

gdzie $\Theta \in [0, 2\pi)$ i ϱ ma być dostatecznie małe. Problem więc sprowadza się do znalezienia argumentu Θ , takiego by dla nie mniej niż połowy j

$$b_j < \hat{\nu}_j \nu \Theta < c_j,$$

gdzie

$$b_{j,s} := \arg(f_0^{i,j})'(z_j) + \frac{\pi}{2} + \arg(a_{\hat{\nu}_j}),$$

$$c_{s,j} := \arg((f_0^{i,j})'(z)) + \frac{3\pi}{2} + \arg(a_{\hat{\nu}_j}),$$

(Rys.5). Od teraz traktować będziemy Θ jako element okręgu jednostkowego S^1 . Wówczas nierówność $b_j < \hat{\nu}_j\Theta < c_j$ można przetłumaczyć następująco: istnieje podzbiór okręgu $J_j \subseteq S^1$ będący skończoną sumą otwartych rozłącznych łuków, których suma długości wynosi $c_j - b_j = \pi$ (czyli $\int_{S^1} \chi_{J_j}(\xi) d(\xi) = \pi$, gdzie χ jest funkcją charakterystyczną); żądamy aby dla co najmniej połowy spośród $j \in J_j$.

Rozważmy średnią wartość sumy funkcji charakterystycznych wybranych zbiorów J_1, \dots, J_M :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{S^1} (\chi_{J_1} + \dots + \chi_{J_M})(\xi) d(\xi) = \frac{1}{2\pi} M\pi = \frac{1}{2}M.$$

Stąd istnieje Θ takie, że

$$(\chi_{J_1} + \dots + \chi_{J_M})(\Theta) \geq \frac{1}{2}M,$$

czyli Θ takie, że $\chi_{J_j}(\Theta) = 1$ dla nie mniej niż $\frac{M}{2}$ spośród $j = 1, \dots, M$, czyli $\Theta \in J_j$, co kończy dowód twierdzenia. ■

VI Podsumowanie

Rozważamy przekształcenie holomorficzne f

$$f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}.$$

Wówczas wyróżniamy na $\hat{\mathbb{C}}$ zbiór Julii $J(f)$. Ma on następujące własności:

- $J(f)$ jest niezmienniczy w przód i w tył,
- zwarty,
- w sobie gęsty,
- $J(f) \neq \emptyset$ oraz dla dowolnego $z \in J(f)$ zachodzi $J(f) = \text{cl} \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(\{z\})$,
- $J(f) = \hat{\mathbb{C}}$ lub $J(f)$ jest brzegowy,
- jeśli f jest wielomianem, to $J(f) = \partial A_{\infty}$, gdzie A_{∞} jest basenem przyciągania nieskończoności.

Każda składowa uzupełnienia zbioru Julii $J(f)$ wpada w składową okresową. Każda składowa okresowa C spełnia:

- jeśli wśród funkcji granicznych rodziny $\{f|_C\}_{n=0}^{\infty}$ są funkcje nie stałe, to:
 - C jest dyskiem Siegela lub
 - C jest pierścieniem Hermanna (nie ma pierścieni Hermanna dla f wielomianu),
- jeśli wśród funkcji granicznych są tylko stałe, to:
 - C jest basenem bezpośredniego przyciągania ścieku lub
 - C jest płatkim kwiatka punktu neutralnego wymiernego.

W trajektorii każdego basenu ścieku i każdego płatka leży punkt krytyczny.

Dotychczas nie udowodniliśmy, że każda składowa uzupełnienia zbioru Julii $J(f)$ wpada w składową okresową. Dowodowi tej własności poświęcimy następny rozdział.

Rozważmy punkty okresowe. Niech pochodna w punkcie okresowym wynosi

$$(f^n)'(p) = \lambda,$$

gdzie n okres punktu.

Jeżeli $|\lambda| < 1$, to p jest ściekiem i leży w swoim basenie bezpośredniego przyciągania. Ścieków jest skończenie wiele, ponieważ w trajektorii każdego basenu ścieku leży punkt krytyczny.

Jeżeli $|\lambda| > 1$, to p jest źródłem i leży w $J(f)$. Jest ich nieskończenie wiele, ponieważ

$$\text{cl}(\text{okresowe źródła}) = J(f).$$

Jeżeli $|\lambda| = 1$, to p jest punktem neutralnym. Wówczas jeżeli zapiszemy

$$\lambda = \exp(2\pi i\Theta),$$

to mamy:

Jeśli $\theta \in \mathbb{Q}$, to p jest punktem neutralnym wymiernym. Jest wówczas środkiem kwiatka, $p \in J(f)$ oraz takich punktów jest skończenie wiele, ponieważ w trajektorii każdego płatka kwiatka leży punkt krytyczny.

Jeśli $\theta \notin \mathbb{Q}$, to p jest punktem neutralnym niewymiernym. Jest wówczas środkiem dysku Siegela albo leży w zbiorze Julii $J(f)$ — wówczas nazywamy go niemetryzowalnym. Punktów neutralnych jest skończenie wiele. Tak więc między innymi dysków Siegela jest skończenie wiele.

Osobno dowodzi się, że pierścieni Hermana jest skończenie wiele.

Jeżeli p jest punktem okresowym neutralnym leżącym w $J(f)$ (to znaczy punktem neutralnym wymiernym lub niewymiernym niemetryzowalnym), to

$$p \in \text{cl} \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(\text{Crit}).$$

Ponadto brzegi dysków Siegela (S) i pierścieni Hermana (H) spełniają

$$\partial S, \partial H \subseteq \text{cl} \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(\text{Crit}).$$

Znamy już przykłady basenu ścieku oraz punktu neutralnego wymiernego. W następnych rozdziałach będą podane przykłady wszystkich pozostałych możliwości, to znaczy przekształceń takich, dla których $J(f) = \hat{\mathbb{C}}$, istnieje dysk Siegela, istnieje pierścień Hermana, oraz takiego, że istnieje punkt neutralny niemetryzowalny.

VII Twierdzenie Sullivana

W rozdziale tym będziemy dowodzić twierdzenie Sullivana mówiące, że nie istnieje dziedzina błędząca, tzn. składowa uzupełnienia zbioru Julii $J(f)$ przekształcenia holomorficznego $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, nie wpadająca pod działaniem f na składową okresową. Formalnie twierdzenie to należy do teorii klasyfikacji składowych uzupełnienia zbioru Julii $J(f)$. Jednak, z powodu obszerności oraz stosowania zupełnie nowych metod — teorii homeomorfizmów quasikonforemnych, zostało ono wydzielone w odrębną część. Przy okazji naszkicujemy również oszacowanie liczby orbit pierścieni Hermana, co razem z Twierdzeniem 1 rozdział V §1 da oszacowanie liczby okresowych orbit składowych $\hat{\mathbb{C}} \setminus J(f)$, w szczególności ich liczba jest skończona.

1. Homeomorfizmy quasikonforemne i mierzalne struktury konforemne.

Podamy dwie równoważne definicje przekształceń K -quasikonforemnych ($K > 1$).

Definicja 1.1. Homeomorfizm $h : \Omega \rightarrow \Omega'$ obszarów w $\hat{\mathbb{C}}$ nazywa się K -quasikonforemny jeśli:

$$1. \forall x \in \Omega \quad K(x) := \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\sup\{\text{dist}(f(x), f(y)) : \text{dist}(x, y) = r\}}{\inf\{\text{dist}(f(x), f(y)) : \text{dist}(x, y) = r\}} \leq K.$$

2. h jest bezwzględnie ciągła na wszystkich poziomych i pionowych liniach (zbiorach $\text{Im}(z) = \text{const}$, $\text{Re}(z) = \text{const}$), lokalnie w jakimś holomorficznym układzie współrzędnych), oraz $h_{\bar{z}} \leq kh_z$ gdzie $k := \frac{K-1}{K+1}$.

Homeomorfizm h nazywa się quasikonforemny, jeśli jest K -quasikonforemny dla pewnej liczby K .

Dowód równoważności 1. i 2. nie jest prosty. Związek między 1. i 2. widać jednak natychmiast w przypadku gdy h jest różniczkowalne, np. w $x \in \Omega$. Wtedy bowiem Dh przekształca okrąg w przestrzeni stycznej $T_x\Omega$ w elipsę \mathcal{E} i wzajemny stosunek długości osi tej elipsy $\lambda(E)$ spełnia równość: $\lambda(E) = \frac{|h_z| + |h_{\bar{z}}|}{|h_z| - |h_{\bar{z}}|}$. Ta równość wynika stąd, że $dh = h_z dz + h_{\bar{z}} d\bar{z}$ przyjmuje maximum (minimum) wartości bezwzględnej gdy $\frac{h_{\bar{z}} d\bar{z}}{h_z dz}$ jest liczbą rzeczywistą dodatnią (ujemną). Zauważmy, że $\frac{|h_{\bar{z}}|}{|h_z|} = \frac{\lambda(E)-1}{\lambda(E)+1}$.

Wiele własności przekształceń konforemnych jest prawdziwych dla przekształceń quasikonforemnych. W szczególności prawdziwa jest potrzebna dalej Zasada Symetrii podobna do Zasady Symetrii Schwartza:

Twierdzenie 1.2. K -quasikonforemny homeomorfizm $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ dysku jednostkowego na siebie przedłuża się do K -quasikonforemnego homeomorfizmu sfery $\hat{\mathbb{C}}$ na siebie.

Idea dowodu. Przedłużenie do homeomorfizmu na $\text{cl}\mathbb{D}$ wynika z twierdzenia Mori [Ahlfors, str. 47] (które mówi nawet o przedłużeniu do funkcji ciągłej w sensie Höldera). Następnie h odbijamy korzystając z inwersji. K -quasikonforemność wynika z definicji 2.

Definicja 1.3. Rozważmy przestrzeń \mathcal{R} wszystkich mierzalnych metryk Riemanna w obszarze $\Omega \subset \hat{\mathbb{C}}$, to znaczy form $S(x)$ symetrycznych, dodatnio określonych prawie wszędzie, mierzalnych. Takie formy można mnożyć przez mierzalne funkcje dodatnie na Ω (oznaczymy przestrzeń tych funkcji \mathcal{F}) i rozpatrywać przestrzeń \mathcal{R}/\mathcal{F} . Można ją utożsamiać ze zbiorem \mathcal{R}_0 form w \mathcal{R} takich, że w $T_x\Omega$ krótsza oś elipsy $\mathcal{E}(S) := \{v \in T_x\Omega : S(x)(v) = 1\}$ ma długość 1 (w metryce euklidesowej). $\mathcal{R}/\mathcal{F} = \mathcal{R}_0$ nazywamy przestrzenią mierzalnych struktur konforemnych na Ω .

Oznaczmy dla $S \in \mathcal{R}$ iloraz długości osi dłuższej do krótszej dla $\mathcal{E}(S)$ przez $\lambda(S)$. Rozpatrujemy dalej zbiór $\mathfrak{M}(\Omega) := \{S \in \mathcal{R}_0 = \mathcal{R}/\mathcal{F} : \lambda(S) \in L^\infty\}$ z metryką $\varrho(S_1, S_2) := \text{esssup} / \lambda(S_1, S_2)$ gdzie $\lambda(S_1, S_2)(x) := \sup\{|S_1(x)(v) - S_2(x)(v)| : v \in T_x\Omega \text{ \& } \|v\|_{\text{euklid.}} = 1\}$.

Prawdziwe jest następujące

Twierdzenie 1.4. ([Ahlfors, str. 24]) *Quasikonforemny homeomorfizm jest różniczkowalny prawie wszędzie, a różniczka należy do przestrzeni L^∞ .*

Dzięki temu twierdzeniu h^* działa na formach różniczkowych (określonych prawie wszędzie), zatem prowadzi z $\mathfrak{M}(\Omega')$ w $\mathfrak{M}(\Omega)$.

Przytoczymy teraz fundamentalne twierdzenie nazywane zazwyczaj twierdzeniem Ahlforsa–Bersa [Ahlfors, Rozdział V].

Twierdzenie 1.5. (Bojarski, Ahlfors, Bers)

1. Dla dowolnej struktury $\mu \in \mathfrak{M}(\Omega)$, gdzie Ω jest dyskiem jednostkowym \mathbb{D} lub całą sferą $\hat{\mathbb{C}}$, istnieje quasikonforemny homeomorfizm H na Ω taki, że $H^*(\mu_0) = \mu$; μ_0 jest tutaj standardową strukturą: $\lambda(\mu_0) = 1$ (elipsy \mathcal{E} są okręgami).

2. Istnieje tylko jedno H spełniające powyższe warunki, jeśli zakładać, że H nie rusza trzech wyróżnionych punktów (dowolnych w przypadku $\Omega = \hat{\mathbb{C}}$, należących do $\partial\mathbb{D}$ w przypadku $\Omega = \mathbb{D}$ — korzystamy tu z faktu, że H przedłuża się na $\partial\mathbb{D}$, Tw.1.2.)

3. Przekształcenia $\mu \mapsto H$, $\mu \mapsto H^{-1}$ opisane powyżej (przy założeniu istnienia trzech nieruchomych punktów dla H) są ciągłe, w topologii zbieżności jednostajnej wśród funkcji H .

2. Sformułowanie.

Twierdzenie Sullivana.

Niech $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ będzie funkcją holomorficzną stopnia d . Wówczas nie istnieje składowa U zbioru $\hat{\mathbb{C}} \setminus J(f)$, taka że:

$$\forall n \neq m \quad f^n(U) \cap f^m(U) = \emptyset.$$

Dowód twierdzenia Sullivana.

Przypuśćmy, że takie U istnieje. Z definicji zbioru Julii $J(f)$ wiemy, że rodzina funkcji $\{f^n|_{U_0}\}_{n=0}^{\infty}$ jest normalna. W rozdziale “Składowe spójności zbioru Julii”, lemat 1.1. udowodniliśmy, że jeżeli w zbiorze funkcji granicznych rodziny $\{f^n|_{U_0}\}_{n=0}^{\infty}$ istnieje funkcja nie stała, to składowa U wpada w składową okresową, czyli zachodzi teza twierdzenia Sullivana. Dalej więc zakładamy, że rodzina $\{f^n|_{U_0}\}_{n=0}^{\infty}$ ma tylko stałe funkcje graniczne. Wprowadźmy oznaczenie:

$$U_n := f^n(U) \quad \text{dla } n \geq 0.$$

Można zakładać, że dla dostatecznie dużych n U_n nie zawiera punktów krytycznych (bo jest ich skończenie wiele). Zatem

$$f|_{U_n} : U_n \rightarrow U_{n+1}$$

jest skończenie krotnym lokalnym homeomorfizmem, a więc nakryciem (skończona krotność wynika z tego, że f jest przekształceniem wymiernym).

Mamy dwa przypadki:

- (I) Dla wszystkich n dostatecznie dużych U_n jest niejednostopny.
- (II) Dla wszystkich n dostatecznie dużych U_n jest jednostopny. Wtedy $f|_{U_n} : U_n \rightarrow U_{n+1}$ jest biholomorfizmem.

Istotnie jeśli przypadek (II) nie zachodzi i U_n nie jest jednostopny, to U_{n+1} też nie jest i tak dalej. Nie może istnieć holomorficzne przekształcenie bez punktów krytycznych, więc lokalny homeomorfizm $f : U_j \rightarrow U_{j+1}$, U_j niejednostopny, U_{j+1} jednostopny.

3. Dowód w przypadku (I).

Można zakładać, że obszary U_n są niejednostopne, $n = 0, 1, 2, \dots$ (przenumerowując tak, że U_0 zastępuje poprzedni U_n dla pewnego dużego n).

Niech γ_0 będzie krzywą zamkniętą nieściągającą w U_0 (Rys.3.1). Niech $\gamma_n := f^n(\gamma_0)$. Wówczas γ_n jest krzywą nieściągającą w U_n (ponieważ $f^n|_{U_0} : U_0 \rightarrow U_n$ jest nakryciem).

Rodzina $\{f^n|_{U_0}\}_{n=0}^\infty$ jest normalna i ma tylko stałe funkcje graniczne. Rozważamy dalej \hat{C} ze standardową metryką Riemanna. Otrzymujemy stąd:

- (a) $(f^n|_{U_0})' \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (pochodna w sensie metryki na \hat{C}),
- (b) $\text{długość } \gamma_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$,
- (c) $\text{diam}(\gamma_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Ustalmy małe ε . Wówczas dla $n \geq N$ (gdzie N dostatecznie duże)

$$\text{diam}(\gamma_n) \leq \varepsilon.$$

Dalej rozpatrywać będziemy γ_n dla $n \geq N$. Zbadajmy rodzinę składowych spójności zbioru $\hat{C} \setminus \gamma_n$. Istnieją co najmniej dwie takie składowe, wynika to z twierdzenie Jordana. Wszystkie składowe poza jedną mają średnicę mniejszą niż ε . Tę wyróżnioną “dużą” składową nazwijmy A_n (Rys. 3.2). Niech $B_n := \hat{C} \setminus A_n$. (Rys. 3.3)).

Niech

$$B_n := \{\text{rodzina składowych spójności zbioru } \hat{C} \setminus \gamma_n \text{ z wyjątkiem “dużej” składowej } A_n\}.$$

Wówczas $B_n = \bigcup_{X \in \mathcal{B}_n} X$ i dla dowolnej składowej $X \partial X \subseteq \gamma_n$.

Ponieważ f jest przekształceniem ciągłym na zwartym zbiorze \hat{C} , więc $f(X)$ nie może być “dużym zbiorem”. Na mocy zasady maximum otrzymujemy

$$f(X) \subseteq f(\gamma_n) \cup \bigcup_{Y \in \mathcal{B}_{n+1}} Y = B_{n+1}.$$

Stąd mamy $f(B_n) \subseteq B_{n+1}$ (dla $n \geq N$) (Rys. 3.4).

Ponadto B_n jest zbiorem spójnym. Gdyby bowiem dało się przedstawić jako sumę dwóch zbiorów otwarcie domkniętych B', B'' , to ponieważ $\partial B', \partial B'' \subseteq \gamma_n$, to γ_n byłoby niespójne. Sprzeczność.

Okazuje się, że B_n jest także jednospójne:

Po pierwsze zauważmy, że $A_n = \hat{C} \setminus B_n$ jest zbiorem spójnym, jednospójnym (zatem topologicznym dyskiem). Korzystamy tu z topologicznego faktu, że jednospójność spójnego obszaru w \hat{C} jest równoważna spójności uzupełnienia [??].

Teraz powołać się można na fakt znany topologom, że jeśli U jest topologicznym dyskiem w \hat{C} , to $\hat{C} \setminus U$ jest obszarem jednospójnym. Idea dowodu tego faktu może być następująca:

Dla dowolnej ciągłej krzywej zamkniętej $\gamma : S^1 \rightarrow \hat{C} \setminus U$ $\gamma(S^1)$ jest zbiorem lokalnie spójnym (twierdzenie Hahna-Mazurkiewicz [E-S, str. 301]). Jedną ze składowych $\hat{C} \setminus \gamma(S^1)$, oznaczmy ją U' , zawiera U . $\partial U'$ jest lokalnie spójny, więc przekształcenie Riemanna $R :$

$\mathbb{D} \rightarrow U'$ przedłuża się do ciągłego na $\text{cl } \mathbb{D}$. Wtedy homotopię γ do stałej można zsunąć po obrazach przy R promieni w \mathbb{D} do homotopii w $\hat{\mathbb{C}} \setminus U'$.

W naszej sytuacji tak naprawdę nie trzeba korzystać z powyższych ogólnych twierdzeń. γ_n , zatem ∂B_n , można uzyskać kawałkami analityczne. Homotopię γ do stałej można uzyskać po kawałkach w składowych $\text{int } B_n$, topologicznych dyskach z twierdzenia Jordana.

Zatem uzyskaliśmy: krzywa γ_n jest ściągalna w B_n i nie jest ściągalna w U_n . Stąd

$$B_n \setminus U_n \neq \emptyset$$

skąd mamy

$$B_n \cap \partial U_n \neq \emptyset.$$

Ponieważ z definicji $\partial U_n \subseteq J(f)$, a więc otrzymujemy

$$B_n \cap J(f) \neq \emptyset.$$

Co więcej $\text{int } B_n \cap J(f) \neq \emptyset$, bo $\partial B_n \subseteq \gamma_n \subseteq U_n$, czyli B_n jest otoczeniem punktu ze zbioru Julii. Tak więc rodzina $\{f^n|_{\text{int } B_n}\}_{n=0}^{\infty}$ nie jest normalna, a więc nie ma podciągów zbieżnych w tej rodzinie.

Jednocześnie $\text{diam } B_n = \text{diam } \gamma_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (patrz (c)), $B_n \subseteq \hat{\mathbb{C}}$, $\hat{\mathbb{C}}$ zbiór zwarty, więc istnieje podciąg $\{f^{n_k}|_{\text{int } B_{n_k}}\}_{k=1}^{\infty}$ zbieżny do stałej funkcji granicznej. Sprzeczność. Zakończyliśmy dowód w przypadku (I).

4. Dowód w przypadku (II).

Przypomnijmy, że mamy:

$$U_0 @ > f > \text{biholo.} > U_1 @ > f > \text{biholo.} > U_2 @ > f > \text{biholo.} > U_3 @ > f > \text{biholo.} > \dots$$

(znów przenumerowujemy zbiory tak, że U_0 zastępuje poprzedni U_n dla pewnego dużego n).

Istnieje biholomorfizm $R : \mathbb{D} \rightarrow U_0$ (stosujemy twierdzenie Riemanna);

4.1. Skonstruujemy teraz w \mathbb{D} pewną rodzinę mierzalnych struktur konforemnych. Dla dowolnie dużego $M \in \mathbb{N}$ skonstruujemy rodzinę h_τ przekształceń quasikonforemnych otoczenia dysku domkniętego $\overline{\mathbb{D}}$ na siebie, zachowujących $\overline{\mathbb{D}}$, $S^1 = \partial \mathbb{D}$ i punkty $\{1, i, -1\}$.

Załóżmy, że mamy rodzinę dyfeomorfizmów

$$\varphi_\tau : S^1 \rightarrow S^1, \quad \tau \in \Omega,$$

gdzie zbiór parametrów Ω jest otwartym podzbiorem \mathbb{R}^M takim, że $0 \in \Omega$. Zakładamy, że rodzina φ_τ spełnia następujące warunki:

- φ_τ jest rodziną wymiaru M ,
- φ_τ trzymają punkty $\{1, i, -1\}$,
- $\varphi_0 = \text{id}$,
- φ_τ zależy gładko od (x, τ) .

Wówczas naszą rodzinę

$$h_\tau : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$$

definiujemy:

$$h_\tau := \text{rozszerzenie } \varphi_\tau \text{ "po promieniach" ,}$$

to znaczy $((\theta, r) \in S^1 \times [0, 1])$ współrzędne biegunowe

$$h_\tau(\theta, r) := (\varphi_\tau(\theta), r).$$

Wówczas także rodzina h_τ spełnia te same warunki co rodzina φ_τ (oprócz warunku gładkości w $x = 0$).

Rodzinę φ_τ można skonstruować na przykład w następujący sposób:

$$\varphi_\tau(x) := x + \sum_{j=1}^M t_j \cdot \sin(2\pi(4jx)),$$

gdzie $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$ oraz $\tau = (t_1, t_2, \dots, t_M)$.

Wówczas φ_τ trzyma punkty $\{1, i, -1\}$ odpowiadające $x = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$, $\varphi = \text{id}$ oraz φ_τ są dyfeomorfizmami o ile $\varphi'_\tau > 0$; Aby to zachodziło wystarczy żądać by $t_j < \frac{1}{M \cdot 2\pi \cdot 4M}$.

h_τ są quasikonforemne na podstawie na przykład definicji 1. W $x \neq 0$ wynika to z różniczkowalności h_τ i h_τ^{-1} i wspólnego ograniczenia $\|Dh_\tau\|$ i $\|D(h_\tau)^{-1}\|$, w $x = 0$ $K(x) = 1$.

4.2. Skonstruujemy teraz rodzinę struktur mierzalnych na $\overline{\mathbb{D}}$ w następujący sposób: niech μ_0 oznacza strukturę standardową, niech $\hat{\mu}_\tau := h_\tau^*(\mu_0)$.

Przenieśmy te struktury na U_0 przekształceniem R^{-1}

$$\mu_\tau := (R^{-1})^*(\hat{\mu}_\tau).$$

$$U_0 @ > f > \text{biholo.} > U_1 @ > f > \text{biholo.} > U_2 @ > f > \text{biholo.} > \dots$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ R \\ \mathbb{D} \end{array}$$

Rozszerzymy te struktury μ_τ na $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(U_0)$ kładąc

$$\mu_\tau|_{U_n} := (f^{-n}|_{U_n})^*(\mu_\tau|_{U_0}),$$

gdzie $f^{-n}|_{U_n}$ to gałąź prowadząca

$$f^{-n}|_{U_n} : U_n \rightarrow U_0,$$

co ma sens, bo przekształcenie $f^n|_{U_0} : U_0 \rightarrow U_n$ jest odwracalne. Jest to jedyne miejsce gdzie korzystamy z odwracalności.

Teraz rozszerzamy te struktury na całą wielką orbitę U_0 to znaczy na zbiór

$$\text{WOrb}(U_0) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(f^n(U_0)) \right),$$

kładąc

$$\mu_{\tau|f^{-k}(f^n(U_0))} := (f^k|_{f^{-k}(f^n(U_0))})^*(\mu_{\tau|f^n(U_0)}).$$

Zakończmy konstrukcję rodziny struktur μ_{τ} rozszerzając je na całą sferę $\hat{\mathbb{C}}$, mianowicie na $\hat{\mathbb{C}} \setminus \text{WOrb}(U_0)$ kładziemy

$$\mu_{\tau} := \mu_0.$$

$\text{WOrb}(U_0)$ jako zbiór otwarty jest mierzalny, uzyskaliśmy więc na $\hat{\mathbb{C}}$ rodzinę struktur mierzalnych $\{\mu_{\tau}\}_{\tau \in \Omega}$, z definicji μ_{τ} są f -niezmiennicze, to znaczy $f^*(\mu_{\tau}) = \mu_{\tau}$. Ponadto $\tau \mapsto \mu_{\tau}$ jest ciągłym włożeniem, bo rodzina jest gładka (poza 0).

4.3. Następnym krokiem dowodu będzie przejście od struktur do odpowiadających im pewnych przekształceń wymiernych. Zastosujemy twierdzenie Ahlforsa–Bersa na $\hat{\mathbb{C}}$ dla struktur z naszej rodziny $\{\mu_{\tau}\}$. Przekształcenia quasikonforemne H odpowiadające μ_{τ} będziemy oznaczać przez H_{τ} . Będziemy żądać aby H_{τ} zachowywały punkty a, b, c dowolnie ustalone w $\hat{\mathbb{C}}$.

Zdefiniujmy przekształcenie odpowiadające strukturze μ_{τ} :

$$g_{\tau} := H_{\tau} f H_{\tau}^{-1}$$

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathbb{C}} & \xrightarrow{g_{\tau}} & \hat{\mathbb{C}} \\ H_{\tau} \uparrow & & \uparrow H_{\tau} \\ \hat{\mathbb{C}} & \xrightarrow{f} & \hat{\mathbb{C}} \end{array}$$

Tak zdefiniowane $g_{\tau}(z)$ zależy w sposób ciągły od pary (τ, z) .

Konstrukcja przekształcenia g_{τ} można interpretować w następujący sposób:

Uwaga 4.3.1. f zachowuje rodzinę struktur μ_{τ} . Całkujemy je i uzyskujemy nowe układy współrzędnych, a w nich przekształcenia f przechodzą na g_{τ} .

Wniosek 4.3.2. g_{τ} zachowują strukturę standardową, tzn.

$$g_{\tau}^*(\mu_0) = \mu_0.$$

Dowód.

$$\begin{aligned} g_{\tau}^*(\mu_0) &= (H_{\tau} f(H_{\tau}^{-1}))^*(\mu_0) = (H_{\tau}^{-1})^* f^* H_{\tau}^*(\mu_0) \\ &= (H_{\tau}^{-1})^* f^*(\mu_{\tau}) = (H_{\tau}^{-1})^*(\mu_{\tau}) = \mu_0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Wniosek 4.3.3. Przekształcenia g_{τ} są holomorficzne.

Nim przejdziemy do dowodu wniosku sformułujemy pewien ważny lemat.

Lemat 4.3.4. Załóżmy, że V jest dyskiem, a $g : V \rightarrow g(V)$ jest przekształceniem quasi-konforemnym, odwracalnym i $g^*(\mu_0) = \mu_0$. Wówczas g jest holomorficzne.

Dowód. $g(V)$ jest topologicznym dyskiem, więc istnieje przekształcenie Riemanna $\tilde{R} : V \rightarrow g(V)$ i oczywiście $\tilde{R}^*(\mu_0) = \mu_0$. Wówczas na mocy jednoznaczności w twierdzeniu Ahlforsa–Bersa otrzymujemy, że g jest także biholomorfizmem. ■

Dowód wniosku 4.3.3. Poza skończonym zbiorem punktów $H_\tau(\text{Crit}(f))$ dla każdego punktu x istnieje dysk V taki, że $g_\tau|_V : V \rightarrow g_\tau(V)$ jest odwracalne i ponieważ H_τ są quasikonforemne, to także g_τ jest quasikonforemne. Na mocy wniosku 4.3.2 i lematu 4.3.4 otrzymujemy, że g_τ jest holomorficzne poza skończonym zbiorem punktów $H_\tau(\text{Crit}(f))$. Ponieważ $g_\tau : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ jest ciągła, to na mocy twierdzenia o usuwaniu pozornych osobliwości otrzymujemy, że g_τ jest holomorficzna na $\hat{\mathbb{C}}$. ■

4.4. Przypomnijmy proste fakty dotyczące funkcji holomorficzych.

Uwaga 4.4.1. Jeśli funkcja $g : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ jest holomorficzna, stopnia d , wówczas jest funkcją wymierną stopnia d .

Uwaga 4.4.2. $\dim_{\mathbb{C}} \{\text{funkcje wymierne stopnia } d\} = 2d + 1$.

W rozdziale 5 zobaczymy, że można było pracować także z liczbą $2d - 2$, to znaczy

$$\dim_{\mathbb{C}}(\{\text{funkcje wymierne stopnia } d\} / \{\text{homografie}\}) = 2d - 2.$$

Skonstruowaliśmy przekształcenia g_τ jako sprzężone z f oraz $\deg(f) = d$, to $\deg(g_\tau) = d$ i g_τ są wymierne stopnia d . Ponadto przekształcenie

$$\mathbb{R}^M \supset \Omega \ni \tau \mapsto g_\tau \in \mathbb{R}^{2(2d+1)}$$

jest ciągle.

Ponieważ M mogliśmy wybrać dowolnie duże, to $M > 4d + 2$ i możemy zastosować następujące twierdzenie:

Twierdzenie 4.4.3. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^M$ będzie otwartym podzbiorem. Niech

$$\Psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N \quad (\text{gdzie } M > N)$$

będzie przekształceniem ciągłym. Wówczas

$$\begin{aligned} \exists_{K \subset \Omega} & \quad \text{card } K > 1 \text{ oraz } K \text{ jest kontinuum, takim że} \\ \forall_{\xi, \eta \in K} & \quad \Psi(\xi) = \Psi(\eta). \end{aligned}$$

W naszej sytuacji oznacza to, że

$$\begin{aligned} \exists_{K \subset \Omega} & \quad K \text{ kontinuum, takie że} \\ \forall_{\xi, \eta \in K} & \quad g_\xi = g_\eta. \end{aligned}$$

Ustalmy punkt $\tau_0 \in K$. Wówczas mamy

$$\forall_{\tau \in K} \quad H_\tau f(H_\tau)^{-1} = H_{\tau_0} f(H_{\tau_0})^{-1},$$

czyli

$$f = (H_\tau)^{-1} H_{\tau_0} f(H_{\tau_0})^{-1} H_\tau.$$

Niech

$$G_\tau := (H_\tau)^{-1} H_{\tau_0},$$

wówczas mamy

$$\forall_{\tau \in K} \quad f = G_\tau f(G_\tau)^{-1},$$

G_τ są quasikonforemne,

$$G_{\tau_0} = \text{id},$$

$G_\tau(z)$ zależy w sposób ciągły od $(\tau, z) \in K \times \hat{\mathbb{C}}$.

Ponieważ G_τ sprzęga f ze sobą, to dla dowolnego $n = 1, 2, 3, \dots$ zachodzi

$$G_\tau(\text{źródła okresu } n \text{ przekształcenia } f) = (\text{źródła okresu } n \text{ przekształcenia } f).$$

Zbiór źródeł okresu n jest skończony, $G_{\tau_0} = \text{id}$, K jest zbiorem spójnym i $G_\tau(z)$ w sposób ciągły zależy od (τ, z) , to

$$G_\tau|_{(\text{źródła okresu } n \text{ przekształcenia } f)} = \text{id}.$$

Ponadto, jak wiemy, zbiór Julii $J(f)$ spełnia

$$J(f) = \text{cl}(\text{źródła } f),$$

to

$$G_\tau|_{J(f)} = \text{id}.$$

Stąd wynika, że dla dowolnej składowej U zbioru $\hat{\mathbb{C}} \setminus J(f)$ zachodzi

$$G_\tau(U) = U.$$

4.5. W tym punkcie będziemy się zajmować własnościami rodziny G_τ obciętej do naszej składowej U_0 , co pozwoli nam dojść do poszukiwanej sprzeczności.

Mamy:

$$\forall_{\tau \in K} \quad G_\tau(U_0) = U_0$$

$$G_\tau|_{\partial U_0} = \text{id} \quad (\text{ponieważ } \partial U \subset J(f)).$$

Ponadto G_τ przenoszą struktury μ_τ dla $\tau \in K$ na strukturę μ_{τ_0} :

$$\begin{aligned} G_\tau^*(\mu_\tau) &= ((H_\tau)^{-1} H_{\tau_0})^*(\mu_\tau) = \\ &= (H_{\tau_0})^*(H_\tau)^{-1}(\mu_\tau) = \\ &= (H_{\tau_0})^*(\mu_0) = \mu_{\tau_0}. \end{aligned}$$

Przenieśmy G_τ na \mathbb{D} przez przekształcenie R

$$\begin{array}{ccc} \hat{G}_\tau & := & R^{-1}G_\tau R \\ U_0 & \xrightarrow{G_\tau} & U_0 \\ R \uparrow & & \uparrow R \\ \mathbb{D} & \xrightarrow{\hat{G}_\tau} & \mathbb{D} \end{array}$$

Jednocześnie wiemy, że przekształcenia $(h_\tau)^{-1}h_{\tau_0}$ przenoszą struktury $\hat{\mu}_\tau$ na strukturę $\hat{\mu}_{\tau_0}$:

$$((h_\tau)^{-1}h_{\tau_0})^*(\hat{\mu}_\tau) = (h_{\tau_0})^*((h_\tau)^{-1})^*(\hat{\mu}_\tau) = (h_{\tau_0})^*(\hat{\mu}_0) = \hat{\mu}_{\tau_0}.$$

Ponadto przekształcenia $(h_\tau)^{-1}h_{\tau_0}$ są quasikonforemne, trzymają trzy ustalone punkty $\{1, i, -1\} \subset \partial\mathbb{D}$ oraz $(h_\tau)^{-1}h_{\tau_0}|_{\partial\mathbb{D}} \neq \text{id}$ (dla $\tau \neq \tau_0$).

W celu doprowadzenia do sprzeczności skorzystamy z prostego lematu:

Lemat 4.5.1. *Dla $\tau \in K$ przedłużenia G_τ na $\text{cl}\mathbb{D}$ spełniają:*

$$\hat{G}_\tau|_{\partial\mathbb{D}} = \text{id}.$$

Wystarczy udowodnić ten lemat, gdyż wówczas zarówno przedłużone \hat{G}_τ , jak i $(h_\tau)^{-1}h_{\tau_0}$ spełniają:

- przenoszą struktury $\hat{\mu}_\tau$ na μ_{τ_0} (dla $\tau \in K$),
- trzymają trzy ustalone punkty $\{1, i, -1\}$.

Stąd na mocy twierdzenia Ahlforsa–Bersa musiałyby być równe:

$$\hat{G}_\tau = (h_\tau)^{-1}h_{\tau_0}.$$

Ale jednocześnie

$$\text{id} = \hat{G}_\tau|_{\partial\mathbb{D}} = (h_\tau)^{-1}h_{\tau_0}|_{\partial\mathbb{D}} \neq \text{id}, y$$

więc uzyskaliśmy sprzeczność. Pozostaje dowieść lematu.

Dowód lematu 4.5.1. Traktujemy \mathbb{D} jako $\mathbb{H} = \{\text{Im}(z) > 0\}$. Mamy udowodnić, że

$$\hat{G}_\tau|_{\partial\mathbb{D}} = \text{id}.$$

Wprowadźmy oznaczenia:

$$\begin{aligned} A &:= \{z \in \partial\mathbb{D} : \text{istnieje granica radialna (niestyczna)} \\ &\quad R(\xi) := \lim_{r \nearrow \infty} R(rz)\}, \end{aligned}$$

ustalmy $\xi \in A$, niech

$$B_\xi := \{z \in A : R(z) \neq R(\xi)\}.$$

Wówczas na mocy twierdzenia Fatou o zbieżności radialnej mamy:

$$\lambda(A) = 1 \quad \text{oraz} \quad \forall_{\xi \in A} \quad \lambda(B_\xi) = 1,$$

gdzie λ jest miarą Lebesgue'a na $\partial\mathbb{D}$, znormalizowaną tak, że $\lambda(\partial\mathbb{D}) = 1$.

Ponieważ $\lambda(A) = 1$, więc w szczególności A jest gęsty w $\partial\mathbb{D}$. Wystarczy więc udowodnić, że

$$\hat{G}_{\tau|A} = \text{id} \quad \text{dla } \tau \in K.$$

Założmy, że tak nie jest, tzn.

$$\exists_{\xi \in A} \quad \exists_{\tau_1 \in K} \quad \hat{G}_{\tau_1}(\xi) \neq \xi.$$

Rozważmy zbiór $\{\hat{G}_\tau(\xi) \in \partial\mathbb{D} : \tau \in K\}$. Jest to ciągły obraz kontinuum K oraz

$$\begin{aligned} \hat{G}_{\tau_1}(\xi) &\neq \xi \\ \hat{G}_{\tau_0}(\xi) &= \xi \quad (\text{gdź } \hat{G}_{\tau_0} = \text{id}). \end{aligned}$$

Jednocześnie $\lambda(B_\xi) = 1$, więc w szczególności B_ξ jest gęsty w $\partial\mathbb{D}$, co daje nam

$$\exists_{\tau' \in K} \quad \hat{G}_{\tau'}(\xi) \in B_\xi.$$

Zbadajmy granicę radialną w punkcie ξ , dla parametru τ' . Ponieważ $G_{\tau'}|_{U_0} = \text{id}$, więc

$$\lim_{r \nearrow \infty} G_{\tau'} \circ R(r\xi) = \lim_{r \nearrow \infty} R(r\xi) = R(\xi).$$

$$\begin{array}{ccc} U_0 & \xrightarrow{G_{\tau'}} & U_0 \\ R \uparrow & & \uparrow R \\ \mathbb{D} & \xrightarrow{\hat{G}_{\tau'}} & \mathbb{D} \end{array}$$

Jednocześnie mamy

$$\lim_{r \nearrow \infty} G_{\tau'} \circ R(r\xi) = \lim_{r \nearrow \infty} R \circ \hat{G}_{\tau'}(r\xi).$$

Ponadto $\hat{G}_{\tau'}$ jest quasikonforemne, więc $\hat{G}_{\tau'}(r\xi)$ zbiega niestycznie do punktu $\hat{G}_{\tau'}(\xi)$ i, ponieważ τ' było odpowiednio dobrane, $\hat{G}_{\tau'}(\xi) \in B_\xi$. Tak więc z definicji B_ξ otrzymujemy:

$$\lim_{r \nearrow \infty} G_{\tau_0} \circ R(r\xi) = \lim_{r \nearrow \infty} R \circ \hat{G}_{\tau'}(r\xi) = R(\hat{G}_{\tau'}(\xi)) \neq R(\xi).$$

Tak więc uzyskaliśmy sprzeczność, co kończy dowód lematu. ■

W ten sposób zakończyliśmy dowód przypadku (II), a zarazem dowód twierdzenia Sullivana. ■

Uwaga 4.5.2. Wydaje się, że można udowodnić tezę lematu 4.5.1 nie zakładając, że G_τ należy do rodziny przekształceń dla $\tau \in K$, powołując się na teorię końców prostych zamiast na twierdzenie Fatou.

Pytaniem jest mianowicie, czy z faktu, że $G_\tau|_{\partial U_0} = \text{id}$, wynika, że G_τ (dokładniej przekształcenie indukowane w sposób naturalny przez G_τ) jest identycznością na zbiorze ∂U_0 końców prostych. Wtedy mielibyśmy $G_\tau|_{\partial \mathbb{D}} = \text{id}$ z twierdzenia Caratheodory'ego o wzajemnej jednoznaczności odpowiedniości $\tilde{\partial}U_0$ i $\partial \mathbb{D}$. Czytelnik może znaleźć opis tej teorii np. w książce Collingwood, Lohwater [C-L].

Wreszcie wydaje się, że jeśli quasikonforemny homeomorfizm G jest przemienny z f i dostatecznie bliski identyczności, to $G|_{J(f)} = \text{id}$, (to znaczy, że w ogóle nie trzeba było zakładać, że G należy do rodziny G_τ).

Niestety nie umiemy tych uwag udowodnić.

5. W tym punkcie przeprowadzimy jeszcze raz analizę części dowodu twierdzenia Sullivana opisanej w §4. Wyjaśnimy ideę tego dowodu. Podamy również oszacowanie Sullivana liczby niektórych orbit składowych okresowych $\hat{\mathbb{C}} \setminus J(f)$.

5.1. Podstawowym pomysłem było wykorzystanie ciągłego przyporządkowania \mathcal{T}_f

$$\mu_\tau \mapsto H_\tau \circ f \circ (H_\tau)^{-1},$$

gdzie H_τ to quasikonforemny homeomorfizm nie ruszający trzech wyróżnionych punktów a, b, c , które prowadziło w $2(2d+1)$ -wymiarową przestrzeń Q^d przekształceń wymiernych $\hat{\mathbb{C}}$, stopnia $d = \deg(f)$.

Rodzina struktur $\{\mu_\tau\}$ niezmienniczych dla f w przypadku istnienia jednospójnej składowej $\hat{\mathbb{C}} \setminus J(f)$ błędzącej, okazała się ∞ -wymiarowa (konstrukcja w §4 punkty 1 i 2).

Następnie sprzeczność wynikała z tego, że przeciwobrazem w $\{\mu_\tau\}$ dowolnego przekształcenia wymiernego, przy \mathcal{T}_f jest zbiór zerowymiarowy. Z przypuszczenia, że $(\mathcal{T}_f)^{-1}(g)$ zawiera kontinuum K wynikało bowiem, że K składa się tylko z jednego punktu (§4 punkt 5). Z uwagi 4.5.2 wynikło nawet, że $(\mathcal{T}_f)^{-1}(g)$ jest w $\{\mu_\tau\}$ zbiorem izolowanych punktów.

5.2. Powyższe rozumowanie można umieścić w ogólniejszym kontekście:

Niech $\mathfrak{M}_f \subseteq \mathfrak{M}(\hat{\mathbb{C}})$ oznacza przestrzeń wszystkich mierzalnych struktur konforemnych na $\hat{\mathbb{C}}$, dla których λ należy do L^∞ , f -niezmienniczych. Jeśli dla $\mu \in \mathfrak{M}_f$, H_μ oznacza quasikonforemny homeomorfizm taki, że H_μ nie rusza wyróżnionych punktów a, b, c i $(H_\mu)^*(\mu_0) = \mu$, to definiujemy przekształcenie $\mathcal{T}_f : \mathfrak{M}_f \rightarrow Q^d$ wzorem

$$\mathcal{T}_f(\mu) = H_\mu \circ f \circ (H_\mu)^{-1}.$$

Na \mathfrak{M}_f działa grupa \mathcal{H}_f quasikonforemnych homeomorfizmów przemiennych z f , nie ruszających a, b, c , wzorem $\mu \mapsto H^*(\mu)$. Oznaczmy w \mathcal{H}_f składową łukową zawierającą id przez \mathcal{H}_f^0 i oznaczmy grupę tych składowych $\mathcal{H}_f/\mathcal{H}_f^0$ przez Mod_f (oznaczenie od nazwy modular group).

Oznaczmy

$$\text{Teich}_f = \mathfrak{M}_f/\mathcal{H}_f^0.$$

Widać natychmiast, że \mathcal{T}_f indukuje przekształcenie

$$\mathcal{T}_f^\# : \text{Teich}_f \rightarrow Q^d,$$

a nawet

$$\mathcal{T}_f^\# : \text{Teich}_f / \text{Mod}_f \rightarrow Q^d,$$

przy czym to ostatnie jest injekcją. Ciągłość wynika z twierdzenia Ahlforsa–Bers’a (Oznaczenie Teich_f pochodzi od nazwy: przestrzeń Teichmüllera).

Dowód części twierdzenia Sullivana w §4 polegał na wykazaniu, że rodzina $\{\mu_\tau\}$ wymiaru ∞ , takiej, że przekształcenie $\{\mu_\tau\}$ w $\text{Teich}_f / \text{Mod}_f$, $\mu_\tau \mapsto \mathcal{H}_f \mu_\tau$ ma 0-wymiarowe przeciwobrazy punktów, czyli na pokazaniu, że Teich_f / A_f jest ∞ -wymiarowa.

5.3 Przestrzeń \mathfrak{M}_f jest iloczynem kartezjańskim przestrzeni f -niezmienniczych mierzalnych struktur na zbiorze Julii $J(f)$, oznaczymy tę przestrzeń przez \mathfrak{N} , oraz na $\text{Orb } U_j$ orbitach składowych okresowych $\hat{\mathbb{C}} \setminus J(f)$, oznaczymy te przestrzenie $\mathfrak{M}_{f,j}$ ($\mathfrak{M}_{f,j} := \mathfrak{M}_f|_{\text{Orb } U_j}$). Struktura na U_j wyznacza już strukturę na nieokresowych składowych wpadających w U_j . Mamy zatem

$$(5.3.1) \quad \mathfrak{M}_f = \mathfrak{N} \times \left(\prod_j \mathfrak{M}_{f,j} \right).$$

Ta tożsamość indukuje ciągle przekształcenie

$$(5.3.2) \quad \alpha : \text{Teich}_f = \mathfrak{M}_f / \mathcal{H}_f^0 \xrightarrow{\text{“na”}} \mathfrak{N} \times \left(\prod_j \mathfrak{M}_{f,j} / \mathcal{H}_{f,j}^0 \right) =: \mathfrak{N} \times \left(\prod_j \text{Teich}_j \right)$$

gdzie $\mathcal{H}_{f,j}^0$ to składowa łukowa idyntityczności grupy $\mathcal{H}_{f,j}$ quasikonforemnych homeomorfizmów na $\text{Orb } U_j$ przemienych z f i nie ruszających wartości krytycznych dla iteracji f (w szczególności obrazów punktów krytycznych nie leżących w składowych okresowych). Podzielenie \mathfrak{N} przez odpowiednią grupę $\mathcal{H}_f^0|_{J(f)}$ nic nie zmienia, bo $\mathcal{H}_f^0|_{J(f)} = \{\text{id}|_{J(f)}\}$ (homotopia przemienna z f może się składać z idyntityczności na zbiorze Julii, patrz §4, koniec punktu 4).

[W rzeczywistości α w (5.3.2) jest injekcją. Injektywność wynika stąd, że homotopie w U_j , dokładniej krzywe $H_s : [0, 1] \rightarrow \mathcal{H}_{f,j}^0$ daje się rozszerzyć na “ s ” z otoczenia odcinka $[0, 1]$ w $\hat{\mathbb{C}}$. Stąd wynika, że homeomorfizmy w H_s rozszerzają się do idyntityczności na $J(f)$, a co więcej kleją się do quasikonforemnych homeomorfizmów $\hat{\mathbb{C}}$ (na przeciwobrazy U_j przenosimy je iteracjami f). Wynika to z tzw. λ -lematu Mañé, Sada, Sullivana, który będzie omówiony w dalszych rozdziałach.]

5.4. Zajmiemy się teraz podanym przez Sullivan’a oszacowaniem ilości orbit składowych okresowych, w szczególności brakującym w twierdzeniu 1 rozdziału V część I oszacowaniu liczby pierścieni Hermana. Chodzi głównie o pokazanie, jak wykorzystuje się opisane wyżej metody. Samo oszacowanie ma wartość głównie historyczną, bowiem istnieją lepsze oszacowania podane przez Shishikurę — będzie temu poświęcony oddzielny rozdział.

Przypomnijmy, że mamy

$$\begin{array}{ccc} \text{Teich}_f & \longrightarrow & \mathfrak{N} \times \left(\prod_j \text{Teich}_j \right) \\ & & \downarrow \\ & & Q^d \end{array}$$

Pokażemy, że

$$\dim(\mathfrak{N} \times \left(\prod_j \text{Teich}_j \right)) \leq \dim(Q^d) = 2(2d + 1).$$

Jeśli tak nie jest, to istnieje zanurzenie rodziny $\{\mu_t\} \subseteq \mathfrak{M}_f$ w $\mathfrak{N} \times \prod_j \text{Teich}_j$, $\mu_t \mapsto (\mu_t|_{J(f)}, \dots, \mu_t|_{\mathfrak{M}_{f,j}}, \dots / \dots, \mathcal{H}_{f,j}^0, \dots)$, gdzie parametr t jest m -wymiarowy, $t \in \mathbb{R}^m$, $\infty > m > 2(2d + 1)$, tak żeby rodzina $\{\mu_t\}$ zawierała standardową strukturę μ . μ_t sklejamy po prostu z rodzin struktur na $J(f)$ i każdym $\text{Orb } U_j$ (i przeciwobrazach), wykorzystując tylko skończoną liczbę indeksów $j = 1, \dots, K$ (na ewentualnie istniejących innych U_j bierzemy μ_0), tak, żeby różne μ_t na U_j , $j = 1, \dots, K$, reprezentowały różne elementy w Teich_j . Okazuje się, że różne μ_t reprezentują różne elementy Teich_f . To stwierdzenie jest oczywiste, homotopię w $\hat{\mathbb{C}}$ można obciąć do $\text{Orb } U_j$.

Co więcej przekształcenie T_f rodziny $\{\mu_t\}$ w $\text{Teich}_f / \text{Mod}_f \subseteq Q^d$ ma 0-wymiarowe przeciwobrazy punktów. Wynika to z faktu, że grupy modułowe $\text{Mod}_j = \mathcal{H}_{f,j} / \mathcal{H}_{f,j}^0$ działają na Teich_j dyskretnie (to znaczy orbita każdego punktu jest zbiorem dyskretnym).

Zatem $m \leq 2(2d + 1)$, sprzeczność, bo wzięliśmy $m > 2(2d + 1)$.

[W rzeczywistości Mod_f działa nieciągłe (to znaczy orbity są 0-wymiarowe) na całej przestrzeni Teich_f , bo tak działa na \mathfrak{N} , a Mod_j działa na Teich_j dyskretnie. Korzystaliśmy z tego, że α w (5.3.2) jest injekcją, patrz uwaga w kwadratowym nawiasie w 5.3.]

Zauważmy jeszcze, że liczba $2(2d + 1)$ może być wszędzie w tym rozdziale poprawiona do $2(2d - 1)$, w szczególności

$$(5.4.1) \quad \dim(\mathfrak{N} \times \left(\prod_j \text{Teich}_j \right)) \leq 2(2d + 1).$$

Jest tak dlatego, że na Q^d działa 6-wymiarowa (3-wymiarowa w sensie zespolonym) grupa homografii Aut , $g \mapsto hgh^{-1}$, $g \in Q^d$, h — homografia.

Każda orbita jest właściwym zanurzeniem Aut w Q^d , zbiór orbit stanowi 3-wymiarową zespoloną foliację i mamy w Q^d / Aut naturalną strukturę $2d - 2$ wymiarową strukturę różniczkową zespolonej.

Zauważmy teraz, że jeśli $T_f(\mu_t) \neq T_f(\mu_s)$ w Q^d dla $t, s \approx 0$ to $T_f(\mu_t)$ i $T_f(\mu_s)$ reprezentują różne klasy w Q^d / Aut . W przeciwnym razie istnieje homografia $h \approx \text{id}$, która sprzęga przekształcenia wymierne $T_f(\mu_t) = H_t \circ f \circ (H_t)^{-1}$ i $T_f(\mu_s) = H_s \circ f \circ (H_s)^{-1}$ odpowiadające μ_t, μ_s . Mamy przekształcenie quasikonforemne $H = (H_t)^{-1} \circ h \circ H_s$ bliskie identyczności, takie, że $H^*(\mu_t) = \mu_s$, przemienne z f . Można było w całej konstrukcji przyjąć, że za trzy wyróżnione punkty a,b,c, bierzemy jakies okresowe źródła dla f . Ponieważ są izolowane w zbiorze źródeł nie wyższego okresu, H ich nie rusza. H_t i H_s też ich nie ruszają z definicji, zatem nie rusza ich h , które musi być wobec tego identycznością.

Mamy więc ciągle przekształcenie $\{\mu_t\}$ z 0-wymiarowymi przeciwobrazami punktów nie tylko w Q^d , ale nawet w Q^d / Aut . (5.4.1) jest udowodnione.

Nietrudno jest udowodnić, że jeśli k oznacza liczbę rozłącznych trajektorii punktów krytycznych, które przecinają $\text{Orb } U_j$, to

- (i) $\dim(\text{Teich}_j) = 2k$, jeśli U_j , to dysk Siegela;
- (ii) $\dim(\text{Teich}_j) = 2(k + 1)$, jeśli U_j , to pierścień Hermanna;
- (iii) $\dim(\text{Teich}_j) = 2k$, jeśli U_j to basen bezpośredniego przyciągania ścieku (wtedy do k nie wliczamy trajektorii punktów krytycznych, które wpadają w ściek);
- (iv) $\dim(\text{Teich}_j) = 2(k - 1)$, jeśli U_j , to płatek dla punktu neutralnego wymiernego.

Skąd wynika na przykład, że

$$(5.4.2) \quad 2n_a + 2n_H + N \leq 4d - 2$$

gdzie n_a to liczba orbit okresowych ścieków, n_H liczba pierścieni Hermanna i N wymiar przestrzeni \mathfrak{N} . (Wykorzystujemy tu fakt, że $k \geq 1$ dla orbit ścieków. Niestety może być $k = 0$ dla płatków i dysków Siegela i ich liczba nie jest oszacowana w (5.4.2).)

Ta nierówność uzupełnia nierówność w twierdzeniu 1 rozdziału V §1 (gdzie brakowało oszacowania liczby pierścieni Hermanna). Udowodniliśmy w szczególności skończoność liczby orbit składowych okresowych $\hat{C} \setminus J(f)$.

Podane tu oszacowania poprawił Shishikura. Poświęćmy jego wynikom oddzielny rozdział.

Zauważmy na koniec, że udowodniliśmy nie tylko nieistnienie błędzącej składowej $\hat{C} \setminus J(f)$, ale także nieistnienie błędzącego zbioru dodatniej miary w $J(f)$, na którym wszystkie iteracje f^n są injekcjami (błędzącego, to znaczy $A \subseteq J(f)$ takiego, że $f^n(A) \cap f^m(A) = \emptyset$, dla każdych $n, m \geq 0$, $n \neq m$). Istotnie gdyby taki A istniał, to można by na nim wziąć dowolną mierzalną strukturę konforemną i poprzemnieść iteracjami f^{-n} i f^n na całą wielką orbitę $\text{WOrb } A$. Otrzymujemy $N = \dim \mathfrak{N} = \infty$, co przeczy (5.4.2).

Dodatek 1. Automorfizmy dysku Poincaré'go: podstawowe definicje.

Sfera Riemanna $\hat{\mathbb{C}}$ to płaszczyzna zespolona \mathbb{C} uzupełniona punktem w ∞ ze strukturą holomorficzną daną przez mapy $h_1, h_2 : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, $h_1(z) = z, h_2(z) = 1/z$. Standardowa metryka Riemanna na $\hat{\mathbb{C}}$ to przeniesiona przez $h_i, i = 1, 2$ metryka euklidesowa na \mathbb{C} podzielona przez funkcję $(1 + |z|^2)^2$ to znaczy dla $v, w \in T_z\mathbb{C}$, przestrzeni stycznej do \mathbb{C} w punkcie p , iloczyn skalarny

$$\langle v, w \rangle = (\operatorname{Re}(v)\operatorname{Re}(w) + \operatorname{Im}(v)\operatorname{Im}(w))/(1 + |z|^2)^2$$

($h_2 \circ h_1^{-1}$ jest izometrią w tej metryce.)

Grupą Möbiusa nazywamy grupę wszystkich przekształceń sfery Riemanna generowanych przez inwersje względem okręgów i symetrie względem prostych w \mathbb{C} . Oznaczmy ją przez $\operatorname{Möb}_2$. Grupę wszystkich elementów $\operatorname{Möb}_2$ zachowujących orientację będziemy oznaczać przez $\operatorname{Möb}_2^+$. Można sprawdzić, że

$$\operatorname{Möb}_2^+ = \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0 \right\}$$

Te przekształcenia stanowią grupę wszystkich holomorficznym automorfizmów $\hat{\mathbb{C}}$. Nazywa się je homografiami. Można teraz wyróżnić w $\operatorname{Möb}_2$ i $\operatorname{Möb}_2^+$ podgrupy A i odpowiednio A^+ elementów zachowujących dysk jednostkowy $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Są to odpowiednio wszystkie przekształcenia będące złożeniami inwersji względem okręgów prostopadłych do okręgu jednostkowego $\partial\mathbb{D} = \{|z| = 1\}$ lub homografie postaci $\lambda \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$, $|a| < 1, |\lambda| = 1$, tak zwane przekształcenia Blaschke. Są to dokładnie wszystkie konforemne, odpowiednio holomorficzne, automorfizmy \mathbb{D} .

Na \mathbb{D} rozpatruje się metrykę hiperboliczną: euklidesową pomnożoną przez funkcję $4(1 - |z|^2)^{-2}$. \mathbb{D} z tą metryką nazywa się dyskiem Poincaré'go lub płaszczyzną hiperboliczną lub Łobaczewskiego. Czasami rozpatruje się górna półpłaszczyznę $\mathbb{C}^+ = \{\operatorname{Im} z > 0\}$ będącą obrazem \mathbb{D} przy homografii $z \rightarrow -i(w + 1)/(w - 1)$, wtedy metryka hiperboliczna to euklidesowa podzielona przez $(\operatorname{Im} z)^2$.

Uwaga: pisząc wzory na metryki chodzi nam oczywiście o metryki w sensie Riemanna, to znaczy iloczyny skalarne w przestrzeniach stycznych. Przypominamy, że odległość dana przez taką metrykę w rozmaiłości różniczkowej X definiuje się przez

$$\operatorname{dist}(x, y) = \inf \left\{ \int_0^1 \|D\delta((d/dt)(t))\| dt : \delta : [0, 1] \rightarrow X, \text{ gładkich}, \delta(0) = x, \delta(1) = y \right\}$$

to znaczy przez infimum długości krzywych łączących x z y . Dla metryki hiperbolicznej będziemy używać oznaczenia dist_h .

Łatwo policzyć (przez całkowanie według powyższej definicji), że $\partial\mathbb{D}$ jest od każdego zbioru zwartego K w \mathbb{D} "nieskończenie daleko", to znaczy $\lim_{z \rightarrow \partial\mathbb{D}} \operatorname{dist}_h(z, K) = \infty$.

Geodezyjnymi są łuki okręgów lub odcinki prostych prostopadłych do $\partial\mathbb{D}$, lub \mathbb{R} w modelu górnej półpłaszczyzny.

Przypomnijmy jeden z wariantów Lematu Schwarz'a: dowolne przekształcenie holomorficzne $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ nie zwiększa odległości w metryce hiperbolicznej, to znaczy dla każdych $x, y \in \mathbb{D}$ mamy $\text{dist}_h(h(x), h(y)) \leq \text{dist}_h(x, y)$.

A jest dokładnie grupą izometrii w tej metryce. Istotnie, jeśli $g \in A$ to $g^{-1} \in A$ też. Wtedy g^{-1} lub, w przypadku gdy g^{-1} zmienia orientację, g^{-1} złożone z inwersją względem dowolnego okręgu prostopadłego do $\partial\mathbb{D}$, jest przekształceniem holomorficznym \mathbb{D} w \mathbb{D} więc też nie zwiększa odległości w metryce hiperbolicznej. Inwersja taka jak wyżej jest izometrią. Wniosek jest taki że g jest izometrią. Dowód, że każda izometria jest elementem A nie jest dużo trudniejszy, pozostawiamy go czytelnikowi.

Każde przekształcenie $g(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in \text{M}^+\text{ob}^+$ ma dokładnie 1 lub 2 punkty stałe, rozwiązania równania $\frac{az+b}{cz+d} = z$. Łatwo jest policzyć że jeśli g jest przekształceniem Blaschke to jest przemienne z inwersją względem $\partial\mathbb{D}$. Zatem ta inwersja przeprowadza zbiór punktów stałych dla g w siebie. Stąd wynika, że albo mamy parę lub jeden punkt stały w $\partial\mathbb{D}$, albo jeden punkt stały leży w \mathbb{D} , a drugi poza $\text{cl}\mathbb{D}$. W związku z tym przekształcenia należące do A^+ różne od identyczności klasyfikuje się następująco:

1. eliptyczne: mające dokładnie jeden punkt stały w \mathbb{D} .
2. paraboliczne: mające dokładnie jeden punkt stały w $\partial\mathbb{D}$.
3. hiperboliczne: mające dwa punkty stałe w $\partial\mathbb{D}$.

Jeśli $g \in A^+$ ma jakiś punkt stały $z_0 \in \mathbb{D}$ to sprzęgając g homografią $h = (z - z_0)/(1 - \bar{z}_0 z)$, to znaczy biorąc $h \circ g \circ h^{-1}$ przenosimy z_0 w 0. Wtedy $h \circ g \circ h^{-1}$ jest obrotem $z \mapsto e^{it}z, t \in \mathbb{R}$.

Jeśli istnieje punkt stały $z_0 \in \partial\mathbb{D}$, to można go przenieść w ∞ ; rozpatrując model górnej półpłaszczyzny. Homografia $g : \mathbb{C}^+ \rightarrow \mathbb{C}^+$ taka, że $g(\infty) = \infty$ ma postać $z \mapsto az + b, a, b \in \mathbb{R}$.

Jeśli teraz ∞ jest jedynym punktem stałym to $a = 1$, zatem przekształcenie paraboliczne jest sprzężone z $z \mapsto z + t, t \in \mathbb{R}, t \neq 0$.

Jeśli istnieje jeszcze drugi punkt stały to można go przenieść w 0 i wtedy $b = 0$, zatem przekształcenie hiperboliczne jest sprzężone z $z \mapsto zt, t \in \mathbb{R}^+, t \neq 1$.

Grupy automorfizmów nazywamy ciągłymi grupami jednoparametrowymi odpowiednio eliptycznymi, parabolicznymi, hiperbolicznymi jeśli po sprzężeniu stają się grupami

$$z \mapsto e^{it}z, \quad z \mapsto z + t, \quad z \mapsto tz$$

Mówimy, że podgrupa $\Gamma \subset A^+$ działa w sposób całkowicie nieciągły jeśli dla każdego $z \in \mathbb{D}$ istnieje otoczenie U takie, że $g(U) \cap U = \emptyset$ dla każdego $g \in \Gamma, g \neq \text{id}$. Taką podgrupę nazywamy grupą Fuchsa.

Czasami grupą Fuchsa nazywa się, ogólniej, podgrupa grupy A lub A^+ taka, że dla każdego $z \in \mathbb{D}$ istnieje otoczenie U takie, że $g(U) \cap U = \emptyset$ dla każdego, z wyjątkiem skończonej liczby, $g \in \Gamma$. Jest to równoważne temu, że Γ jest dyskretną podgrupą A, A^+ . Będziemy mówili wtedy, że mamy grupę Fuchsa w szerszym sensie.

Przypominamy ogólny fakt topologiczny: Jeśli $\Gamma \subset A^+$ jest grupą działającą w sposób całkowicie nieciągły na \mathbb{D} , to \mathbb{D}/Γ jest powierzchnią ze strukturą zespoloną przeniesioną z \mathbb{D} , $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}/\Gamma$ jest nakryciem holomorficznym i grupa podstawowa $\pi_1(\mathbb{D}/\Gamma) = \Gamma$.

(Definicja nakrycia jest przypomniana w Dodatku 2.. Nakrycie nazywa się holomorficznym jeśli przekształcenie z przestrzeni nakrywającej do bazy jest holomorficzne.)

Jeśli Γ jest grupą Fuchsa, to, dzięki temu, że jej elementy są izometriami w metryce hiperbolicznej, można wprowadzić na \mathbb{D}/Γ metrykę hiperboliczną, po prostu tę z \mathbb{D} .

Wtedy z Lematu Schwarza wynika, że przekształcenie holomorficzne z \mathbb{D} do \mathbb{D}/Γ nie zwiększa odległości hiperbolicznych.

Sytuacja opisana powyżej pojawia się w tezie fundamentalnego Twierdzenia o Uniformizacji:

Każda powierzchnia Riemanna (jednowymiarowa rozmaitość zespolona) ma nakrycie holomorficzne przestrzenią nakrywającą $\hat{\mathbb{C}}$, \mathbb{C} lub \mathbb{D} .

W szczególności przestrzenią nakrywającą $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ jest \mathbb{D} . Udowodnimy ten szczególny przypadek Twierdzenia o Uniformizacji w Dodatku 2. i skorzystamy z tego w dowodzie Twierdzenia Montela sposobem opisanym w Uwadze 3.. Grupa Fuchsa Γ taka, że $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\} = \mathbb{D}/\Gamma$ będzie zresztą opisana już za chwilę, to będzie grupa G_\diamond .

Grupa Möbiusa Möb_2^+ jest izomorficzna z $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$, to jest z grupą macierzy

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ac - bd = 1$$

podzieloną przez grupę składającą się z macierzy $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Patrząc na model górnej półpłaszczyzny płaszczyzny hiperbolicznej widać, że $A^+ = \text{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Ważną rolę odgrywa grupa Fuchsa $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$, zwana grupą modułową. Wykorzystamy w Dodatku 2. jej podgrupę Γ_\diamond generowaną przez

$$z \mapsto z + 2, \quad z \mapsto z/(2z + 1)$$

Na rysunku 1 pokazane jest rozbiecie \mathbb{C}^+ na dziedziny fundamentalne grupy modułowej.

(Dziedziną fundamentalną dla grupy Fuchsa w szerszym sensie Γ , nazywamy obszar otwarty U taki, że dla każdego z zbiór Γz przecina się z $\text{cl} U$ w co najmniej 1 punkcie, a z U w najwyżej 1 punkcie.)

Na rysunku 2 przedstawiona jest dziedzina fundamentalna grupy G_\diamond .

rysunki 1,2, Ford str. 80,82

Bibliografia:

L.R.Ford, Automorphic Functions, Chelsea Publ. Comp., ed.1 (1929), ed.2 (1951).

Dodatek 2. Dowód Twierdzenia Montela.

Podamy tutaj dowód Twierdzenia Montela, na którym opiera się klasyczna część teorii iteracji funkcji wymiernych.

Twierdzenie Montela. Niech $f_n : U \rightarrow \hat{\mathcal{C}}$ będzie ciągiem funkcji holomorficznym z otwartego obszaru $U \subset \hat{\mathcal{C}}$ w sferę Riemanna $\hat{\mathcal{C}}$. Załóżmy, że istnieją trzy różne punkty $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathcal{C}}$ takie, że dla każdego i, n $z_i \notin f_n(U)$. Wtedy rodzina funkcji (f_n) jest normalna w sensie Montela, to znaczy, że dla każdego ciągu f_{n_j} istnieje podciąg niemal jednostajnie zbieżny (w skrócie n.j.z.), czyli jednostajnie zbieżny na każdym zwartym zbiorze $K \subset U$.

Dowód.

1. Załóżmy najpierw, że $\sup_n \sup_{z \in U} |f_n(z)| \leq C < \infty$.

Można zakładać, że $U = \mathbb{D}$ gdzie \mathbb{D} oznacza dysk $\{|z| < 1\}$ w \mathcal{C} . Można bowiem pokryć U sumą przeliczalnej rodziny dysków topologicznych $h_t(\mathbb{D})$, gdzie h_t to biholomorficzne przekształcenia \mathbb{D} w U , i wybierać kolejno podciągi n.j.z. z $f_n \circ h_t$ metodą przekątniową.

Należy jeszcze zauważyć, że jeśli f_{n_j} jest n.j.z. na każdym $h_t(\mathbb{D})$ to dla każdego zwartego zbioru $K \subset U$, ponieważ istnieje $r < 1$ takie, że suma dysków $D_t = h_t(\{|z| < r\})$ pokrywa K , mamy jednostajną zbieżność f_{n_j} na każdym $K \cap \text{cl}D_t$. Stąd wynika jednostajna zbieżność na K .

Ustalmy dowolne $r < 1$. Z nierówności Cauchy'ego mamy

$$\sup_{|z| \leq r} |f'_n(z)| \leq C/(1-r)^2.$$

Zatem wszystkie funkcje f_n są jednakowo ciągłe na $K_r = \{|z| \leq r\}$, bo mają wspólnie ograniczoną stałą Lipschitza $C/(1-r)^2$. Istnienie podciągu jednostajnie zbieżnego na K_r wynika teraz z Twierdzenia Arzeli-Ascoliego. Żeby uzyskać n.j.z. na \mathbb{D} wystarczy wziąć ciąg $r_n \nearrow 1$ i wybierać podciągi zbieżne na K_{r_n} metodą przekątniową.

2. Zmieniając współrzędne na sferze Riemanna przez odpowiednią homografię można przyjąć, że $(z_1, z_2, z_3) = (0, 1, \infty)$. Ideą dalszej części dowodu jest zastąpienie funkcji f_n przez funkcje \tilde{f}_n o wartościach w \mathbb{D} i powołanie się na 1 krok dowodu. Do tego mogą służyć różne funkcje $\Phi : \mathbb{D} \rightarrow \hat{\mathcal{C}} \setminus \{0, 1, \infty\}$, zwane funkcjami automorficznymi. Oto jeden z wariantów:

Niech $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ będą geodezyjnymi w \mathbb{D} z metryką hiperboliczną (faktycznie łukami okręgów prostopadłych do $\partial\mathbb{D}$), takimi, że trójkąt hiperboliczny Δ o wierzchołkach w punktach przecięcia tych geodezyjnych ma kąty w tych wierzchołkach równe π/q gdzie q jest dowolną liczbą całkowitą ≥ 4 .

Z Twierdzenia Riemanna wynika istnienie biholomorficznego przekształcenia Φ z \mathbb{D} na górną półpłaszczyznę $\mathcal{C}^+ = \{\text{Im}z > 0\}$. Z Twierdzenia Carathéodory'ego wynika, że Φ

przedłuża się do homeomorfizmu $\text{cl}\Delta$ na $\{\text{Im}z \geq 0\}$. Składając Φ z odpowiednią homografią można założyć, że Φ przeprowadza wierzchołki Δ na $0, 1, \infty$. (Można zamiast powoływać się na Twierdzenia Riemanna i Caratheodory'ego podać konkretny wzór na Φ .)

Przedłużymy teraz Φ wzdłuż dowolnej gładkiej krzywej $\delta :]0, 1[\rightarrow \mathbb{D}$ zaczynającej się w Δ .

Oznaczmy inwersje względem γ_j przez I_j , $j = 0, 1, 2$. Będziemy grupę generowaną przez I_j oznaczać symbolem $\Gamma(I_0, I_1, I_2)$

Dla każdej krawędzi γ_j Φ przedłuża się holomorficznie wzdłuż części \mathbb{D} będącej w trójkącie $I_j(\mathbb{D})$ przez symetrię (Zasada Symetrii). Obraz $\Phi(I_j(\mathbb{D}))$ będzie dolną półpłaszczyzną $\mathcal{C}^- = \{\text{Im}z < 0\}$. Nastąpiło odbicie obrazu względem $\Phi(\gamma_j)$ to znaczy półprostej w \mathbb{R} od $-\infty$ do 0 , odcinka $(0, 1)$ lub półprostej $(1, \infty)$.

W otoczeniu wierzchołka p trójkąta \mathbb{D} będącego przecięciem powiedzmy γ_0 i γ_1 , poza samym punktem p , definiujemy Φ przez kolejne odbicia względem trójkątów dookoła p . Sumę tych trójkątów nazywamy gwiazdą wokół p i oznaczamy $S(p)$.

Dokładniej, te odbicia g_j , $j = 1, \dots, 2q$ można zdefiniować indukcyjnie tak:

$$g_1 = I_0, \quad g_2 = g_1 I_1 g_1^{-1}, \quad \dots, \quad g_n = g_{n-1} I_{n \pmod{2}} g_{n-1}^{-1}$$

Z założenia o kątach Δ i z tego, że nasze przekształcenia to izometrie w metryce hiperbolicznej wynika, że $g_{2q} \circ g_{2q-1} \circ \dots \circ g_1 = \text{id}$. Łatwo zauważyć, że to oznacza po prostu $(I_1 I_0)^q = \text{id}$.

Ponieważ Φ w otoczeniu punktu p jest ograniczona, Φ przedłuża się holomorficznie na gwiazdę $S(p)$ włącznie z p . Co więcej, można przedłużyć Φ na $\bigcup_{j=0,1,2} S(p_j)$ gdzie p_j to wierzchołki Δ .

Wynika to stąd, że przecięcie $\bigcup_{j=0, \dots, j_0} S(p_j)$ z $S(p_{j_0+1})$ jest spójne, zatem mając Φ rozszerzone z Δ na $\bigcup_{j=0, \dots, j_0} S(p_j)$ i z Δ na $S(p_{j_0+1})$ otrzymujemy jednoznacznie zdefiniowane rozszerzenie na $\bigcup_{j=0, \dots, j_0+1} S(p_j)$ dla $j_0 = 0, 1$.

Powołaliśmy się tutaj na fakt, że jeśli na obszarach U_1 i U_2 określone są odpowiednio funkcje holomorficzne h_1 i h_2 takie, że $h_1 = h_2$ na jakimś obszarze $V \subset U_1 \cap U_2$ to $h_1 = h_2$ na składowej spójności $U_1 \cap U_2$ zawierającej V .

Wróćmy teraz do naszej krzywej δ zaczynającej się w Δ . Będziemy przedłużać wzdłuż niej Φ po kawałku.

Jeśli przedłużyliśmy już Φ do punktu $z \in g(\Delta)$ (dokładniej do t w odcinku parametrów takiego, że $\delta(t) = z \in g(\Delta)$) dla pewnego $g \in \Gamma(I_0, I_1, I_2)$, to przedłużamy jak poprzednio Φ na zbiór $\bigcup_{p \in \text{wierzchołki}g(\Delta)} S(p)$ co daje przedłużenie Φ na δ od z aż do wyjścia z tego zbioru. Ponieważ elementy $\Gamma(I_0, I_1, I_2)$ to izometrie w metryce hiperbolicznej i $\bigcup_{p \in \text{wierzchołki}g(\Delta)} S(p) = g(\bigcup_{p \in \text{wierzchołki}\Delta} S(p))$ mamy

$$(1) \quad \text{dist}(g(\Delta), \bigcup_{p \in \text{wierzchołki}g(\Delta)} S(p)) = \text{Const} > 0,$$

dystans niezależny od g . Zatem po skończonej liczbie kroków przedłużymy Φ na całe δ , bo δ jest zbiorem zwartym w \mathbb{D} więc skończonej długości hiperbolicznej.

Po przedłużeniu Φ wzdłuż każdej krzywej $\delta \subset \mathbb{D}$ wychodzącej z Δ powołujemy się na twierdzenie o monodromii.

Mówi ono w jednym ze swoich wariantów, że jeśli funkcja holomorphyzna przedłuża się wzdłuż każdej krzywej leżącej w obszarze jednospójnym U zaczynającej się z jakiegoś punktu p , to przedłuża się jednoznacznie na U .

Zatem Φ przedłuża się jednoznacznie na \mathbb{D} .

Zauważmy na koniec, że $\Phi|_{\mathbb{D} \setminus \Phi^{-1}(0,1,\infty)}$ jest nakryciem. Przypominamy definicję: ciągła funkcja $f : X \rightarrow Y$ dla przestrzeni topologicznych X, Y jest nazywana nakryciem jeśli każdy punkt $x \in X$ ma otoczenie U_x takie, że $f^{-1}(x)$ jest sumą rozłącznych zbiorów otwartych, które f przeprowadza homeomorficznie na U_x . X nazywamy bazą nakrycia, Y przestrzenią nakrywającą. Oto dowód:

Z definicji Φ wynika, że dla każdego $z \in \mathcal{C} \setminus \{0, 1\}$, mamy $\Phi^{-1}(z) \subset \Gamma(I_0, I_1, I_2) \cap A^+$. Dokładniej, mamy tutaj nawet równość, bo skoro dla każdego $j_1, j_2 \in \{0, 1, 2\}$ mamy $\Phi I_{j_1} I_{j_2} = \Phi$ na Δ z definicji Φ , to $\Phi I_{j_1} I_{j_2} = \Phi$ na \mathbb{D} . Stąd otrzymujemy $\Phi g = \Phi$ dla każdego g będącego złożeniem przekształceń postaci $I_{j_1} I_{j_2}$.

Weźmy teraz jakieś $z \in \mathcal{C} \setminus \{0, 1\}$, powiedzmy $\text{Im} z > 0$. Naszym kandydatem na U_z (oznaczenie z powyższej definicji nakrycia) będzie górna półpłaszczyzna $\mathcal{C}^+ = \{\text{Im} w > 0\}$. Jak już pokazaliśmy $\Phi^{-1}(\mathcal{C}^+) = \bigcup_{g \in \Gamma(I_0, I_1, I_2) \cap A^+} g(\Delta)$. Wystarczy jeszcze zauważyć, że $g_1(\Delta) \cap g_2(\Delta) = \emptyset$ jeśli $g_1 \neq g_2$. Gdyby bowiem $U := g_1(\Delta) \cap g_2(\Delta) \neq \emptyset$, to ponieważ z definicji Φ mamy $\Phi g_1 = \Phi g_2$, to składając to przekształcenie z $(\Phi|_U)^{-1}$ otrzymujemy $g_1 = g_2$ na g_j^{-1} , $j = 1, 2$ zatem $g_1 = g_2$.

Jeśli z leży w dolnej półpłaszczyźnie: \mathcal{C}^- , to znaczy $\text{Im} z < 0$, to w powyższym rozumowaniu zastępujemy Δ przez $J_0(\Delta)$, wtedy $U_z = \mathcal{C}^-$. Jeśli $z \in \mathbb{R}$ to bierzemy $U_z = \mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^- \cup L$, gdzie $L = (-\infty, 0), (0, 1)$ lub $(1, \infty)$ tak, że $z \in L$.

3. Każde przekształcenie $f_n : \mathbb{D} \rightarrow \mathcal{C} \setminus \{0, 1\}$ można podnieść do $\tilde{f}_n : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, tak, żeby $\Phi \circ \tilde{f}_n = f_n$ i $\tilde{f}_n(0) \in \text{cl}(\Delta \cup I_0(\Delta))$. Wynika to znowu z twierdzenia o monodromii. Istotnie, z tego, że obcięcie $\Phi : \Phi^{-1}(\mathcal{C} \setminus \{0, 1\}) \rightarrow \mathcal{C} \setminus \{0, 1\}$ jest nakryciem wynika, że $\Phi^{-1} \circ f_n$ rozszerza się wzdłuż krzywych w \mathbb{D} . Korzystamy teraz z tego, że dysk \mathbb{D} jest jednospójny.

(W rzeczywistości można się tu powołać na twierdzenie topologiczne: dla nakrycia przekształcenie ciągle przestrzeni jednospójnej w bazę nakrycia podnosi się do przestrzeni nakrywającej.)

Z pierwszej części dowodu wynika, że istnieje podciąg \tilde{f}_{n_j} n.j.z., $\tilde{f}_{n_j} \rightarrow \tilde{f}_\infty$. Ponieważ $\tilde{f}_n(0) \in \text{cl}(\Delta \cup I_0(\Delta))$, otrzymujemy $\tilde{f}_\infty(0) \in \text{cl}(\Delta \cup I_0(\Delta))$. Stąd wynika, że $\tilde{f}_\infty(\mathbb{D}) \cap \partial \mathbb{D} = \emptyset$. W przeciwnym razie z zasady maximum wynikałoby, że $\tilde{f}_\infty|_{\mathbb{D}} = \text{Const} \in \partial \mathbb{D}$.

Stąd wynika, że $\Phi \circ \tilde{f}_{n_j}$, czyli f_{n_j} jest n.j.z. do $\Phi \circ \tilde{f}_\infty$. To kończy dowód Twierdzenia Montela.

Uwaga 1. Grupa $\Gamma(I_0, I_1, I_2)$ jest grupą Fuchsa (w szerszym sensie, definicje czytelnik znajdzie w Dodatku 1.). Zostało to prawie udowodnione w punkcie 2. dowodu Twierdzenia Montela. Udowodniliśmy tam, że trójkąty $g(\Delta)$, $g \in \Gamma(I_0, I_1, I_2)$ są parami rozłączne. Jeśli $z \in g_0(\Delta)$ dla pewnego $g_0 \in \Gamma(I_0, I_1, I_2)$ to można za U w definicji grupy Fuchsa wziąć $g_0(\Delta)$. Jeśli z jest na krawędzi lub w wierzchołku któregoś z trójkątów, to dla małego otoczenia U mamy dla $g \neq \text{id}$, $g(U) \cap U \neq \emptyset$ tylko dla g będącego inwersją względem tej krawędzi lub odpowiednio dla g przeprowadzającego ten trójkąt w jeden spośród $2q - 1$ pozostałych trójkątów o tym samym wierzchołku.

Udowodniliśmy przy okazji, że $\Gamma(I_0, I_1, I_2)$ jest izomorficzna z grupą wolną generowaną przez I_0, I_1, I_2 podzieloną przez relacje $I_j^2 = \text{id}$ i $(I_{j_1} I_{j_2})^q = \text{id}$ dla $j = 0, 1, 2$ i $j_1, j_2 = 0, 1, 2$, $j_1 \neq j_2$.

Uwaga 2. Funkcja Φ opisana wyżej jest przykładem funkcji automorficznej, to znaczy funkcji holomorficznej o wartościach w \mathcal{C} stałej na orbitach działania jakiejś podgrupy grupy Möbiusa, określonej na jakiejś dziedzinie niezmienniczej pod działaniem wszystkich elementów tej podgrupy. Tutaj dziedziną Φ jest \mathbb{D} i Φ jest automorficzna względem grupy $\Gamma(I_0, I_1, I_2) \cap A^+$. Dziedziną fundamentalną jest suma dwóch przylegających do siebie trójkątów (razem ze wspólną krawędzią), funkcja Φ jest nazywana funkcją trójkątną. Oczywiście można było rozpatrywać trójkąt Δ z dowolnymi kątami postaci $\pi/q_0, \pi/q_1, \pi/q_2$ dla liczb naturalnych q_0, q_1, q_2 takich, że $1/q_0 + 1/q_1 + 1/q_2 < 1$.

Można rozpatrywać także $q_0 = q_1 = q_2 = \infty$. W tym przypadku analogiczna funkcja automorficzna Φ nazywana jest funkcją modułową λ . Przy używaniu jednak takiej funkcji trójkątnej dowód Twierdzenia Montela musi być trochę zmieniony, patrz następna Uwaga.

Uwaga 3. Inny wariant dowodu Twierdzenia Montela. Niech Δ będzie trójkątem hiperbolicznym o wierzchołkach w $\partial\mathbb{D}$. Wtedy $\Phi : \mathbb{D} \rightarrow \mathcal{C} \setminus \{0, 1\}$ może być zdefiniowane tak samo jak w poprzednim dowodzie Twierdzenia Montela, nie ma nawet problemu z przedłużaniem Φ wzdłuż krzywych przechodzących przez wierzchołki trójkątów bo wierzchołki nie leżą w \mathbb{D} .

Dla każdej gładkiej krzywej $\delta :]0, 1[\rightarrow \mathbb{D}$ przedłużenie Φ wzdłuż tej krzywej uzyskujemy po skończonej liczbie kroków (odbić przez krawędzie kolejnych trójkątów). Wynika to stąd, że dla dowolnego trójkąta $g(\Delta)$, $g \in \Gamma(I_0, I_1, I_2)$ (gdzie I_j oznaczają inwersje względem krawędzi Δ) i dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset \mathbb{D}$ mamy

$$(2) \quad \text{dist}_h \left((g(\Delta) \cap K, \partial(\text{cl}(g(\Delta) \cup gI_0(\Delta) \cup gI_1(\Delta) \cup gI_2(\Delta)) \cap K) \right) \geq \text{Const} > 0,$$

gdzie Const zależy tylko od K .

(Czytelnik może porównać to z własnością (1).)

Grupa $\Gamma(I_0, I_1, I_2) \cap A^+$ jest teraz grupą wolną o generatorach

$$I_{j_1} I_{j_2}, \quad j_1, j_2 = 0, 1, 2, \quad j_1 \neq j_2.$$

To jest dokładnie grupa Γ_\diamond o której mowa w Dodatku 1. Teraz $\Phi : \mathbb{D} \rightarrow \mathcal{C} \setminus \{0, 1\}$ jest nakryciem. Właśnie udowodniliśmy Twierdzenie o Uniformizacji dla $\mathcal{C} \setminus \{0, 1\}$, (patrz Dodatek 1).

Dodatkowego rozumowania wymaga 3 krok dowodu:

Może się zdarzyć, że $\tilde{f}_{n_j} \rightarrow \tilde{f}_\infty = \text{Const} \in \partial \mathcal{ID}$. Wtedy nie ma funkcji $\Phi \circ \tilde{f}_\infty$ na \mathcal{ID} . Zbadajmy więc dokładniej ten przypadek:

Przypomnijmy, że dla każdego n_j mamy $\tilde{f}_{n_j}(0) \in \text{cl}(\Delta \cup I_0(\Delta))$ zatem $\tilde{f}_{n_j}(0) \rightarrow p$, gdzie $p \in \partial \mathcal{ID}$ jest jednym z wierzchołków Δ lub $I_0(\Delta)$.

Ponieważ $\Phi|_{\text{cl}(\Delta \cup I_0(\Delta))}$ jest funkcją ciągłą, mamy

$$\Phi \circ \tilde{f}_{n_j}(0) = f_{n_j}(0) \rightarrow \Phi(p),$$

gdzie $\Phi(p) = 0, 1$ lub ∞ , powiedzmy, że $\Phi(p) = 0$.

Zauważmy teraz następującą własność metryki hiperbolicznej na $\mathcal{C} \setminus \{0, 1\}$: Jeśli $z_n \in \mathcal{C} \setminus \{0, 1\}$ jest dowolnym ciągiem punktów zbieżnym do 0, to dla każdego $0 < r < 1$ dla $S_r := \{|z| = r\}$, mamy $\text{dist}_h(z_n, S_r) \rightarrow \infty$. (Z tego można wywnioskować, że 0, i podobnie 1 i ∞ są "nieskończenie daleko" od wszystkich zwartych podzbiorów $\mathcal{C} \setminus \{0, 1, \infty\}$.)

Faktycznie, przypuśćmy, że $\text{dist}_h(z_n, S_r) \leq \text{Const} < \infty$. Oznaczmy przez \tilde{S}_r łuk w $\text{cl}(\Delta \cup I_0(\Delta))$ taki, że $\Phi(\tilde{S}_r) = S_r$. Oznaczmy $Z_n = \Phi^{-1}(z_n)$. Wtedy $\text{dist}_h(Z_n, \tilde{S}_r) = \text{dist}_h(z_n, S_r) \leq \text{Const}$ bo metryka hiperboliczna na $\mathcal{C} \setminus \{0, 1\}$ jest przeniesioną przez Φ metryką hiperboliczną na \mathcal{ID} .

Mamy $\text{cl}\tilde{S}_r \subset \mathcal{ID}$, a Z_n dążą do $\partial \mathcal{ID}$ bo $z_n \rightarrow 0$. Zatem $\text{dist}_h(Z_n, \tilde{S}_r) \rightarrow \infty$ co wynika z tego, że $\partial \mathcal{ID}$ jest "nieskończenie daleko" w sensie odległości hiperbolicznej, od każdego zbioru zwartego w \mathcal{ID} (patrz Dodatek 1.). Otrzymaliśmy sprzeczność.

Niech $K \subset \mathcal{ID}$ będzie dowolnym zbiorem zwartym, takim, że $0 \in K$.

Przypomnijmy (Dodatek 1), że f_{n_j} nie zwiększają odległości hiperbolicznych.

Zatem średnica w metryce hiperbolicznej każdego zbioru $f_{n_j}(K)$ jest nie większa od średnicy K i $f_{n_j}(0) \rightarrow 0$, Stąd wynika, że dla dowolnego $0 < r < 1$ mamy $f_{n_j}(K) \subset \{|z| \leq r\}$ dla n_j dostatecznie dużych.

Gdyby bowiem $f_{n_j}(K)$ zawierał jakiś punkt spoza $\{|z| \leq r\}$ to jego odległość od $f_{n_j}(0)$ byłaby większa niż $\text{dist}_h(S_r, f_{n_j}(0))$, bo ten punkt i $f_{n_j}(0)$ leżą po różnych stronach S_r dla n_j dużych, a z definicji odległość to infimum długości krzywych gładkich łączących dwa punkty. Każda taka krzywa musi przecinać S_r . Ponieważ $\text{dist}_h(S_r, f_{n_j}(0)) \rightarrow \infty$, otrzymujemy dla średnic $\text{diam}_h(f_{n_j}(K)) \rightarrow \infty$, sprzeczność

Stąd wynika, że $f_{n_j}|_K \rightarrow 0$ jednostajnie.

Bibliografia.

A. Beardon, Iteration of Rational Functions. Graduate Texts in Math. 132, Springer, 1991

P. Blanchard, Complex analytic dynamics on the Riemann sphere. Bull. AMS 11 (1984), 85-141

I. Carleson,

M. Lyubich, The dynamics of rational transformations: the topological picture. Russian math. Surveys 41.4 (1986), 43-117. Usphi Mat. Nauk 41.4 (1986), 35-95.

J. Milnor, Dynamics in one complex variable, Preprint 1990/#5, Institute for Mathematical Sciences, SUNY at Stony Brook.