METODY FORMALIZMU TERMODYNAMICZNEGO W 1-WYMIAROWEJ DYNAMICE, RZECZYWISTEJ I ZESPOLONEJ

FELIKS PRZYTYCKI†

Contents

1. Formalizm termodynamiczny, wstęp

Twórcy teorii formalizmu termodynamicznego i zastosowań w teorii układów dynamicznych, czego niektóre późniejsze wątki są przedstawione w tym artykule, to m.in. Yakov Sinai , Rufus Bowen i David Ruelle, patrz np. [68], [66], [3].

Ruelle napisał: "Formalizm termodynamiczny jest rozwijany od czasów W. G. Gibbs'a do opisu [...] układów fizycznych składających się z wielkiej liczby segmentów". W szczególności rozważa się *przestrzeń konfiguracyjną* Ω funkcji $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{A}$ na kracie $\mathbb{Z}^n$ z oddziaływaniami między wartościami w $\mathbb{A}$ nad swoimi węzłami kraty, np. wartościami tzw. ,,spinów" w modelu Isinga ferromagnetyku. Rozważa się rozkłady prawdopodobieństwa na Ω, niezmiennicze dla przesunięć kraty, zwane *stanami równowagi* dla funkcji potencjału.

Date: April 29, 2018.

Artykuł jest nieznacznie zmodyfikowaną i przetłumaczoną na język polski wersją artykułu opublikowanego w Proceedings of the ICM Rio de Janeiro 2018.

Dla danego przekształcenia $f : X \to X$ rozważa się jako przestrzeń konfiguracyjną zbiór wszystkich trajektorii $n \mapsto (f^n(x))_{n\in\mathbb{Z}_+}$ lub $n \mapsto \Phi(f^n(x))_{n\in\mathbb{Z}_+}$ dla funkcji testowej $\Phi : X \to Y$.

Następujący prosty fakt [3, Lemma 1.1] i [66, Introduction], [60, Introduction], wynikający z nierówności Jensena zastosowanej do funkcji logarytm, znajduje się w sercu formalizmu termodynamicznego:

Lemat 1.1 (Skończona zasada wariacyjna)**.** *Dla danych liczb rzeczywistych* $\phi_1, \dots, \phi_d$*, funkcja* $F(p_1, \dots p_d) := \sum_{i=1}^n -p_i \log p_i + \sum_{i=1}^d p_i\phi_i$ *zdefiniowana na sympleksie* $\{(p_1, \dots, p_d) : p_i \geq 0, \sum_{i=1}^d p_i = 1\}$ *osiąga wartoś'c maksymalną* $P(\phi_1, \dots, \phi_d) = \log \sum_{i=1}^d e^{\phi_i}$ *dokładnie w* $\widehat{p}_j = e^{\phi_j} \left(\sum_{i=1}^d e^{\phi_i}\right)^{-1}$.

Możemy uważać $i \mapsto \phi_i, i = 1, \dots, d$ za *funkcję potencjału* i nazwać $\widehat{p}_i$ rozkładem prawdopodobieństwa na skończonej przestrzeni $\{1, \dots, d\}$. $P(\phi_1, \dots, \phi_d)$ jest nazywane *ciśnieniem* albo *wolną energią*, patrz [66].

Niech $f : X \to X$ będzie ciągłym przekształceniem zwartej przestrzeni metrycznej X w siebie, a $\phi : X \to \mathbb{R}$ funkcją ciągłą (potencjałem). Definiujemy *ciśnienie topologiczne* inna nazwa: *wolna energia* następująco:

Definicja 1.2.

$$P_{\mathrm{var}}(f, \phi) = \sup_{\mu\in\mathcal{M}(f)} \left(h_\mu(f) + \int_X \phi \, d\mu \right), \tag{1.1}$$

gdzie $\mathcal{M}(f)$ jest zbiorem wszystkich f-niezmienniczych probabilistycznych miar borelowskich na X. Czasami piszemy $\mathcal{M}(f, X)$. Symbol $h_\mu(f)$ oznacza teoriomiarową entropię (inne nazwy: metryczną, Kolmogorowa-Sinai'a). Czasami $h_\mu(f)+ \int_X \phi \, d\mu$ nazywana jest *wolną energią miary* μ.

Przypomnijmy, [60], [Walters], [71], że

$$h_\mu(f) = \sup_{\mathbb{A}} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{A\in\mathbb{A}^n} -\mu(A) \log \mu(A),$$

gdzie supremum jest wzięte po wszystkich skończonych rozbiciach $\mathbb{A}$ przestrzeni X na zbiory mierzalne, gdzie $\mathbb{A}^n := \bigvee_{j=0,\dots,n} f^{-j}\mathbb{A}$. Zauważmy, że to przypomina sumę $\sum_{i=1}^n -p_i \log p_i$ w Lemacie 1.1.

Dla $\phi \equiv 0$ ciśnienie nazywa się *entropią topologiczną* i jest zdefiniowana jako supremum entropii metrycznych po wszystkich miarach jak wyżej.

Ciśnienie topologiczne (entropia topologiczna) może być też zdefiniowane na szereg sposobów, np. (6.2) i wtedy jego równość wyrażeniu we wzorze (1.1) jest nazywana *zasadą wariacyjną*. To wyjaśnia oznaczenie P_{var}. Definicję ciśnienia wzorem (1.1) nazywa się definicją wariacyjną. Każdą miarę $\mu \in \mathcal{M}(f)$ dla której supremum w (1.1) jest osiągnięte nazywa się stanem lub miarą *równowagi*.

Przykłady modelowe, nazywane *expanding*, *jednostajny expanding*, hiperboliczne (w wymiarze 1) lub rozciągające, są dane przez przekształcenia $f : U \to \mathbb{R}^n$ klasy C^1, zdefiniowane na otoczeniu U dowolnego zbioru zwartego $X \subset \mathbb{R}^n$, takie, że istnieje $C > 0, \lambda > 1$ takie, że dla każdej liczby naturalnej n, $x \in X$ i v stycznego do $\mathbb{R}^n$ w x

$$||Df^n(v)| \geq C\lambda^n ||v||. \tag{1.2}$$

Zakłada się też, że X jest zbiorem odpychającym, tzn. każda trajektoria w przód, $f^n(x), n = 0, 1, ...$ w U dostatecznie bliska X musi być w całości zawarta w X. Przy spełnieniu obu tych własności mówi się, że X to *rozciągający repeller* (expanding repeller).

Przy braku różniczkowalności f używa się pojęcia *rozciągające* (dystans expanding) co oznacza wzrost odległości pod działaniem f o czynnik co najmniej $\lambda > 1$ dla par różnych puntów w X dostatecznie do siebie bliskich. Odpychanie okazuje się równoważne warunkowi wewnętrzenemu, że $f|_X$ jest przekształceniem otwartym, o ile f jest otwarte na jakimś otwartym otoczeniu X, patrz [60, Lemma 6.1.2].

Przy tych założeniach zachodzi następujące klasyczne twierdzenie, patrz dla wersji poniżej [60, Section 5.1]:

Twierdzenie 1.3. *Niech $f : X \to X$ będzie przekształceniem rozciągającym, topologicznie tranzytywnym ciągłym przekształceniem otwartym zwartej przestrzeni metrycznej X w siebie i niech $\phi : X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją (potencjałem) ciągłą w sensie Höldera (hölderowską). Wtedy istnieje dokładnie jedna miara $\mu_\phi \in \mathcal{M}(f, X)$, zwana miarą Gibbsa, dla której*

$$C < \frac{\mu_\phi(f_x^{-n}(B(f^n(x), r_0))}{\exp(S_n\phi(x) - nP(\phi))} < C^{-1} \tag{1.3}$$

gdzie f_x^{-n} to gałąź f^{-n} przekształcająca $f^n(x)$ na x (co ma lokalny sens, bo f jest lokalnym homeomorfizmem), a $S_n\phi(x) := \sum_{j=0}^{n-1} \phi(f^j(x))$.

Miara μ_ϕ jest jedynym stanem równowagi dla potencjału ϕ. Jest równoważna jedynej mierze ϕ-konforemnej m_ϕ, tzn. kwazi-niezmienniczej w przód borelowskiej mierze probabilistycznej m_ϕ z Jakobianem $\exp -(\phi - P(\phi))$. Ponadto, dla każdego $x \in X$, granica $P(\phi) = P(f, \phi) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{x\in f^{-n}(x_0)} \exp S_n\phi(x)$ istnieje i jest równa $P_{\mathrm{var}}(f, \phi)$.

To $P(\phi)$ jest wielkością normalizującą, odpowiadającą $P(\phi_1, \dots, \phi_d)$ w Lemacie 1.1 a suma w definicji odpowiada tzw. *sumie statystycznej* nad przestrzenią Ω_n wszystkich dopuszczalnych konfiguracji nad $\{0, 1, \dots, n-1\}$, jak w modelu Isinga. Porównaj *ciśnienie 'przez drzewa'* Definicja 6.2, lub *'przez zbiory rozdzielone'* (6.2) lub sieci.

W szczególności przekształcenie $\varsigma : \Sigma^d \to \Sigma^d$, przesunięcie w lewo, na przestrzeni ciągów jednostronnych $\Sigma^d = \{(\alpha_0, \alpha_1, \dots) : \alpha_j \in \{1, \dots, d\}\}$, zdefiniowane przez $\varsigma((\alpha_n)) = (\alpha_{n+1})$, jest przykładem, którego Twuerdzenie 1.3 dotyczy. Zbiory $f_x^{-n}(B(f^n(x), r_0)$ odpowiadają *cylindrom* o stałych $\{\alpha_j \in \{1, \dots, d\}, j = 0, \dots, n-1\}$. Można nałożyć warunek dopuszczalności: założyć, że parom kolejnych $\alpha_i\alpha_{i+1}$ odpowiada 1 w pewnej 0,1- $d \times d$ macierzy. Taki układ dynamiczny nazywa się *jednostronnym topologicznym łańcuchem Markowa.*

Warunek otwartości w Twierdzeniu 1.3 można zastąpić nieco słabszym: istnieniem skończonego rozbicia Markowa, patrz [60]. Pozwala ono zastąpić (zakodować) (f, X) jednostronnym topologicznym łańcuchem Markowa, z dokładnością do małych zbiorów. O nieco innym kodowaniu będzie mowa w Rozdziale 7.

Istnienie miary konforemnej wynika w Twierdzeniu 1.3 z istnienia punktu stałego w wypukłym słabo*-zwartym zbiorze miar probabilistycznych na X dla operatora sprzężonego do operatora transferu (Perron'a-Frobenius'a-Ruelle'a) $\mathcal{L}$ podzielonego przez swoją normę, gdzie dla $u : X \to \mathbb{R}$ funkcji ciągłych

$$\mathcal{L}(u)(x) := \sum_{y \in f^{-1}(x)} u(y) \exp \phi(y). \tag{1.4}$$

Rzeczywiście, dla każdego zbioru borelowskiego $Y \subset X$ na którym f jest różnowartościowe, oznaczając przez I_Y funkcję charakterystyczną zbioru Y, 1 na Y, 0 na uzupełnieniu, używając aproksymacji funkcjami ciągłymi, otrzymujemy dla dowolnego funkcjonału w $C^*(X)$, w szczególności miary m,

$$(\mathcal{L}^*(m))(Y)) = \int_X \mathcal{L}(I_Y)\, dm = \int_{f(Y)} \exp \phi \circ f|_Y^{-1}\, dm. \tag{1.5}$$

Zatem (dodatnia) miara własna m_ϕ dla operatora $\mathcal{L}^*$ ma Jakobian dla $(f|_Y)^{-1}$ równy $\exp(\phi \circ f|_Y^{-1})/\lambda$, zatem f ma Jakobian $\exp(-\phi)$ przemnożony przez $\lambda := \exp P(\phi)$.

Dowód istnienia miary Gibbsa, niezmienniczej równoważnej z miarą m_ϕ miary μ_ϕ, jest nieco trudniejszy. Najpierw dowodzi się istnienie dodatniej funkcji własnej u_ϕ dla $\mathcal{L}$, a potem definiuje $\mu_\phi = u_\phi m_\phi$. Bardziej kompletny wstęp do tej teorii można znaleźć np. w [60].

2. Wstęp do wymiaru 1

Formalizm termodynamiczny jest użyteczny w badaniu samej przestrzeni X na której działa f. W wymiarze 1, dla funkcji f rzeczywistej klasy $C^{1+\varepsilon}$ albo dla f holomorficznej, dla expanding repellera X, z potencjałem $\phi = \phi_t := -t \log |f'|$ dla $t \in \mathbb{R}$, (1.3) daje

$$\begin{aligned} \mu_{\phi_t}(f_x^{-n}(B(f^n(x), r_0))) &\approx \exp(S_n\phi(x) - nP(\phi_t)) \approx \\ &\operatorname{diam} f_x^{-n}(B(f^n(x), r_0))^t \exp -nP(\phi_t). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Symbol $\approx$ oznacza,że wzajemne ilorazy są ograniczone przez stałą. Ostatnia "prawie równość" $\approx$ wynika z porównania średnicy z odwrotnością modułu pochodnej f^n w x i z tzw. *ograniczonej dystorsji*.

Kiedy $t = t_0$ jest zerem funkcji $t \mapsto P(\phi_t)$, otrzymujemy

$$\mu_{\phi_{t_0}}(B) \approx (\operatorname{diam} B)^{t_0} \tag{2.2}$$

dla wszystkich małych kul B (tj. własność Ahlforsa miary z wykładnikiem t_0).

Otrzymujemy tzw. wzór Bowena na wymiar Hausdorffa:

$$\mathrm{HD}(X) = t_0. \tag{2.3}$$

Ponadto miara Hausdorffa X w tym wymiarze jest dodatnia, skończona.

Modelowym przykładem[1] zastosowania tej teorii jest następujące

Twierdzenie 2.1. *Dla $f_c(z) := z^2+c$ dla dowolnej liczby zespolonej $c \neq 0$ dostatecznie bliskiej 0, niezmiennicza krzywa Jordana J bliska okręgowi jednostkowemu (zbiór Julii dla f_c) jest fraktalem, tzn. ma wymiar Hausdorffa większy niż 1.*

Szkic dowodu. $t_0 > 1$ implikuje $\mathrm{HD}(J) = t_0 > 1$ dzięki (2.2) (nie trzeba nawet używać niezmienniczości $\mu_{\phi_{t_0}}$, tzn. wystarcza miara $m_{\phi_{t_0}}$).

Przypadek $t_0 = 1$ implikuje, dzięki (2.2), skończoność miary Hausdorffa w wymiarze 1, a zatem *prostowalność* (rectifiability) J. Stąd wynika, że miary niezmiennicze równoważne miarom harmonicznym na J od wewnątrz i od zewnątrz, są równoważne, więc jako miary ergodyczne pokrywają się. Stąd wynika, że J jest okręgiem, a $c = 0$.

Korzysta się tu więc z Ergodycznego Twierdzenia Birkhoff'a ,,serca" teorii ergodycznej i układów dynamicznych. Dowód jest ,,echem" słynnego Twierdzenia Mostowa o sztywności. Patrz [70] i [60, Theorem 9.5.5]. □

W wymiarze 1 (rzeczywistym lub zespolonym) nazywamy c punktem krytycznym jeśli pochodna $f'(c) = 0$. Zbiór punktów krytycznych będzie oznaczany przez $\mathrm{Crit}(f)$.

W dalszym ciągu, w odróżnieniu do dotychczasowych expandingów, będziemy dopuszczali istnienie punktów krytycznych. Będziemy się koncentrowali głównie na następujących przypadkach:

1. (Przypadek zespolony) f jest funkcją wymierną stopnia co najmniej 2 sfery Riemanna $\overline{\mathbb{C}}$ w siebie. Rozważamy f działające na swoim zbiorze Julii $K = J(f)$, patrz 3 przykłady na Rysunku 1.

Dla funkcji całkowitych lub meromorficznych patrz np. [1, 2], Porównaj Stwierdzenie 5.2.

2. (Przypadek rzeczywisty) f jest *uogólnionym przekształceniem multimodalnym* zdefiniowanym na otoczeniu $U_K \subset \mathbb{R}$ zwartego niezmienniczego zbioru $K \subset \mathbb{R}$. Zakładamy, że $f \in C^2$, jego wszystkie punkty krytyczne (lokalne ekstrema i punkty przegięcia) są niepłaskie, spelnia własność *ograniczonej dystorsji* (bounded distortion) dla iteracji, w skrócie BD, patrz [54], jest topologicznie tranzytywne i ma dodatnią entropię topologiczną na K.

---

[1] Podobny charakter ma twierdzenie (R. Bowen, C. Series, 1979) o tym, że dla kozwartej grupy kwazi-Fuchsa zbiór graniczny Λ albo jest okręgiem, a grupa jest Fuchsa, albo $HD(\Lambda) > 1$. Jest to przykład analogii teorii iteracji funkcji wymiernych i teorii grup Kleina – słownik Sullivan'a. Podobne jest badanie brzegu np. płatka śniegu, możliwe dzięki konforemnemu samopodobieństwu, [62, Rozdział 6].

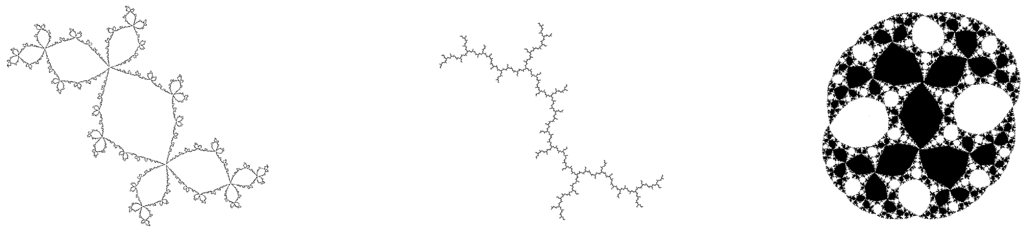

FIGURE 1. Królik $f(z) = z^2 - 0.123 + 0.745i$, dendryt $f(z) = z^2 + i$, bazyliko-królik $f(z) = \frac{z^2+c}{z^2-1}$, dla $c = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$, patrz [60, p.11].

Zakładamy, że K jest maksymalnym f-niezmienniczym podzbiorem w sumie skończonej liczby parami rozłącznych domkniętych odcinków $\widehat{I} = I^1 \cup \dots \cup I^k \subset U_K$, których końce należą do K. (Ta maksymalność odpowiada własności Darboux, porównaj [54, Appendix A] i [36, page 49].) Piszemy $(f, K) \in \mathscr{A}_+^{\rm BD}$ (+ oznacza dodatnią entropię). W miejsce BD można zakładać C^3 (i pisać $(f, K) \in \mathscr{A}_+^3$) i zakładać, że wszystkie orbity okresowe w K są **hiperboliczne odpychające**, tzn. $|(f^n)'(p)| > 1$, gdzie $f^n(p) = p$). Rzeczywiście, zmieniając odpowiednio f poza K można otrzymać $(f, K) \in \mathscr{A}_+^{\rm BD}$.

Przypadek rzeczywisty został dokładniej opisany i zbadany w [54], [15] i [52]. Przykłady to zbiory bazowe w rozkładzie spektralnym [9].

Pytanie. Czy istnieją inne przykłady?

Problem. Uogólnić teorię w przypadku rzeczywistym, patrz następne rozdziały, do kawałkami ciągłych przekształceń, dokładniej: dopuścić żeby dla uogólnionych przekształceń multimodalnych odcinki I^j miały wspólne końce (rezultaty w tym kierunku można znaleźć w [22]).

W tym artykule będziemy porównywać stany równowagi z (uszczegółowionymi — ang.: refined) miarami Hausdorffa w przypadku zespolonym. Dla przypadku rzeczywistego odsyłamy czytelnika do [21] i podanej tam bibliografii.

3. Hyperbolic potentials

Dla $f : X \to X$ i $\phi : X \to \mathbb{R}$ jak w (1.2) następujące własności są znaczące [23]
1) $P(f, \phi) > \sup \phi$,
2) $P(f^n, S_n\phi) > \sup_X S_n\phi$,
dla pewnej liczby naturalnej n,
3) $P(f, \phi) > \sup_{\nu \in \mathcal{M}(f)} \int \phi \, d\nu$,
4) Dla każdego stanu równowagi μ i potencjału ϕ, entropia $h_\mu(f)$ jest dodatnia.

Warunki 2) – 4) są wzajemnie równoważne, patrz [23, Proposition 3.1]. Potencjały ϕ, które je spełniają nazwane zostały *hiperbolicznymi* [23]. Warunek 1) ma dłuższą tradycję, patrz [11]. Intuicyjne znaczenie pojęcia hiperbolicznego potencjału jest takie, że żadna "mała" liczba trajektorii nie niesie na sobie całego ciśnienia.

Dla dowolnej funkcji wymiernej $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ stopnia przynajmniej 2 i każdej funkcji hölderowskiej $\phi : J(f) \to \mathbb{R}$ następujący warunek jest także równoważny 2) – 4):

5) Dla dowolnego ergodycznego stanu równowagi μ dla ϕ, wykładnik Lapunowa $\chi(\mu) := \int \log |f'|\, d\mu$ jest dodatni, tzn. dla μ-prawie każdego punktu x, $\chi(\mu) = \chi(x) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log |(f^n)'(x)| > 0$. (Pierwsza równość i istnienie granicy wynikają z Twierdzenia Ergodycznego Birkhoffa).

Warunki 2)-5) wydają się być wzajemnie równoważne także w przypadku rzeczywistym dla $(f, K) \in \mathscr{A}_+^{\mathrm{BD}}$ lub $(f, K) \in \mathscr{A}_+^3$ jeśli wszystkie orbity okresowe są hiperboliczne odpychające. Dowód jest taki sam jak w przypadku funkcji wymiernych, [23]. Patrz także [28].

Twierdzenie 3.1. *Niech $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ będzie funkcją wymierną jak wyżej. Wtedy dla każdego ϕ hölderowskiego hiperbolicznego potencjału na $J(f)$ istnieje dokładnie jeden stan równowagi μ_ϕ. Dla każdej hölderowskiej funkcji $u : J(f) \to \mathbb{R}$, dla ciągu zmiennych losowych $u \circ f^n$ i μ_ϕ zachodzi Centralne Twierdzenie Graniczne (angielski skrót: CLT).*

Dowód można znaleźć w pracy [44] i w poprzedzającej ją pracy [11]. Żeby znaleźć ten stan równowagi iteruje się operator transferu dowodząc $\mathcal{L}^n(\mathbb{1})/ \exp nP(f, \phi) \to u_\phi$. Zbieżność jest jednostajna z szybkością $\exp -\sqrt{n}$, a granica jest hölderowska, [10]. Wreszcie definiuje się $\mu_\phi := u_\phi \cdot m_\phi$, jak na końcu Rozdziału 1.

Uwaga 3.2. Jeśli μ_ϕ dana jest już a priori, efektywną drogą badań staje się *metoda indukowania* patrz [73], tj. użycie przekształcenia powrotu (niekoniecznie pierwszego) $A \ni x \mapsto f^{n(x)}(x) \in A$ dla A i $n(x)$ odpowiedniego dla μ_ϕ dla prawie każdego x. Dowodzi się wtedy nawet wykładniczej zbieżności, która implikuje wykładnicze mieszanie i w konsekwencji prawa probabilistyczne dla $u \circ f^n$ dla u funkcji hölderowskiej, n.p. CLT, LIL, patrz Rozdziały 9 i 10. Patrz także Uwaga 5.4. Kluczowym zjawiskiem jest wykładnicze malenie $\mu_\phi(A_n)$, gdzie $A_n := \{x \in A : n(x) \geq n\}$.

Patrz także [6] w przypadku rzeczywistym i silniejsze [27] i [28], które dotyczy także przypadku zespolonego i gdzie udowodniona jest wykładnicza zbieżność do u_ϕ, zatem CLT and LIL. Patrz także [72] dla endomorfizmów f wyżej wymiarowej zespolonej przestrzeni rzutowej, gdzie 1) jest zastąpione silniejszą nierównością.

4. Niejednostajna hiperboliczność w rzeczywistym i zespolonym wymiarze 1

W tym rozdziale przedstawiamy szereg warunków, mających sens zarówno w sytuacji rzeczywistej jak i zespolonej.

(a) CE. *Warunek Collet'a-Eckmann'a.* Istnieją $\lambda_{\mathrm{CE}} > 1$ and $C > 0$ takie, że dla każdego punktu krytycznego $c \in K$, którego trajektoria w przód nie zawiera innych punktów krytycznych, dla każdego $n \geq 0$, zachodzi

$$|(f^n)'(f(c))| \geq C\lambda_{\mathrm{CE}}^n.$$

Ponadto wszystkie orbity okresowe w K są hiperboliczne odpychające.

(b) CE2(z_0). *Drugi warunek Collet'a-Eckmann'a (w tył) w punkcie* $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$. Istnieje $\lambda_{\mathrm{CE2}} > 1$ i $C > 0$ takie, że dla każdego $n \geq 1$ i każdego $w \in f^{-n}(z_0)$,

$$|(f^n)'(w)| \geq C\lambda_{\mathrm{CE2}}^n$$

(w przypadku rzeczywistym dla kadego w blisko K, nie tylko w K).

(c) TCE. *Topologiczny warunek Collet'a-Eckmann'a.* Istnieją $M \geq 0, P \geq 1$, $r > 0$ takie, że dla każdego $x \in K$ istnieje ściśle rosnący ciąg liczb naturalnych n_j, $j = 1, 2, \dots$, takich że $n_j \leq P \cdot j$ i dla każdego j (i dysków $B(\cdot)$ poniżej w $\overline{\mathbb{C}}$ lub $\mathbb{R}$ w przypadku rzeczywistym)

$$\#\{0 \leq i < n_j : \mathrm{Comp}_{f^i(x)}\, f^{-(n_j-i)}B(f^{n_j}(x), r)) \cap \mathrm{Crit}(f) \neq \varnothing\} \leq M, \tag{4.1}$$

gdzie ogólnie $\mathrm{Comp}_z V$ oznacza składową zbioru V zawierającą z. W przypadku rzeczywistym zakłada się dodatkowo, że wszystkie okresowe orbity w K są hiperboliczne odpychające, co w przypadku zespolonym wynika z (4.1) automatycznie[2].

(d) ExpShrink. *Exponential shrinking of components.* Istnieją $\lambda_{\mathrm{Exp}} > 1$ i $r > 0$ takie, że dla każdego $x \in K$, każdego $n > 0$ i każdej składowej spójności W_n zbioru $f^{-n}(B(x,r))$ dla każdego dysku (odcinka) $B(x,r)$ w $\overline{\mathbb{C}}$ (lub $\mathbb{R}$), przecinającego K

$$\mathrm{diam}(W_n) \leq \lambda_{\mathrm{Exp}}^{-n}.$$

(e) LyapHyp (*Lyapunov hyperbolicity*). istnieje $\lambda_{\mathrm{Lyap}} > 1$ takie, że wykładnik Lapunowa $\chi(\mu)$ każdej ergodycznej miary $\mu \in \mathcal{M}(f,K)$ spełnia $\chi(\mu) \geq \log \lambda_{\mathrm{Lyap}}$.

(f) UHP. *Jednostajna hiperboliczność na orbitach okresowych* (Uniform hyperbolicity on periodic orbits). Istnieje $\lambda_{\mathrm{Per}} > 1$ takie, że każdy punkt okresowy $p \in K$ okresu $k \geq 1$ spełnia

$$|(f^k)'(p)| \geq \lambda_{\mathrm{Per}}^k.$$

Wyróżnijmy LyapHyp jako najbardziej pasujące do nazwy (silna) niejednostajna hiperboliczność.[3]

Twierdzenie 4.1. *1. Warunki (c)–(f) oraz (b) dla pewnego z_0 są wzajemnie równoważne w przypadku zespolonym. W sytuacji rzeczywistej te równoważności także są prawdziwe przy założeniu warunku słabej izolacji (f,K) (definicja poniżej),* [54].

2. W przypadku zespolonym suprema wszystkich stałych λ_{Exp}, λ_{CE2} (supremum po wszystkich z_0) i λ_{Per} i λ_{Lyap} są takie same.

3. Zarówno CE jak i CE2 implikują (c)–(f).

---

[2]Jeśli istnieje orbita O okresowa paraboliczna w $J(f)$ tzn. taka, że $(f^n)'(p)$ dla $f^n(p) = p$ jest pierwiastkiem z 1, to O przyciga punkt krytyczny (spoza $J(f)$), więc (4.1) nie może być spełnione.

[3]Wtedy wszystkie hölderowskie potencjały są hiperboliczne, patrz Warunek 5) in Rozdziale 3 i [23].

4. Jeśli jest tylko jeden punkt krytyczny w K, w szczególności jeśli f jest S-unimodalnym przekształceniem $K = I$ w przypadku rzeczywistym, tzn. ma dokładnie jedno ekstremum i ujemną pochodną Schwarza poza nim, to wszystkie powyższe warunki są równoważne.

Więcej szczegółów można znaleźć w [55], [64] i [54].

Definicja 4.2. $(f, K) \in \mathscr{A}$ nazywa się *słabo izolowany* jeśli istnieje otoczenie U zbioru K w dziedzinie f w $\mathbb{R}$ takie, że każda orbita f-okresowa $O(p)$ w U musi być zawarta w K.

W przypadku zespolonym możemy zamienić (4.1) na

$$\deg\Big(f^{n_j}\big|_{\mathrm{Comp}_x\, f^{-n_j}(B(f^{n_j}(x),r))}\Big) \le M'$$

dla pewnej stałej M'. W przypadku rzeczywistym ten warunek jest słabszy niż (4.1), bo f przekształcające W_{n+1} w W_n może nie być surjekcją. Może mieć "fałdy". Z tego powodu niektóre trajektorie wstecz wzdłuż W_n, w szczególności napotkanych już punktów krytycznych, mogą się urywać.

W przypadku rzeczywistym dowód CE⇒TCE został podany w [38]. W przypadku zespolonym w [57].

Implikacja TCE⇒CE została udowodniona w przypadku zespolonym w [49, Theorem 4.1]. Użyta została metoda "odwróconego teleskopu" J. Graczyka i S. Smirnowa, patrz [16]. Przy $\sharp\,\mathrm{Crit}(f) > 1$ może być nieprawdziwa, [55, Appendix C]. W przypadku rzeczywistym implikacja została udowodniona dla przekształceń S-unimodalnych w [39].

Pytanie. Czy ta implikacja jest prawdziwa dla każdego $(f, K) \in \mathscr{A}_+^{\mathrm{BD}}$ z jednym punktem krytycznym, przy założeniu słabej izolacji? Wydaje się że tak.

Ponieważ warunek TCE jest napisany w terminach czysto topologicznych (wśród przekształceń o wszystkich orbitach okresowych w K hiperbolicznych odpychających), jest on topologicznym niezmiennikiem. Stąd

Wniosek 4.3. *wszystkie równoważne warunki podane wyżej zachowują się przy topologicznych sprzężeniach między (f, K)-ami).*

Inny dowód topologicznej niezmienniczości CE w sytuacji zespolonej został przestawiony w [58] przy użyciu kryterium dla kwazi-konforemności podanego przez Heinonen'a i Koskelę, [20].

Warto zauważyć, że ta topologiczna niezmienniczość jest zadziwiająca przy warunkach wyrażonych w językach geometrycznym, różniczkowym, czy ergodycznym. Nie wiem jak wyrazić CE dla przekształcenia unimodalnego odcinka w języku topologiczno-kombinatorycznym (kodowania trajektorii w przód punktu krytycznego – kneading sequence – L lub R w zależności od tego czy $f^n(c)$ jest na lewo czy na prawo od c).

Ważnym lematem używanym w tej teorii, np. CE⇒TCE, jest oszacowanie średniej odległości w skali logarytmicznej dowolnej orbity od $\mathrm{Crit}(f)$, patrz [10]. Mianowicie

Lemat 4.4.

$$\sum_{j=0}^{n}{}' -\log|f^j(x)-c| \le Qn \tag{4.2}$$

dla pewnej stałej $Q > 0$, każdego $c \in \mathrm{Crit}(f)$, każdego $x \in K$ i każdej liczby naturalnej n. Σ' oznacza, że omijamy w tej sumie jeden indeks j gdzie $|f^j(x)-c|$ jest najmniejsze.

Dowd używa obserwacji, że zbyt małe $|f^k(c)-c|$ implikowałoby istnienie orbity okresowej przyciągającej, co blisko K nie jest możliwe.

Równoważności w Twierdzeniu 4.1 wygodnie jest dowodzić w kolejności CE2(z_0) ⇒ExpShrink⇒LyapHyp⇒UHP⇒CE2(z_0) i oddzielnie CE2(z_0) ⇔TCE.

Np., w przypadku zespolonym, zakładając UHP dowodzi się CE2(z_0) przez aproksymacje (shadowing) orbitami okresowymi, porównaj początek Rozdziału 6.

5. Ciśnienie geometryczne i stany równowagi

Wracamy do ciśnienia topologicznego, Definicja 1.2, ale dla $\phi = -t\log|f'|$, $t \in \mathbb{R}$, w sytuacji zespolonej $K = J(f)$ lub rzeczywistej, gdzie ϕ może przyjąć wartość $\pm\infty$ w punktach krytycznych f. Patrz początek Rozdziału 2. To ciśnienie nazywamy *ciśnieniem geometrycznym*, jest bowiem użyteczne w badaniu geometrii przestrzeni K, jak w (2.3), poprzez dynamikę f i stany równowagi dla ϕ dla wszystkich t.

Definiujemy

$$P(t) = P_{\mathrm{var}}(t) := P_{\mathrm{var}}(f, -t\log|f'|)$$

jak w Definicji 1.2. To ma sens dzięki $\chi(\mu) \ge 0$ dla wszystkich $\mu \in \mathcal{M}(f)$ w szczególności dzięki całkowalności $\log|f'|$, patrz [45] i [64, Appendix A] gdzie jest podany prostszy dowód. Łatwo wnioskujemy, że $t \mapsto P(t)$ jest funkcją wypukłą i monotonicznie malejącą.

Podajmy teraz inną, równoważną definicję $P(t)$, która wyjaśni geometryczne znaczenie tego geometrycznego ciśnienia, jak w Rozdziale 2.

Definicja 5.1 (Hiperboliczne geometryczne ciśnienie)**.**

$$P_{\mathrm{hyp}}(t) := \sup_{X \in \mathscr{H}(f,K)} P(f|_X, -t\log|f'|),$$

gdzie $\mathscr{H}(f,K)$ jest zdefiniowane jako przestrzeń wszystkich zwartych f-niezmienniczych, tzn. takich, że $f(X) \subset X$, hiperbolicznych podzbiorów K, repellerów w $\mathbb{R}$.

Z tej definicji natychmiast wynika

Stwierdzenie 5.2. (Uogólniony wzór Bowena, porównaj (2.3)) *Pierwsze zero t_0 funkcji $t \mapsto P_{\mathrm{hyp}}(K,t)$ jest równe wymiarowi hiperbolicznemu* $\mathrm{HD}_{\mathrm{hyp}}(K)$ *zbioru K, zdefiniowanemu przez*

$$\mathrm{HD}_{\mathrm{hyp}}(K) := \sup_{X \in \mathscr{H}(f,K)} \mathrm{HD}(X).$$

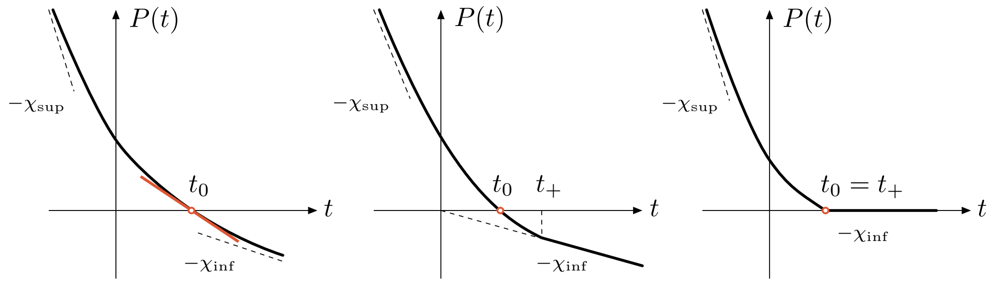

FIGURE 2. Ciśnienie geometryczne: LyapHyp $t_+ = \infty$, LyapHyp $t_+ < \infty$, non-LyapHyp. Rysunek pochodzi z [15], patrz oznaczenia w Uwagach poniżej.

Dla dyskusji $\mathrm{HD}_{\mathrm{hyp}}(J(f))$ vs $\mathrm{HD}(J(f))$, patrz [29, Section 2.13].

Poniżej formułujemy twierdzenie 5.3 udowodnione w [53] w przypadku zespolonym, a w [54] w przypadku rzeczywistym.

Twierdzenie 5.3. *1. Przypadek rzeczywisty,* [54]. *Rozważmy dowolne* $(f, K) \in \mathscr{A}_+^3$. *Załóżmy, że wszystkie orbity okresowe dla* f *zawarte w* K *są hiperboliczne odpychające. Wtedy funkcja* $t \mapsto P(t)$ *jest rzeczywista analityczna na otwartym zbiorze parametrów* (t_-, t_+) *zdefiniowanym jako dziedzina gdzie*

$$P(t) > \sup_{\nu \in \mathcal{M}(f)} -t \int \log |f'| \, d\nu, \tag{5.1}$$

Parametry t_- *i* t_+ *nie muszą być skończone. Dla każdego* t *w tej dziedzinie istnieje dla potencjału* $\phi_t = -t \log |f'|$ *dokładnie jeden stan równowagi. Jest on ergodyczny i bezwzględnie ciągły względem odpowiedniej miary konforemnej* m_{ϕ_t} *z gęstością ograniczonoą z dołu prawie wszędzie przez dodatnią stałą. Jeśli ponadto* f *jest topologicznie dokładne na* K *(tzn. dla każdego* V *otwartego podzbioru* K *istnieje liczna naturalna* n *taka, że* $f^n(V) = K$*), to ta miara jest mieszająca, spełnia warunek wykładniczego malenia korelacji i spełnia Centralne Twierdzenie Graniczne dla funkcji próbnych ciągłych w sensie Lipschitz'a.*

2. Przypadek zespolony, [53, Main Theorem]. *Teza jest taka sama. Trzeba dodatkowo założyć jakieś bardzo słabe rozciąganie, np.: istnienie dowolnie małych dobrych par otoczeń zbioru krytycznego* $\mathrm{Crit}(f)$ *(nice couples)* $V \Subset \widehat{V}, f^n \partial V \cap \widehat{V} = \emptyset$ *dla wszystkich naturalnych* n, *i hiperboliczność z dala od* $\mathrm{Crit}(f)$, *tj.* $|(f^n)'(x)| > 1$ *dla* n *dostatecznie dużych i* x *takich, że* $f^j(x) \notin V, j = 0, ..., n$. *W szczególności teza jest prawdziwa dla wszystkich wielomianów stopnia co najmniej 2, które nie są nieskończenie renormalizowalne.*

Uwagi. 1) t_- i t_+ są nazywane parametrami *przejścia fazowego*. Ponieważ $P(0) = h_{\mathrm{top}}(f) > 0$, $t_- < 0 < t_+$, funkcja $t \mapsto P(t)$ jest funkcją afiniczną na lewo od t_-, o ile $t_- > -\infty$ i na prawo od t_+, o ile $t_+ < \infty$, równe odpowiednio $t \mapsto -t\chi_{\sup}$ gdzie $\chi_{\sup} := \sup_\nu \chi(\nu)$ dla $t < 0$ i $t \mapsto -t\chi_{\inf}$, gdzie $\chi_{\inf} := \inf_\nu \chi(\nu)$

dla $t > 0$. Oczywiście $P(t)$ nie jest rzeczywiste-analityczne w t_- i t_+ (stąd nazwa: przejście fazowe).

2) Dla $f(z) = z^2 - 2$, $f : [-2, 2] \to [-2, 2]$ (wielomian Czebyszewa), mamy $f(2) = 2, f'(2) = 4, \chi(\widehat{l}) = \log 2$, gdzie $\widehat{l}$ probabilistyczną miarą niezmienniczą równoważną mierze długości l. Mamy $P(t) = \log 2 - t \log 2$ dla $t \geq -1$ i $P(t) = -t \log 4$ dla $t \leq -1$, zatem $t_- = -1$, $P(t)$ jest nieróżniczkowalne w t_- i dla $t = -1$ istnieją dwa nierównoważne stany równowagi: Dirac'a w $z = 2$ i l.

3) Dla f non-LyapHyp, $t_+ = t_0 < \infty$, jednak $t_+ < \infty$ może się zdarzyć także dla f LyapHyp, patrz [31] i [7, 8].

4) Warto zauważyć, że warunek (5.1) jest podobny do warunku 3) z Rozdziału 3. Dla f LyapHyp i $t > t_+$, nie istnieje żaden stan równowagi, patrz [23].

5) Dla f rzeczywistego, jak w Twierdzeniu 5.3, spełniającego LyapHyp i $K = \widehat{I}$, mamy $t_0 = 1$ i dla $\phi = -\log |f'|$ wnioskujemy, że jedyny istniejący stan równowagi jest bezwzględnie ciągły względem miary Lebesgue'a (a.c.i.m. tzn. invariant absolutely continuous with respect to Lebesgue measure). W rzeczywistości ten fakt zachodzi także bez założenia LyapHyp, przy $t = t_0 = t_+ = 1$, przy założeniu bardzo słabej hiperboliczności, np. $|(f^n)'(f(c))| \to \infty$ dla wszystkich $c \in \mathrm{Crit}(f)$, patrz [5] i [67]. W przypadku zespolonym patrz [17] i silniejsze [65].

Uwaga 5.4. W dowodzie Twierdzenia 5.3, używamy (porównaj Uwagę 3.2) przekształcenia powrotu (niekoniecznie pierwszego) $F(x) = f^{n(x)}$ do dobrej (nice, Markov) dziedziny V jak w Twierdzeniu 5.3, pkt.2, w szczególności $f^n(\partial V) \cap V = \varnothing$. Jednak, inaczej niż w [73], nie używamy w konstrukcji stanu równowagi μ_ϕ, bo a priori nie wiemy, czy istnieje. Konstrukcja jest geometryczna. F (dokładniej rodzina gałęzi F^{-1}) jest Nieskończonym Układem Iteracyjnym (z nieskończoną liczbą symboli), patrz [33] [40] z podaną tam bibliografią. Uzyskujemy rozciąganie dzięki "przyspieszeniu" z f do F. Rozważamy wtedy stan równowagi $\mathtt{P}$ dla (F, Φ) gdzie $\Phi(x) := \sum_{j=0}^{n(x)-1} \phi_t(f^j(x))$ (i równoważną miarę konforemną), patrz Twierdzenie 1.3. Następnie rozprowadzamy tę miarę na wieżę Lai-Sang Young: $\{(x, j) : 0 \leq j < n(x)\}$ i rzutujemy $(x, j) \mapsto f^j(x)$ do μ_ϕ na K. [4]

Własności stochastyczne $\mathtt{P}$ pozostają spełnione przy tej konstrukcji miary μ_ϕ. Analityczność $t \mapsto P(t)$ wynika z wyrażenia $P(t)$ jako zera ciśnienia dla F z potencjałem zależącym od dwóch parametrów i twierdzenia o funkcjach uwikłanych. Patrz też [69].

Uwaga 5.5. Dla ciągu miar probabilistycznych μ_n słabo* zbieżnego do pewnej miary $\widehat{\mu}$, w obecności punktów krytycznych $\int \log |f'| \, d\mu_n$ nie musi zbiegać do $\int \log |f'| \, d\widehat{\mu}$. Jedynie półciągłość z góry ma miejsce (można użyć ciągu $\max\{-k, \log |f'|\} \searrow \log |f'|$ dla $k \to \infty$). Zatem, dla $t > 0$, ani stany równowagi μ_{t_n} dla $t_n \to t$, ani ciągi miar μ dające supremum wolnych energii w Definicji 1.2 nie muszą zbiegać do stanu równowagi dla $-t \log |f'|$. A priori wolna energia

[4]Metoda indukowania pomaga czasem zdecydować czy istnieje skończonej miara a.c.i.m. dla przekształceń odcinka z płaskimi punktami krytycznymi lub dla funkcji całkowitych lub meromorficznych na $\mathbb{C}$ w zależności od $\mathtt{P}$-całkowalności pierwszego czasu powrotu, patrz prace N. Dobbs'a, B. Skorulskiego, J. Kotus, G. Świątka.

w granicy może spaść. Jednak pewne modyfikacje tych metod są używane do pokazania istnienia stanu równowagi, [12][5]

Warto zauważyć, że przejście do słabej*-granicy średnich z miar Dirac'a w $\{x, \dots, f^n(x)\}$ dowodzi $\limsup_{n\to\infty} \sup_{x\in K} \frac{1}{n} S_n(\log|f'|)(x) \le \chi_{\max}$. Jednak analogiczna nierówność $\liminf \dots \ge \chi_{\inf}$ jest w sposób oczywisty fałszywa. Te obserwacje pomagają w zrozumieniu spektrum Lapunowa:

Uwagi o spektrum Lapunowa Twierdzenie 5.3 pozwala wyrazić tzw. spektrum wymiarowe dla wykładników Lapunowa przy użyciu transformaty Legendre'a, tj. dla każdego $\alpha > 0$ i $\mathcal{L}(\alpha) := \{x \in K : \chi(x) = \alpha\}$

$$\mathrm{HD}(\mathcal{L}(\alpha)) = \frac{1}{|\alpha|} \inf_{t\in\mathbb{R}} (P(t) + \alpha t)\,. \tag{5.2}$$

W dowodzie wykorzystuje się **równość Mañé**

$$\mathrm{HD}(\mu) = h_\mu(f)/\chi(\mu) \tag{5.3}$$

przy założeniu $\chi(\mu) > 0$, [60], gdzie $\mathrm{HD}(\mu) := \sup\{\mathrm{HD}(X) : \mu(X) = 1\}$, zastosowaną do μ_{ϕ_t}.

Równość (5.2) dotyczy punktów regularnych x's, tzn. takich, że
$\chi(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log|(f^n)'(x)|$ istnieje. Jest możliwe podanie formuł lub przynajmniej oszacowań na wymiary Hausdorffa zbiorów punktów nieregularnych $\mathcal{L}(\alpha,\beta) := \{x \in K : \underline{\chi}(x) = \alpha, \overline{\chi}(x) = \beta\}$ dla dolnych i górnych wykładników Lapunowa, gdzie zamieniamy lim odpowiednio na lim inf i lim sup. Patrz [14] i [15].

Niestety te prace nie mówią nic o wielkości zbiorów punktów z zerowym górnym wykładnikiem Lapunowa.

Dla punktu x będącego wartością krytyczną można udowodnić fakt analogiczny do $\chi(\mu) \ge 0$:

Twierdzenie 5.6 ([26])**.** *Jeśli funkcja wymierna $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ ma tylko jeden punkt krytyczny c w $J(f)$ i wszystkie orbity okresowe w $J(f)$ są hiperboliczne odpychające, to $\underline{\chi}(f(c)) \ge 0$.*

Dla S-unimodalnych przekształceń odcinka zostało to udowodnione dużo wcześniej przez T. Nowickiego i D. Sands'a w [39].

6. Inne definicje geometrycznego ciśnienia

Definicja 6.1 (punkt bezpieczny)**.** See [60, Definition 12.5.7]. Punkt $z \in K$ nazywamy *bezpiecznym* jeśli $z \notin \bigcup_{j=1}^\infty (f^j(\mathrm{Crit}(f)))$ i dla każdego $\delta > 0$ i n dostatecznie dużych
$B(z, \exp(-\delta n)) \cap \bigcup_{j=1}^n (f^j(\mathrm{Crit}(f))) = \varnothing$.

Z tej definicji natychmiast wynika, że wszystkie punkty oprócz należących do zbioru o wymiarze Hausdorffa 0, są bezpieczne.

[5] Entropia nie sprawia kłopotu, zachodzi półciągłość z góry, wynika to z asymptotycznej h-ekspansywności wynikającej z gładkości C^∞ w przypadku zespolonym i z ciągłości i kawałkami monotoniczności w przypadku rzeczywistym [36, Twierdzenie 2]

Definicja 6.2 (Ciśnienie drzewiaste)**.** Dla każdego $z \in K$ i $t \in \mathbb{R}$ definiujemy

$$P_{\text{tree}}(z,t) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{f^n(x)=z,\, x\in K} |(f^n)'(x)|^{-t}. \tag{6.1}$$

Porównaj to z $P(f,\phi)$ w Twierdzeniu 1.3. Przy odpowiednich założeniach, np dla bezpiecznych z ta granica istnieje, nie zależy od z i jest równa $P(t)$. Patrz [48], [55] i [60] w przypadku zespolonym oraz [54] i [52] w przypadku rzeczywistym. Kluczem dla dowodu jest rozszerzenie każdej trajektorii długości n kończącej się w z, $T_n(x) = \{x,\dots,z\}$ w przód i w tył razem o czas $m \ll n$ i zbudowanie Iterowanego Układu Funkcji dla gałęzi wstecz przekształcenia f^{n+m} i rozważenie jego zbioru granicznego X . Jego trajektorie przez czas n są bliskie (śledzą, eng. term "shadow") blokom $T_n(x)$. To dowodzi $P_{\text{tree}}(z,t) \le P_{\text{hyp}}(t)$. Przeciwna nierówność wynika natychmiast ze rozważenia drzew $\bigcup_{f^n(x)=z} T_n(x)$ wewnątrz hiperbolicznych podzbiorów X.

Podobnie dowodzi się $P_{\text{var}}(t) \le P_{\text{hyp}}(t)$. Przy danej mierze μ spełniającej $\chi(\mu) > 0$, łapie się zbiór hiperboliczny X metodą Katok'a-Pesin'a wzdłuż bloków "regularnych" $T_n(x)$.

Dla ciągłego potencjału $\phi : X \to \mathbb{R}$ dla zwartej przestrzeni metrycznej (X,ρ), rozważmy

$$P_{\text{sep}}(f,\phi) := \lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \big(\sup_Y \sum_{y\in Y} \exp S_n\phi(y) \big), \tag{6.2}$$

gdzie supremum jest wzięte po wszystkich zbiorach (n,ε)-rozdzielonych $Y \subset X$, tzn. takich Y, że dla każdych różnych $y_1, y_2 \in Y$, $\rho_n(y_1,y_2) \ge \varepsilon$, gdzie ρ_n jest metryką zdefiniowaną przez $\rho_n(x,y) = \max\{\rho(f^j(x), f^j(y)) : j = 0,\dots,n\}$. Sep jest skrótem od "separated" – rozdzielone.

Dla $\phi = -t \log |f'|$ dla $t > 0$, w obecności punktów krytycznych dla f, P_{sep} jest zawsze równe ∞ przez wzięcie jako elementu zbioru rozdzielonego jakiegoś punktu krytycznego. Zastępujemy więc tę definicję przez ciśnienie drzewiaste.

Można jednak użyć infimum po (n,ε)-sieciach, definiując $\underline{P_{\text{spanning}}(f,\phi)}$ (spanning tłumaczymy na: sieć). To jest sensowne pojęcie często równe innym ciśnieniom. Przy wyborze sieci unikamy punktów krytycznych. Zarys tej teorii podany jest w [52]. Zwróćmy tylko uwagę na to, że to ciśnienie jest równe $P(f, -t\log|f'|)$ dla $t > 0$ w przypadku zespolonym, jeśli

Definicja 6.3. f jest *słabo stabilny wstecz w sensie Lapunowa* to znaczy dla każdych $\delta > 0$ i $\varepsilon > 0$, dla każdego n dostatecznie dużego i każdego dysku $B = B(x, \exp -\delta n)$ o środku w $x \in K$, dla każdego $0 \le j \le n$ i każdej składowej V zbioru $f^{-j}(B)$ przecinającej K zachodzi $\operatorname{diam} V \le \varepsilon$.

Ten warunek jest spełniony dla wszystkich funkcji wymiernych z dokładnie jednym punktem krytycznym, którego trajektoria jest w $J(f)$ lub jest przyciągana do $J(f)$, dzięki Twierdzeniu 5.6.

Pytanie. Czy słaba stabilność wstecz w sensie Lapunowa jest prawdziwa dla wszystkich funkcji wymiernych?

Na koniec zdefiniujmy P_{Per}, ciśnienie na orbitach okresowych, tak jak P_{tree} tylko, że bierzemy $x \in \mathrm{Per}_n$ (okresowe , okresu n) zamiast $x \in f^{-n}(z)$. W [56], $P_{\mathrm{Per}}(t) = P(t)$ zostało udowodnione dla wymiernych f (patrz także [4] dla pewnej klasy wielomianów) dla $K = J(f)$, przy za]łożeniu

Warunek H. Dla każdego $\delta > 0$ i dostatecznie dużych n, jeśli dla zbioru $\mathscr{P} \subset \mathrm{Per}_n$ dla wszystkich $p, q \in P$ i wszystkich $i : 0 \le i < n$ $\mathrm{dist}(f^i(p), f^i(q)) < \exp -\delta n$, to $\#\mathscr{P} \le \exp \delta n$.

Pytanie. Czy ten warunek zachodzi dla dowolnych funkcji wymiernych stopnia co najmniej 2 ? W szczególności, czy mogą istnieć duże "wiązki" orbit okresowych wykładniczo blisko punktu stałego Cremer'a (tzn. takiego, że $f'(z) = e^{2\pi i\alpha}, \alpha \notin Q$, nie ma linearyzacji w otoczeniu z, tj. $z \in J(f)$) ?

7. Geometryczne drzewa kodujące, zbiory graniczne. Gibbs spotyka Hausdorffa

Pojęcie geometrycznego drzewa kodującego, (po angielsku: geometric coding tree, g.c.t.), pojawiło się już w pracy Jakobsona [25], gdzie pokazano, że kodowanie za pomocą tego drzewa jest skończone-do-1 w przypadku expandingu. później g.c.t. użyte były w [41, 42] i z całą siłą w [61, 62] i pracach, które je kontynuowały. Podobne grafy były później używane w celu topologicznej analizy nieodwracalnej dynamiki, patrz [37, 18].

Definicja 7.1. Niech U będzie otwartym spójnym podzbiorem sfery Riemanna $\overline{\mathbb{C}}$. Rozważmy przekształcenie holomorficzne $f : U \to \overline{\mathbb{C}}$ takie, że $f(U) \supset U$ i $f : U \to f(U)$ jest przekształceniem właściwym. Załóżmy, że zbiór $\mathrm{Crit}(f)$ jest skończony. Rozważmy dowolny punkt $z \in f(U)$. Niech punkty $z^1, z^2, \ldots, z^d$ będą pewnymi f-przeciwobrazami punktu z i $d \ge 2$. Rzważmy krzywe $\gamma^j : [0, 1] \to f(U)$, $j = 1, \ldots, d$, łączące z odpowiednio z z^j (tzn. $\gamma^j(0) = z, \gamma^j(1) = z^j$), gdzie opuszczamy przecięcia i samoprzecięcia, takie, że $\gamma^j \cap f^n(\mathrm{Crit}(f)) = \varnothing$ dla wszystkich j i $n > 0$.

Dla każdego ciągu $\alpha = (\alpha_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma^d$ (gdzie Σ^d to przestrzeń symboliczna z przekształceniem ς przesunięcia w lewo, patrz Rozdział 1) definiujemy $\gamma_0(\alpha) := \gamma^{\alpha_0}$. Załóżmy, że dla pewnego $n \ge 0$, dla każdego $0 \le m \le n$ i każdego $\alpha \in \Sigma^d$, krzywe $\gamma_m(\alpha) : [0, 1] \to f(U)$ są już zdefiniowane. Załóżmy, że dla $1 \le m \le n$ mamy $f \circ \gamma_m(\alpha) = \gamma_{m-1}(\varsigma(\alpha))$, i $\gamma_m(\alpha)(0) = \gamma_{m-1}(\alpha)(1)$. Zdefiniujmy $\gamma_{n+1}(\alpha)$ tak, żeby poprzednie równości były spełnione także dla $n+1$, biorąc odpowiednie f-przeciwobrazy (podniesienia) krzywych γ_n. Dla każdego $\alpha \in \Sigma^d$ i $n \ge 0$ oznaczmy $z_n(\alpha) := \gamma_n(\alpha)(1)$.

Graf $\mathscr{T} = \mathscr{T}(z, \gamma^1, \ldots, \gamma^d)$ z wierzchołkami z i $z_n(\alpha)$ i krawędziami $\gamma_n(\alpha)$ jest nazywany *geometrycznym drzewem kodującym* z *korzeniem* z. Dla każdego $\alpha \in \Sigma^d$ podgraf składający się z $z, z_n(\alpha)$ i $\gamma_n(\alpha)$ dla wszystkich $n \ge 0$ jest nazywany *nieskończoną geometryczną gałęzią* i oznaczany $b(\alpha)$. Gałąź jest nazywana *zbieżną* jeśli ciąg $\gamma_n(\alpha)$ jest zbieżny do punktu naleącego do $\mathrm{cl}\, U$. Definiujemy *przekształcenie kodujące* $z_\infty : \mathscr{D}(z_\infty) \to \mathrm{cl}\, U$ jako $z_\infty(\alpha) := \lim_{n\to\infty} z_n(\alpha)$ na dziedzinie $\mathscr{D} = \mathscr{D}(z_\infty)$ wszystkich takich α dla których $b(\alpha)$ jest zbieżne.

Oznaczmy $\Lambda := z_\infty(\mathscr{D}(z_\infty))$. Jeśli f rozszerza się holomorficznie na otoczenie domknięcia $\overline{\Lambda}$ to Λ nazywamy *kwazi-repellerem*, patrz [61].

Uwagi. Przy danym przekształceniu Riemanna $R : \mathbb{D} \to \Omega$ na jednospójny obszar $\Omega \subset \mathbb{C}$ (biholomorficzne, tzn. R i R^{-1} holomorficzne), można rozważać rozgałęzione nakrycie, np. $g(z) = z^d$ na $\mathbb{D}$, oraz $f = R \circ g \circ R^{-1}$. Wtedy, przy dowolnie wybranych $z \in \Omega$ (oprócz wartości krytycznej dla f i krzywych γ^j łączących ten punkt z jego f-przeciwobrazami w Ω możemy rozważać odpowiednie drzewo $\mathscr{T}$. Wtedy, zamiast rozważać R i jego rozszerzenie przez granice radialne: $\overline{R}$, możemy rozważać granice wzdłuż gałęzi drzewa, $z_\infty : \Sigma^d \to \mathrm{Fr}\,\Omega$. To definiuje strukturę kodowania ciągami symboli, użyteczną w dowodzeniu praw statystycznych

Kodowanie jest szczególnie użyteczne przy badaniu miar, które przychodzą z ∂D via $\overline{R}$, a nie są stanami równowagi dla potencjałów bezpośrednio na $\mathrm{Fr}\,\Omega$. Przykładem może być miara harmoniczna, która jest $\overline{R}_*$-obrazem miary długości l. Można rozważać podniesienie l do Σ^d przy kodowaniu drzewem $\mathscr{T}' = R^{-1}(\mathscr{T})$ a następnie projekcję przy użyciu $(z_\infty)_*$ na $\mathrm{Fr}\,\Omega$.

Geometryczne drzewa kodujące są zawsze dostępne w obecności odpowiedniej holomorficznej dynamiki, nawet pod nieobecność Ω, tzn. nieobecność przekształcenia Riemanna. Drzewa i wynikające z nich kodowanie można uważać za dyskretne uogólnienie lub zastąpienie przekształcenia Riemanna i jego granicy radialnej.

W [59] zostało udowodnione, że dziedziną $\mathscr{D}$ jest całe Σ^d oprócz najwyżej "cienkiego" zbioru. W szczególności dla miary Gibbsa ν na Σ^d dla hölderowskiego potencjału, granica $z_\infty(\alpha)$ istnieje dla ν-prawie każdego α, zatem obraz $(z_\infty)_*(\nu)$ ma sens. Ponadto nasze kodowanie ζ_∞ jest "cienkie"-do-1. To jest "dyskretne uogólnienie" Twierdzenia Beurlinga dotyczącego brzegowego zachowania przekształcenia Riemanna. "Cienkie" oznacza jakiś wariant zerowej pojemności logarytmicznej (w zależności od własności drzewa[6]. W szczególności to kodowanie nie zmienia entropii.

Dla $\nu \in \mathcal{M}(\varsigma, \Sigma^d)$ i $\psi : \Sigma^d \to \mathbb{R}$, zakładając $\int \psi \, d\nu = 0$, definiuje się *asymptotyczną wariancję* (oczywiście można rozważać przestrzeń ogólniejszą niż Σ^d)

$$\sigma^2 = \sigma^2_\nu(\psi) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int (S_n\psi)^2 \, d\nu = \int \psi^2 \, d\nu + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \psi \cdot (\psi \circ \varsigma^j) \, d\nu, \tag{7.1}$$

zakładając że powyższe skończone granice istnieją.

Twierdzenie 7.2. *Niech Λ będzie kwazi-repellerem dla geometrycznego drzewa kodującego dla przekształcenia holomorficznego $f : U \to \overline{\mathbb{C}}$. Niech ν będzie ς-niezmienniczą miarą Gibbsa na Σ^d dla hölderowskiej funkcji $\phi : \Sigma^d \to \mathbb{R}$. Załóżmy, że $P(\varsigma, \phi) = 0$. Niech $\mu := (z_\infty)_*(\nu)$.*

Wtedy, dla $\psi := -\mathrm{HD}(\mu)(\log |f'| \circ z_\infty)) - \phi$, zachodzi $\int \psi \, d\mu = 0$ i asymptotyczna wariancja $\sigma^2 = \sigma^2_\nu(\psi)$ istnieje.

[6]Definicja: zwarty $X \subset \mathbb{C}$ ma pojemność logarytmiczną zero jeśli $\int \log \frac{1}{|z-w|} \, d\nu(z) d\nu(w) = \infty$ dla każdej miary probabilistycznej ν o nośniku w X. W [59] rozważa się potęgi logarytmu.

Jeśli $\sigma^2 > 0$, *to istnieje zwarty, f-niezmienniczy, hiperboliczny repeller* $X \subset \Lambda$ *taki, że* $\mathrm{HD}(X) > \mathrm{HD}(\mu)$. *W konsekwencji* $\mathrm{HD}_{\mathrm{hyp}}(\Lambda) > \mathrm{HD}(\mu)$ *(zdefiniowane po* (5.2)*).*

Jeśli $\sigma^2 = 0$, *to* ψ *is kohomologiczne 0. Wtedy dla każdych* $x, y \in \overline{\Lambda}$ *nie post-krytycznych, jeśli* $z = f^n(x) = f^m(y)$ *dla pewnych liczb naturalnych* n, m, *to rzędy krytyczności* f^n *w punkcie* x *i* f^m *w punkcie* y *muszą być takie same. W szczególności wszystkie punkty krytyczne* $c \in \overline{\Lambda}$ *muszą być pre-okresowe, tzn. istnieje* n *takie, że* $f^n(c)$ *jest punktem okresowym.*

To ostatnie zdarza się tylko w specjalnych sytuacjach, patrz np. Twierdzenie 7.3 poniżej. Więcej szczegółów można znaleźć w [73], chociaż ϕ jest tam zdefiniowane bezpośrednio na $J(f)$ (co jednak nie stwarza szczególnej różnicy). Patrz także Rozdział 10.

Przy danym przekształceniu $f : X \to X$ i funkcjach $u, v : X \to \mathbb{R}$, nazywamy *u kohomologiczne v*, w klasie $\mathcal{C}$ jeśli istnieje $h : X \to \mathbb{R}$ należące do $\mathcal{C}$ takie, że $u - v = h \circ f - h$. Ważny lemat [61, Lemma 1] mówi, że $\sigma^2 = 0$ powyżej implikuje ψ kohomologiczne 0 w $L^2(\mu)$, i często w węższej klasie, w zależności od ψ (sztywność typu Livšic'a).

• Faktycznie $\int \psi\, d\nu = -\mathrm{HD}(\mu)\chi(\mu) - \int \phi\, d\nu = -h_\mu(f) - \int \phi\, d\nu = -h_\nu(\varsigma) - \int \phi\, d\nu = P(\varsigma, \phi) = 0$. Teraz, żeby udowodnić Twierdzenie 7.2 zauważmy, że $2\chi(\mu) \geq h_\mu(f) = h_\nu(\varsigma) > 0$, patrz [60, Ruelle's inequality] (użyte już przedtem w 3)⇒5) Rozdziale 3) i w [41]. Zatem, używając *rozszerzenia naturalnego*[7] $(\Sigma^d, \nu, \varsigma)$ (tutaj przestrzeń ciągów dwustronnych) i teorii Katok'a-Pesin'a, otrzymujemy zbiór hiperboliczny X z $\mathrm{HD}(X) \geq \mathrm{HD}(\mu) - \varepsilon$ dla dowolnego $\varepsilon > 0$. Porównaj komentarze dotyczące śledzenia w Rozdziale 6.

• $\sigma^2 > 0$ implikuje istnienie, dzięki Centralnemu Twierdzeniu Granicznemu, duże fluktuacje (odchylenia) sum $\sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ \varsigma^j$ od $n \cdot \int \psi\, d\nu$ (tutaj 0), co pozwala znaleźć X z $\mathrm{HD}(X) > \mathrm{HD}(\mu)$.

Specjalnej troski wymaga znalezienie X będącego podzbiorem Λ, patrz [50] (będącą kontynuacją [63]).

Powyższe fluktuacje były wykorzystane przez A. Zdunik dla udowodnienia, przy ϕ stałej,

Twierdzenie 7.3 ([74])**.** *Niech* $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ *będzie funkcją wymierną stopnia* $d \geq 2$. *Jeśli* $\sigma^2 > 0$, *to dla* $\mu_{\max}(f)$, *miary z maksymalną entropią (równą* $\log d$*),* $\mathrm{HD}(J(f)) > \mathrm{HD}(\mu_{\max}(f))$. *Jeśli* $\sigma^2 = 0$, *to* f *jest post-krytycznie skończone, z parabolicznym orbifoldem,* [35].

Możemy pisać $\mu_{\max} = (z_\infty)_*(\nu_{\log d})$, bo miara z maksymalną entropią jest jednoznaczna dla f.

A. Zdunik udowodniła *de facto* istnienie hiperbolicznego zbioru $X \subset J(f)$ spełniającego $\mathrm{HD}(X) > \mathrm{HD}(\mu_{\max}(f))$, a zatem $\mathrm{HD}_{\mathrm{hyp}}(J(f)) > \mathrm{HD}(\mu_{\max}(f))$. Ponieważ w Twierdzeniu 7.3 $\Lambda = J(f)$, jest jasne, że $X \subset \Lambda$.

---

[7]Termin wprowadzony przez Rochlina przyjęty w teorii ergodycznej – chodzi o granicę odwrotną, czyli przestrzeń wszystkich trajektorii $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$.

• W przypadku $\sigma^2 = 0$, $v : J(f) \to \mathbb{R}$ spełniającego równanie kohomologiczne $\log|f'| = v \circ f - v + \mathrm{Const}$ na $J(f)$ rozszerza się do funkcji harmonicznej poza $J(f)$ (sztywność Livšic'a) dając to równanie na skończonej sumie krzywych rzeczywistych analitycznych zawierającej $J(f)$ (nazywamy to *przypadkiem rzeczywistym*) lub na $\overline{\mathbb{C}}$. W twierdzeniu 7.2 na Λ i dla rozszerzenia w Twierdzeniu 7.3, the "rzędy wzrostu" $-\log|(f^n)'|$ w x i $-\log|(f^m)'|$ w y muszą być takie same dzięki równaniu kohomologicznemu i być równe rzędowi wzrostu v w z (zjawisko "sprzężone", w sensie modułu i argumentu funkcji holomorficznej, do obecności niezmienniczego pola kierunków). To implikuje paraboliczny orbifold w Twierdzeniu 7.3.

Twierdzenie 7.3 zastosowane do wielomianu f ze spójnym zbiorem Julii (brzegiem Ω_∞, basenu przyciągania do nieskończoności) dzięki
$\mathrm{HD}(\mu_{\max}(f) = 1$ [32], implikuje następujący słynny wynik (porównaj modelowy przykład $z^2 + c$ w Twierdzeniu 2.1):

Twierdzenie 7.4 (Zdunik [74])**.** *Dla dowolnego wielomianu f stopnia co najmniej 2, ze spójnym zbiorem Julii $J(f)$, albo $J(f)$ jest okręgiem lub odcinkiem, albo jest fraktalem, tzn.* $\mathrm{HD}(J(f)) > 1$.

8. Brzeg, wzrost radialny, miara harmoniczna, a Hausdorffa

Dla wielomianów ze spójnym zbiorem Julii miara $\mu_{\max}(f)$ jest równa mierze harmonicznej ω (z punktu ∞) Wychodząc z tej obserwacji A. Zdunik podała inny dowód Twierdzenia 7.4, szczególnie w części $\sigma^2 = 0$, patrz [75]. Można bowiem patrzeć z wnętrza basenu Ω_∞ i użyć drzewa w basenie, patrz Uwagi w Rozdziale 7, i korzystając z $\sigma^2 = 0$ udowodnić istnienie prawie wszędzie radialnej granicy pochodnej przekształcenia Riemanna jego ciągłej rozszerzalności na $\partial\mathbb{D}$ i w następstwie gładkości, a nawet analityczności $\mathrm{Fr}\,\Omega$.

Theorem 7.4 zostało wzmocnione z tego punktu widzenia w [51], poprzedzone przez [63], następująco:

Twierdzenie 8.1. *Niech $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ będzie funkcją wymierną stopnia co najmniej 2 i Ω będzie jednospójną składową basenu bezpośredniego przyciągania do orbity okresowej przyciągającej (tzn. składową spójności przyciąganego zbioru przecinającą tę orbitę). Wtedy, przy założeniu, że f nie jest skończonym produktem Blaschke w pewnych współrzędnych holomorficznych na sferze, lub nie jest 2-do-1 holomorficznym faktorem produktu Blaschke, mamy* $\mathrm{HD}_{\mathrm{hyp}}(\mathrm{Fr}\,\Omega) > 1$.

Można założyć $f(\Omega) = \Omega$ biorąc f^n zamiast f gdzie n to okres orbity.

Nowością w [51] było pokazanie jak znaleźć duży zbiór hiperboliczny X w zbiorze $\mathrm{Fr}\,\Omega$ nie będącym całym zbiorem $J(f)$.

W rzeczywistości następująca "lokalna" wersja tego twierdzenia została udowodniona w [51]:

Twierdzenie 8.2. *Załóżmy, że f jest zdefiniowane i holomorficzne na otoczeniu W brzegu $\mathrm{Fr}\,\Omega$, gdzie Ω jest spójnym, jednospójnym obszarem w $\overline{\mathbb{C}}$, mającym co najmniej 2 punkty. Załóżmy, że $f(W \cap \Omega) \subset \Omega$, $f(\mathrm{Fr}\,\Omega) \subset \mathrm{Fr}\,\Omega$ i $\mathrm{Fr}\,\Omega$ odpycha po stronie Ω, tzn. $\bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(W \cap \mathrm{cl}\,\Omega) = \mathrm{Fr}\,\Omega$. Wtedy albo $\mathrm{HD}_{\mathrm{hyp}}(\mathrm{Fr}(\Omega)) > 1$, albo $\mathrm{Fr}\,\Omega$ jest analityczną krzywą Jordana lub analitycznym łukiem.*

Dziedzina (obszar) Ω z f jak powyżej została nazwana *RB-dziedziną* (RB od *repelling boundary*), nazwa wprowadzona w [42, 61] (ta definicja ma sens także dla obszarów niejednospójnych). Twierdzenie 8.2 (przynajmniej część $\sigma^2 > 0$) wynika bezpośrednio z Twierdzenia 7.2. Niech $R : \mathbb{D} \to \Omega$ będzie przekształceniem Riemanna, i niech $g : W' \to \mathbb{D}$ będzie zdefiniowane przez $g := R^{-1} \circ f \circ R$ na $W' = R^{-1}(W \cap \Omega)$. Rozważmy g.c.t. $\mathscr{T} = \mathscr{T}(z, \gamma^1, \dots, \gamma^d)$ dla z i γ_j w $W \cap \Omega$ dostatecznie blisko $\mathrm{Fr}\,\Omega$ żeby ta definicja miała sens i oznaczmy $d = \deg f|_{W\cap\Omega}$ (sytuacja taka sama jak w Uwagach w Rozdziale 7 powyżej, ale z odwrotną kolejnością definiowania f i g). Rozważmy g.c.t. $\mathscr{T}' = R^{-1}(\mathscr{T})$. Funkcja g rozszerza się holomorficznie poza $\partial\mathbb{D}$, które dla tego rozszerzenia okazuje się być odpychającym repellerem[8]Zatem przekształcenie kodowania dla $\mathscr{T}'$ jest hölderowskie, a ponieważ $\log|g'|$ jest też funkcją hölderowską, to $\phi : \Sigma^d \to \mathbb{R}$ zdefiniowana jako $\phi(\alpha) = -\log|g'| \circ (R^{-1}(z))_\infty(\alpha)$ dla drzewa $\mathscr{T}'$ jest hölderowska. Istnieje więc miara Gibbsa $\nu = \nu_\phi$.

Łatwo zauważyć, że $P(\phi) = P(-\log|g'|) = 0$, i istnieje dla $-\log|g'|$ miara Gibbsa $\widehat{l} \in \mathcal{M}(g)$, równoważna mierze długości l (a.c.i.m.). Wtedy ν jest podniesieniem $\widehat{l}$ to Σ^d przy kodowaniu danym $\mathscr{T}'$.

W rezultacie $\mu := z_\infty(\nu)$ jest równe mierze $\widehat{\omega} := \overline{R}_*(\widehat{l})$, która jest f-niezmiennicza i będąca w klasie równoważności miar harmonicznych ω na $\mathrm{Fr}\,\Omega$ oglądanym z Ω.

Zauważmy teraz, że $\mathrm{HD}(\widehat{\omega}) = 1$ wynika z równości (5.3), z równości $h_{\widehat{\omega}}(f) = h_{\widehat{l}}(g)$, patrz [41, 42], i z równości wykładników Lapunowa $\int \log|f'|\, d\widehat{\omega} = \int \log|g'|\, d\widehat{l} > 0$. Ta ostatnia równość wynika z następującej równości dla prawie każdego $\zeta \in \partial\mathbb{D}$:

$$\lim_{r\to 1} \frac{\log|(f^n)'(R(r\zeta))| - \log|(g^n)'(r\zeta))}{\log(1-r)} = \lim_{r\to 1} \frac{-\log|R'(r\zeta)|}{\log(1-r)} = 0. \tag{8.1}$$

Pierwszą równość dowodzi się używając $f \circ R = R \circ g$ w $\mathbb{D}$, najpierw działając R blisko $\partial\mathbb{D}$, następnie iterując f, potem działając R^{-1} będąc głęboko w Ω, na końcu iterując g wstecz.

Ostatnia równość w ynika z harmoniczności $\log|R'|$, która pozwala zastąpić całkę po okręgach o środku w 0 przez $\log|R'(0)|$. Szczegóły można znaleźć w [42].

Przytoczmy jednak zdumiewający fakt, że $\mathrm{HD}(\omega) = 1$ jest prawdziwe w pełnej ogólności, bez założenia istnienia przekształcenia f, patrz Makarov [30].

Szkic dowodu Twierdzenia 8.2 przy $\sigma^2 > 0$ jest zakończony. To, że $\sigma^2 = 0$ implikuje analityczność $\mathrm{Fr}\,\Omega$ było już komentowane na początku tego rozdziału.

9. Wersje związane z Prawem Iterowanego Logarytmu

Wynikające z Prawa Iterowanego Logarytmu (Law of Iterated Logarithm, w skrócie LIL) do $\psi : \Sigma^d \to \mathbb{R}$ duże odchylenia $S_n\psi$ od 0 prowadzą do (patrz [61] i [60]:

---

[8]Istnienie holomorficznego (konforemnego) rozszerzenia to tzw. zasada symetrii Schwarza. Własność rozciągania dla g wynika z założenia RB dla f i z Lematu Schwarza.

Twierdzenie 9.1. *W sytuacji Twierdzenia 7.2, jeśli* $\sigma^2 = \sigma_\nu^2(\psi) > 0$, *dla* $c(\mu) := \sqrt{2\sigma^2/\chi(\mu)}$, $\kappa := \mathrm{HD}(\mu)$ *i* $\alpha_c(r) := r^\kappa \exp(c\sqrt{\log 1/r \log\log\log 1/r})$

1) $\mu \perp H_{\alpha_c}$, *tzn. jest singularna względem szczególnej miary Hausdorffa (refined Hausdorff measure,* [60, Section 8.2]*) dla funkcji próbnej* α_c, *dla* $0 < c < c(\mu)$*;*

2) $\mu \ll H_{\alpha_c}$, *tzn. jest absolutnie ciągła, dla wszystkich* $c > c(\mu)$*.*

Rzeczywiście, podstawiając w LIL $n \sim (\log 1/r_n)/\chi(\mu)$ dla $r_n = |(f^n)'(z)|^{-n}$, otrzymujemy dla μ-prawie każdego z

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\mu(B(z, r_n)}{\alpha_c(r_n)} = \infty \text{ dla } 0 < c < c(\mu) \quad \text{i} \quad \cdots = 0 \text{ for } c > c(\mu) \tag{9.1}$$

(w tym drugim przypadku po obcięciu a priori dowolnie małej części μ).

To jest tzw. *Szczególny lemat o lokalnej objętości* (Refined Volume Lemma), patrz [61, Section 4] i, trudniejszy przypadek: $c > c(\mu)$, [62, Section 5].[9]

Możemy zastosować twierdzenie 9.1 do $\mu = \widehat{\omega} \in \mathcal{M}(f, \mathrm{Fr}\,\Omega)$ równoważnej mierze harmonicznej ω jak w Rozdziale 8.

To daje szczególną informację o radialnym wzroście pochodnej przekształcenia Riemanna, postępując za (8.1):

Twierdzenie 9.2. *Niech* Ω *będzie RB-dziedziną w* $\overline{\mathbb{C}}$ *z nieanalitycznym brzegiem i niech* $R : \mathbb{D} \to \Omega$ *będzie przekształceniem Riemanna. Wtedy istnieje* $c(\Omega) > 0$ *takie, że dla Lebesgue'a prawie każdego* $\zeta \in \partial\mathbb{D}$

$$G^+(\zeta) := \limsup_{r\to 1} \frac{\log|R'(r\zeta)|}{\sqrt{\log(1/1-r)\log\log\log(1/1-r)}} = c(\Omega) \tag{9.2}$$

Podobnie $G^-(\zeta) := \liminf \cdots = -c(\Omega)$*. Wreszcie:* $c(\Omega) = c(\widehat{\omega})$*w Twierdzeniu 9.1.*

W rzeczywistości Twierdzenia 9.1 dla $\mu = \widehat{\omega}$ i 9.2 są spełnione dla każdego jednospójnego obszaru $\Omega \subset \mathbb{C}$, włącznie z $c(\Omega) = c(\widehat{\omega})$. Dynamika nie jest potrzebna. Oczywiście trzeba dodać w obu definicjach $\operatorname{ess\,sup}$ po odpowiednio $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ i po $z \in \mathrm{Fr}\,\Omega$ (dla $c(z) = c(\omega)$ określonego wzorem (9.1), porównaj [60, Th. 8.6.1]). Ess sup jest potrzebne ponieważ przy nieobecności ergodyczności te funkcje nie muszą być prawie wszędzie stałe. Patrz [13, Th. VIII.2.1 (a)] i podane tam odsyłacze do przełomowych prac N. Makarowa, w szczególności [30].

Istnieje uniwersalna stała Makarowa $C_{\mathrm{M}} < \infty$ szacująca z góry wszystkie $c(\Omega)$ i $c(\widehat{\omega})$ w (9.2). Najlepsze oszacowanie z góry, które znalazłem w literaturze, to $C_{\mathrm{M}} \le 1.2326$, [19]. W [43] znalaz}em oszacowanie słabsze, używając naturalnej metody przedstawiania $\log|R'|$ jako granicy szeregu słabo zależnych zmiennych losowych aproksymujących martyngał na $\partial\mathbb{D}$, i w rezultacie spełniajych LIL.
Niestety kolejne aproksymacje prowadziły do strat w końcowym oszacowaniu.

Dla holomorficznego rozciągającego repellera $f : X \to X$ i hölderowskiego potentiału $\phi : X \to X$, asymptotyczna wariancja dla miary Gibbsa $\mu = \mu_{t_0\phi}$ dla

[9] Zwykły *lemat o lokalnej objętości* (Volume Lemma) mówi, że dla μ-prawie każdego z istnieje niezależna od z granica $\lim_{n\to\infty} \frac{\log\mu(B(z,r_n))}{\log r_n} = \kappa$, i jest kluczowy np. w udowodnieniu (5.3), patrz [60, Tw. 11.4.2].

każdego $t_0 \in \mathbb{R}$ spełnia wzór Ruelle'a (patrz [60]):

$$\sigma_\mu^2(\phi - \int \phi \, d\mu) = \frac{d^2 P(t\phi)}{dt^2}\bigg|_{t=t_0}. \tag{9.3}$$

Question. Czy (9.3) zachodzi dla dowolnej funkcji wymiernej i hiperbolicznego potencjału i jego stanu równowagi na zbiorze Julii? A jak jest dla RB-dziedziny $f : \mathrm{Fr}\,\Omega \to \mathrm{Fr}\,\Omega$ i $\mu = \widehat{\omega}$?

Dla RB-dziedziny Ω dla f i dla $\phi = -\log|f'|$, jeśli $g(z) = z^d$, np. dla basenu nieskończoności $\Omega = \Omega_\infty$ dla wielomianu f ze spójnym zbiorem Julii $J(f) = \mathrm{Fr}\,\Omega$), rozważa się *spektrum średnich całkowych* (integral means spectrum) zależne tylko od Ω,

$$\beta_\Omega(t) := \limsup_{r\to 1} \frac{1}{|\log(1-r)|} \log \int_{\zeta\in\partial\mathbb{D}} |R'(r\zeta)|^t \, |d\zeta| \tag{9.4}$$

Okazuje się, że spełnia ono równanie

$$\beta_\Omega(t) = t - 1 + \frac{P(t\phi)}{\log d},$$

patrz np. [60, Eq. (9.6.2.)].

Dla $t_0 = 0$ mamy $\mu = \widehat{\omega}$ i lewa strona (9.3) może być zapisana jako $(\frac{1}{2}\log d)\sigma^2(\log R')$ ($\frac{1}{2}$ bo mamy tu R', a nie $|R'|$), patrz (7.1) i (8.1), gdzie

$$\sigma^2(\log R') := \limsup_{r\to 1} \frac{\int_{\partial\mathbb{D}} |\log R'(t\zeta)|^2 \, |d\zeta|}{-2\pi \log(1-r)|}.$$

Tak więc (9.3) zmienia się na $\sigma^2(\log R') = 2\frac{d^2\beta_\Omega(t))}{dt^2}|_{t=0}$, patrz [24]. Ma więc analityczne, nie dynamiczne, znaczenie. Jest także związane z metryką Weil'a-Petersson'a, patrz [34].

10. Osiągalność

Przypomnijmy następujące twierdzenie z [46].

Twierdzenie 10.1. *Niech Λ będzie kwazi-repellerem dla geometrycznego drzewa kodującego dla holomorficznego przekształcenia $f : U \to \overline{\mathbb{C}}$. Załóżmy, że*

$$\mathrm{diam}(\gamma_n(\alpha)) \to 0, \ \ \textit{dla } n \to \infty \tag{10.1}$$

jednostajnie względem $\alpha \in \Sigma^d$. Wtedy każdy dobry punkt $q \in \overline{\Lambda}$[10] jest granicą zbieżnej gałęzi $b(\alpha)$, tzn. $q \in \Lambda$. W szczególności teza jest prawdziwa dla każdego q, dla którego $\underline{\chi}(q) > 0$ i spełniony jest warunek odwrotnej lokalne niezmienniczości (patrz niżej).

[10] W [46] rozważa się zbiór $\widehat{\Lambda}$, który jest zbiorem wszystkich punktów skupienia zbioru wierzchołków drzewa $\mathscr{T}$. Dla drzewa w RB-dziedzinie, lub ogólnie w obszarze jednospójnym jak w Uwagach w Rozdziale 7, zachodzi $\overline{\Lambda} = \widehat{\Lambda}$. Nie wiem na ile ten fakt jest ogólny.

Własność "dobry" została zdefiniowana w [46, Definition 2.5]. Chodzi o to, żeby było wiele czasów n (dolna granica dodatnia) z których można dojść od dużej skali W_n wewnątrz U blisko $f^n(q)$ biorąc wstecz kolejno W_j składowa $f^{-1}(W_{j+1})$ w U wzdłuż $f^j(q)$ (z dopuszczoną dużą krytycznością – inaczej niż w TCE) co daje używając kolejnych dobrych n i j odpowiednią rodzinę "teleskopów". Możliwość znalezienia tych składowych w U moňa nazwać *odwrotną lokalną niezmienniczością* U dla q.

Kiedy U jest basenem bezpośredniego przyciągania do punktu stałego przyciągającego (tzn. składową spójności zbioru przeciąganego zawierającą ten punkt) lub po prostu jest RB-dziedziną Ω, taką, że $f^{-1}(W \cap \Omega) \subset \Omega$, patrz Tw. 8.1), wtedy Twierdzenie 10.1 mówi, że q jest punktem końcowym (zbieżności) krzywej w U. To jest uogólnienie twierdzenia Douady'ego-Eremenko-Levina-Petersena dla wielomianu, gdzie q jest punktem okresowym odpychającym w brzegu U basenu nieskończoności, bo U jest wtedy całkowicie niezmienniczy, tzn. $f^{-1}(U) = U$ co implikuje odwrotną lokalną niezmienniczość.

Dzięki Twierdzeniu 10.1 można udowodnić, że dowolna miara probabilistyczna na $\overline{\Lambda}$, f-niezmiennicza, z dodatnim wykładnikiem Lapunowa podnosi się do ς-niezmienniczej miary borelowskiej na Σ^d. Dokładniej, zachodzi:

Wniosek 10.2. *Każda bezatomowa miara hiperboliczna $\mu \in \mathcal{M}(f)$ na domknięciu kwazi-repellera Λ, tzn. taka, że $\chi(\mu) > 0$ (przy spełnionym warunku odwrotnej lokalnej niezmienniczości dla μ-prawie każdego punktu), jest $(z_\infty)_*$-obrazem ς-niezmienniczej miary ν na Σ^d, przy założeniu* (10.1) *i że drzewo $\mathscr{T}$ nie ma samoprzecięć. W szczególności, ν istnieje dla każdej RB-dziedziny.*

W dowodzie korzysta się z faktu, że zbiór punktów przynajmniej potrójnych, tj. granic co najmniej trzech nieskończonych gałęzi drzewa $\mathscr{T}$ jest przeliczalny, więc ma miarę μ równą 0. (więcej szczegółów podano w wersji tego artykułu w Proc. ICM).

References

1. K. Barański, B. Karpińska, A. Zdunik, *Hyperbolic dimension of Julia sets of meromorphic maps with logarithmic tracts*, Int. Math. Res. Not. 4 (2009), 615 – 624.
2. K. Barański, B. Karpińska, A. Zdunik, *Bowen's formula for meromorphic functions*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. 32 (2012), no. 4, 1165 – 1189.
3. R. Bowen, *Equlibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, Lect. Notes in Math. 470 (1975), Springer Verlag.
4. I. Binder, N. Makarov, S. Smirnov, *Harmonic measure and polynomial Julia sets*, Duke Math. J. 117.2 (2003), 343 – 365.
5. H. Bruin, J. Rivera-Letelier, W. Shen, S. van Strien, *Large derivatives, backward contraction and invariant densities for interval maps*, Invent. math. 172.3 (2008), 509 – 533.
6. H. Bruin, M. Todd, *Equilibrium states for interval maps: potentials with* $\sup\phi - \inf\phi < h_\top(f)$, Comm. Math. Phys. 283.3 (2008), 579 – 611. Erratum: Comm. Math. Phys. 304.2 (2011), 583 – 584.
7. D. Coronel, J. Rivera-Letelier, *Low-temperature phase transitions in the quadratic family*, arXiv:1205.1833, to appear in Adv. Math.
8. D. Coronel, J. Rivera-Letelier, *High-order phase transitions in the quadratic family*, arXiv:1305.4971.

9. W. de Melo, S. van Strien, *One-dimensional Dynamics*, Springer-Verlag, 1994.
10. M. Denker, F. Przytycki, M. Urbański, *On the transfer operator for rational functions on the Riemann sphere*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **16** (1996), 255 – 266.
11. M. Denker, M. Urbański, *Ergodic theory of equilibrium states for rational maps*, Nonlinearity 4(1) (1991), 103 – 134.
12. N. Dobbs, M. Todd, *Free entropy jumps up*, arXiv:1512.09245.
13. J. B. Garnett, D. E. Marshall, *Harmonic Measure*, New Mathematical Monographs, Cambridge, 2005.
14. K. Gelfert, F. Przytycki, M. Rams, *On the Lyapunov spectrum for rational maps*, Math. Annalen **348** (2010), 965 – 1004.
15. K. Gelfert, F. Przytycki, M. Rams, *Lyapunov spectrum for multimodal maps*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **36** (2016), 1441 – 1493.
16. J. Graczyk, S. Smirnov, *Collet, Eckmann and Hölder*, Invent. Math. 133 (1998), 69 – 96.
17. J. Graczyk, S. Smirnov. *Non-uniform hyperbolicity in complex dynamics*, Invent. math. 175 (2009), 335 – 415.
18. P. Haissinsky, K. M. Pilgrim *Coarse Expanding Conformal Dynamics*, Asterisque 325, 2009.
19. H. Hedenmalm, I. Kayumov, *On the Makarov Law of the Iterated Logarithm*, Proc. Amer. Math. Soc. 135.7 (2007), 2235 – 2248.
20. J. Heinonen, P. Koskela, *Definitions of quasiconformality*, Invent. math. 120 (1995), 61 – 79.
21. F. Hofbauer, G. Keller, *Equilibrium states and Hausdorff measures for interval maps*, Math. Nachr. 164 (1993), 239 – 257.
22. F. Hofbauer, M. Urbański, *Fractal properties of invariant subsets for piecewise monotonic maps on the interval* Trans. Amer. Math. Soc. 343 (1994), 659 – 673.
23. I. Inoquio-Renteria, J. Rivera-Letelier, *A characterization of hyperbolic potentials of rational maps*, Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) 43.1 (2012), 99 – 127.
24. O. Ivrii, *On Makarov's principle in conformal mapping*, arXiv:1604.05619, to appear in Int. Math. Res. Not.
25. M. V. Jakobson, *Markov partitions for rational endomorphisms of the Riemann sphere*, Mnogokomponentnyje slucajnyje sistemy, pp. 303 – 319. Izd. Nauka, Moscow 1978 (In Russian).
26. G. Levin, F. Przytycki, W. Shen, *The Lyapunov exponent of holomorphic maps*, Inventiones math. 205 (2016), 363 – 382.
27. H. Li, J. Rivera-Letelier, *Equilibrium states of interval maps for hyperbolic potentials*, Nonlinearity 27.8 (2014), 1779 – 1804.
28. H. Li, J. Rivera-Letelier, *Equilibrium states of weakly hyperbolic one-dimensional maps for Hölder potentials* Comm. Math. Phys. 328.1 (2014), 397 – 419.
29. M. Lyubich, *Analytic low-dimensional dynamics: from dimension one to two* Proc. ICM, Seoul 2014, Vol. I, 443 – 474.
30. N. G. Makarov, *On the distortion of boundary sets under conformal mappings*, Proc. London Math. Soc. 3^d ser. 51 (1985), 369 – 384.
31. N. Makarov and S. Smirnov, *On thermodynamics of rational maps. II. Non-recurrent maps*, J. London Math. Soc. (2), 67(2) (2003), 417 – 432.
32. A. Manning, *The dimension of the maximal measure for a polynomial map*, Ann. of Math. 119 (1984), 425 – 430.
33. D. Mauldin, M. Urbański, *Graph Directed Markov Systems: Geometry and Dynamics of Limit Sets*, Cambridge University Press, 2003.
34. C. T. McMullen, *Thermodynamics, dimension and the Weil-Petersson metric*, Invent. math. 173 (2008), 365 – 428.
35. J. Milnor, *On Lattes maps. Dynamics on the Riemann sphere*, 9 – 43, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006.
36. M. Misiurewicz, W. Szlenk, *Entropy of piecewise monotone mappings*, Studia Math. **67** (1980), 45 – 63.

37. Nekrashevych, *Iterated monodromy groups*, Groups St Andrews 2009 in Bath, Vol. 1, London Mathematical Society, Lecture Note Series 387, Cambridge University Press, 2011, pp. 41 – 93.
38. T. Nowicki, F. Przytycki, *Topological invariance of the Collet-Eckmann property for S-unimodal maps*, Fund. Math. **155** (1998), 33 – 43.
39. T. Nowicki, D. Sands. *Non-uniform hyperbolicity and universal bounds for S-unimodal maps*, Invent. Math. 132 (1998), 633 – 680.
40. Y. Pesin, *On the work of Sarig on countable Markov chains and thermodynamic formalism*, J. Mod. Dyn. 8.1 (2014), 1 – 14.
41. F. Przytycki, *Hausdorff dimension of harmonic measure on the boundary of an attractive basin for a holomorphic map*, Invent. math. 80 (1985), 161 – 179.
42. F. Przytycki, *Riemann map and holomorphic dynamics*, Invent. Math. 85 (1986), 439 – 455.
43. F. Przytycki, *On the law of iterated logarithm for Bloch functions*, Studia Math. 93.2 (1989), 145 – 154.
44. F. Przytycki, *On the Perron-Frobenius-Ruelle operator for rational maps on the Riemann sphere and for Hölder continuous functions*, Bull. Braz. Math. Soc. 20.2 (1990), 95 – 125.
45. F. Przytycki, *Lyapunov characteristic exponents are nonnegative*, Proc. Amer. Math. Soc. **119** (1993), 309 – 317.
46. F. Przytycki, *Accessibility of typical points for invariant measures of positive Lyapunov exponents for iterations of holomorphic maps*, Fundamenta Mathematicae 144 (1994), 259 – 278.
47. F. Przytycki, *Iteration of holomorphic Collet-Eckmann maps: Conformal and invariant measures. Appendix: On non-renormalizable quadratic polynomials*, Trans. Amer. Math. Soc. **350** (1998), 717 – 742.
48. F. Przytycki, *Conical limit set and Poincaré exponent for iterations of rational functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **351** (1999), 2081 – 2099.
49. F. Przytycki. *Hölder implies Collet-Eckmann.* Géométrie complexe et systèmes dynamiques (Orsay, 1995). Astérisque 261 (2000), 385 – 403.
50. F. Przytycki, *Expanding repellers in limit sets for iterations of holomorphic functions*, Fund. Math. 186.1 (2005), 85 – 96.
51. F. Przytycki, *On the hyperbolic Hausdorff dimension of the boundary of a basin of attraction for a holomorphic map and of quasirepellers*, Bull. Pol. Acad. Sci. Math. 54.1 (2006), 41 – 52.
52. F. Przytycki, *Geometric pressure in real and complex 1-dimensional dynamics via trees of pre-images and via spanning sets*, Monatshefte für Math., published online : 21 Nov. 2017, DOI 10.1007/s00605-017-1137-8.
53. F. Przytycki, J. Rivera-Letelier, *Nice inducing schemes and the thermodynamics of rational maps*, Communications in Math. Phys. **301.3** (2011), 661 – 707.
54. F. Przytycki and J. Rivera-Letelier, *Geometric pressure for multimodal maps of the interval*, `arXiv:1405.2443`, to appear in Memoirs of the Amer. Math. Soc.
55. F. Przytycki, J. Rivera-Letelier, S. Smirnov, *Equivalence and topological invariance of conditions for non-uniform hyperbolicity in the iteration of rational maps*, Inventiones Mathematicae **151** (2003), 29 – 63.
56. F. Przytycki, J. Rivera-Letelier, and S. Smirnov, *Equality of pressures for rational functions*, Ergodic Theory Dynam. Systems **24** (2004), 891 – 914.
57. F. Przytycki, S. Rohde, *Porosity of Collet-Eckmann Julia sets*, Fund. Math. 155 (1998), 189 – 199.
58. F. Przytycki, S. Rohde. *Rigidity of holomorphic Collet-Eckmann repellers*, Arkiv för Mat. 37.2 (1999), 357 – 371.
59. F. Przytycki, J. Skrzypczak, *Convergence and pre-images of limit points for coding trees for iterations of holomorphic maps*, Math. Annalen 290 (1991), 425 – 440.
60. F. Przytycki, M. Urbański, *Conformal Fractals: Ergodic Theory Methods*, London Mathematical Society Lecture Note Series 371, Cambridge University Press, 2010.

61. F. Przytycki, M. Urbański, A. Zdunik, *Harmonic, Gibbs and Hausdorff measures for holomorphic maps, I*, Annals of Math. 130 (1989), 1 – 40.
62. F. Przytycki, M. Urbański, A. Zdunik, *Harmonic, Gibbs and Hausdorff measures for holomorphic maps, II*, Studia Math. 97.3 (1991), 189 – 225.
63. F. Przytycki, A. Zdunik, *Density of periodic sources in the boundary of a basin of attraction for iteration of holomorphic maps, geometric coding trees technique*, Fund. Math. 145 (1994), 65 – 77.
64. J. Rivera-Letelier, *Asymptotic expansion of smooth interval maps*, arXiv:1204.3071v2.
65. J. Rivera-Letelier, W. Shen, *Statistical properties of one-dimensional maps under weak hyperbolicity assumptions*, Ann. Sci. de l'ENS 47.6 (2014), 1027 – 1083.
66. D. Ruelle, *Thermodynamic Formalism*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, vol. 5, Addison-Wesley Publ. Co., London, 1978.
67. W. Shen, S. van Strien, *Recent developments in interval dynamics*, Proc. ICM Seoul 2014, Vol III, (2014), 699 – 719.
68. Ya. G. Sinai, *Gibbs measures in ergodic theory*, (Russian) Uspehi Mat. Nauk 27, no. 4(166) (1972), 21 – 64. Russian Mathematical Surveys, 1972, 27:4, 21 – 69 (English).
69. B. O. Stratmann, M. Urbański. *Real analyticity of topological pressure for indifferentally semihyperbolic generalized polynomial-like maps*, Indag. Math. **14(1)**, (2003), 119 – 134.
70. D. Sullivan, *Seminar on Conformal and hyperbolic Geometry*, Notes by M. Baker and J. Seade, Preprint IHES, 1982.
71. W. Szlenk, *Wstęp do teorii gładkich układów dynamicznych*, Bibilioteka Matematyczna , tom 56, PWN, Warszawa 1982.
72. M. Szostakiewicz, M. Urbański, A. Zdunik, *Stochastics and thermodynamics for equilibrium measures of holomorphic endomorphisms on complex projective spaces*, Monatsh. Math. 174.1 (2014), 141 – 162.
73. M. Szostakiewicz, M. Urbański, A. Zdunik, *Fine inducing and equilibrium measures for rational functions of the Riemann sphere*, Israel J. Math. 210.1 (2015), 399 – 465.
Walters. P. Walters, *An Introduction to Ergodic Theory*, Springer-Verlag, 1982.
74. A. Zdunik, *Parabolic orbifolds and the dimension of the maximal measure for rational maps*, Invent. math. 99 (1990), 627 – 649.
75. A. Zdunik, *Harmonic measure versus Hausdorff measures on repellers for holomorphic maps*, Trans. AMS 326.2 (1991), 633 – 652.

Instytut Matematiczny Polskiej Akademii Nauk, ul. Śniadeckich 8, 00-656, Warszawa
E-mail address: `feliksp@impan.pl`