Zadania domowe

Skrócone zasady rozwiązywania zadań domowych:

1. Numer zadania odpowiada numerowi kolokwium, które można poprawić rozwiązując to zadanie (prościej: by poprawić np. kolokwium 2, należy rozwiązać zadanie 2).
2. Można rozwiązać co najwyżej jedno z poniższych zadań. Maksymalna ilość punktów za zadanie to połowa punktów brakujących na poprawianym kolokwium do maksimum.
3. Zadanie należy rozwiązać samodzielnie. Rozwiazanie można naturalnie konsultować, ze sobą lub z prowadzącym zajęcia (z prośbą o podpowiedź włącznie), jednakże w wypadku wykrycia bezmyślnego (lub niezbytmyślnego) skopiowania czyjejś pracy osoby takie bedą surowo tępione.
4. Termin oddania zadań: do 24.01.2014, godzina 9:00 w dowolnej formie (osobiście, mailowo, pocztą).
5. W razie wątpliwosci prowadzący zajęcia zastrzega sobie prawo do ostatecznej interpretacji powyższych zasad.

Zadanie 1

Niech $V \subset \mathbb{R}^5$ będzie podprzestrzenią opisaną układem równań

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + 3x_5 = 0 \\ -2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

zaś $W = lin\{(2,0,0,1,0),(1,-1,1,-1,1),(1,5,-2,5,-2)\} \subset \mathbb{R}^5$.

a) Podaj bazę $lin\{V, W\}$

b) Podaj bazę $V \cap W$

c) Uzupełnij bazę z punktu (a) do bazy $\mathbb{R}^5$.

Wskazówka: Opisz V i W zarówno w postaci układów równań, jak i parametrycznie (tzn. jako lin od czegoś). Zauważ, że jeden ze sposobów opisu przyda się w punkcie (a), a drugi w (b).

Zadanie 2

Niech przekształcenie liniowe $\phi_r : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie dane w bazie $\mathcal{A} = \{(1,2,3),(2,3,4),(3,4,6)\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ macierzą $A_r = M(\phi_r)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \\ 1 & r & 0 \end{bmatrix}$, zaś przekształcenie liniowe $\psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ bedzie dane macierzą $B = M(\psi)_{st}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Dana jest ponadto baza $\mathcal{B} = \{(1,0,0,1),(2,3,-1,1),(0,1,1,0),(-1,2,0,1)\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^4$.

a) Dla jakich $r \in \mathbb{R}$ macierz A_r jest odwracalna? Dla wszystkich takich r znajdź macierz $M((\phi_r)^{-1} \circ \psi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$.

b) Niech $v = (1,-1,1,1) \in \mathbb{R}^4$. Podaj wektor $w = ((\phi_r)^{-1} \circ \psi)(v)$ w bazie standardowej.

Zadanie 3

Niech $s : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ będzie symetrią prostopadłą względem płaszczyzny $p = lin\{(1,2,0,1),(2,0,0,-1)\}$.

a) Podaj macierz s w bazie standardowej.

b) Znajdź wektory i wartości własne przekształcenia s.

c) Niech $r : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ będzie symetrią prostopadłą względem prostej $l = lin\{(2,3,-1,1)\}$. Czy macierze $M(s)_{st}^{st}$ oraz $M(r)_{st}^{st}$ są podobne?

Wskazówka: Punkt (c) można oczywiście uczciwie przeliczyć, ale można to zrobić też sprytniej. Niech $\mathcal{A}$ bedzie bazą $\mathbb{R}^4$ złożoną z baz p i $p^\perp$, zaś $\mathcal{B}$-bazą $\mathbb{R}^4$ złożoną z baz l i $l^\perp$. Jak wygladają macierze $M(s)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ oraz $M(r)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$?