Kolokwium 2

Czas: 60 minut. Zadanie 4 nie jest obowiązkowe, choć rozwiązanie będzie mile widziane.

Zadanie 1 (10 pkt)

Niech $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ będą pewnymi bazami $\mathbb{R}^2$. Niech $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ będzie przekształceniem zadanym wzorem $\phi((x,y,z)) = (x-z, 3x+y-z)$, zaś $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ przekształceniem liniowym o macierzy (w odpowiednich bazach) $M(\psi)_{st}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Wiadomo też, że $M(Id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$. Podaj macierz $M(\psi \circ \phi)_{st}^{\mathcal{B}}$.

Zadanie 2 (10 pkt)

Niech $\mathcal{A} = \{(1,2,2),(1,0,1),(0,1,0)\}$ oraz niech $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem liniowym takim, że $\phi((1,2,2)) = (1,5,-3)$, $\phi((1,0,1)) = (2,1,-3)$ oraz $\phi((0,1,0)) = (-1,1,1)$.

a) Podaj macierze $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{st}$, $M(\phi)_{st}^{st}$ i wzór analityczny na ϕ.

b) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ istnieje wektor $v \in \mathbb{R}^3$ taki, że $\phi(v) = (2,t,2)$? Dla każdego takiego $t \in \mathbb{R}$ podać ile takich wektorów istnieje.

Zadanie 3 (10pkt)

Niech $A(r) = \begin{bmatrix} 1 & r & 1 & 1 \\ 1 & 1 & r & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $r \in \mathbb{R}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Dla jakich $r \in \mathbb{R}$ wiersze macierzy $A(r)$ są liniowo zależne?

b) Oblicz $\det(A(200)^2 B^{-1} A(200)^{-2})$.

Zadanie 4 (dodatkowe)

Bieżnia na stadionie w starożytnej Olimpii miała 192,27m długości, co odpowiadało 600-krotności długości stopy Heraklesa[1]. Jaki (w przybliżeniu) rozmiar buta nosił Herakles, w skali europejskiej?

[1] dane wg: Gościnny, Uderzo "Astérix aux Jeux Olympiques", Dargaud Editeur, Paryż 1963