Kolokwium 2, grupa A

Czas: 60 minut. Zadanie 4 (na odwrocie) nie jest obowiązkowe, choć rozwiązanie będzie mile widziane.

Zadanie 1 (10 pkt)

W $\mathbb{R}^3$ dano bazę $\mathcal{A} = \{(1,2,3),(0,1,0),(2,1,0)\}$ oraz bazę $\mathcal{B}$ taką, że $M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$.

a) Znaleźć bazę $\mathcal{B}$.

b) Niech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ będzie przekształceniem liniowym spełniającym $M(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ dla pewnej bazy $\mathcal{C}$ przestrzeni $\mathbb{R}^2$. Wyznaczyć $M(f)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.

Zadanie 2 (10 pkt)

Rozpatrzmy przekształcenie liniowe $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dane wzorem $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - x_3, 3x_1 - x_3)$. Niech ponadto $\mathcal{A} = \{(3,2,1),(1,1,0),(-1,-1,2)\}$ będzie bazą $\mathbb{R}^3$, zaś $\mathcal{B} = \{(1,4),(0,-1)\}$ bazą $\mathbb{R}^2$.

a) Znaleźć macierz $M(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$.

b) Niech $\alpha \in \mathbb{R}^3$ będzie wektorem o współrzędnych 1, -2, 5 w bazie $\mathcal{A}$. Znajdź współrzędne $f(\alpha)$ w bazie $\mathcal{B}$.

Zadanie 3 (10pkt)

Niech $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 7 & 6 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ oraz $B(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & t & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ dla $t \in \mathbb{R}$.

a) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ kolumny macierzy $B(r)$ są liniowo zależne?

b) Oblicz $\det(AB(1)A)$.

c) Oblicz $\det(B(1)AB(-1))$.

Zadanie 4 (dodatkowe)

Wymień jak najwięcej ośmiotysięczników (jest ich 14). Wszelkie dodatkowe informacje ich dotyczące będą mile widziane (typu: wysokość, czy został zdobyty zimą, czy leży w Himalajach czy w Karakorum itp.)

Wskazówka: Nazwa trzeciego co do wysokości ośmiotysięcznika tłumaczy się z j. nepalskiego jako "Pięć skarbów wielkiego śniegu".