GAL II: zadania domowe, seria 1

Każde zadanie jest na 10 punktów, należy zrobić 4 zadania. Zadanie 5 jest odrobinę ambitniejsze, jego zrobienie (poza zadowoleniem prowadzącego, walorami edukacyjnymi itp.) będzie mieć dodatkowy pozytywny wpływ na ocenę z aktywności. Zadania można rozwiązywać w zespołach maksymalnie dwuosobowych. **Termin oddania zadań: 6.03.2013 godz. 17.00**.

Zadanie 1

Czy poniższe macierze są podobne? Odpowiedź uzasadnij:

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 10 & 17 & 50 \\ 91 & 35 & 98 \\ -90 & -50 & -3 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 32 & -98 & -51 \\ -96 & -11 & -61 \\ 82 & -39 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Zadanie 2

Zbadaj, czy dla podanych endomorfizmów istnieje baza złożona z wektorów własnych. Jeżeli tak, podaj tę bazę i macierz tego endomorfizmu w podanej bazie:

a) $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; $\phi((x_1, x_2, x_3)) = (4x_1, 2x_1 + x_2 + 2x_3, x_1 - x_2 + 4x_3)$

b) $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$; $\phi((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (2x_1 + 4x_2, 5x_1 + 3x_2, x_3 + x_4, 3x_3 - x_4)$

Zadanie 3

Niech $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Znaleźć A^{111}.

Zadanie 4

Niech V będzie przestrzenią liniową nad $\mathbb{K}$ i niech $\omega(\lambda)$ będzie wielomianem charakterystycznym endomorfizmu $\phi : V \to V$. Wykazać, że jeżeli dla pewnego $c \in \mathbb{K}$ zachodzi $\omega(\lambda) = (c - \lambda)^k g(\lambda)$, gdzie $g(c) \neq 0$, to $\dim V_{(c)} \leqslant k$.

Zadanie 5

Niech $(-1)^n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ będzie wielomianem charakterystycznym macierzy $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Opisać wielomian charakterystyczny macierzy A^{-1}.