GAL II: zadania domowe, seria 2

Każde zadanie jest na 10 punktów, należy zrobić 4 zadania. Zadanie 5 jest odrobinę ambitniejsze, jego zrobienie (poza zadowoleniem prowadzącego, walorami edukacyjnymi itp.) będzie mieć dodatkowy pozytywny wpływ na ocenę z aktywności. Zadania można rozwiązywać w zespołach maksymalnie dwuosobowych, wystarczy, że rozwiązanie zanotuje jedna osoba (pod warunkiem, że obie podpiszą się pod rozwiązaniem). **Termin oddania zadań: 13.03.2013 godz. 17.00**.

Zadanie 1

Wielomian charakterystyczny macierzy A nad $\mathbb{R}$ jest równy $(\lambda-5)^5(\lambda-1)^2$, $\dim\ker(A-5I)=2$, $\dim\ker(A-5I)^2=4$, $\ker(A-I)\cap im(A-I)\neq\{0\}$. Znaleźć macierz Jordana podobną do macierzy A.

Zadanie 2

Niech endomorfizm $\phi:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ będzie dany wzorem:

$$\phi(x_1,x_2,x_3,x_4)=(-x_1,2x_1-4x_3+2x_4,-2x_1+x_2+4x_3-x_4,-2x_1-x_4).$$

a) znaleźć wartości własne i bazy przestrzeni własnych ϕ.

b) znaleźć postać Jordana macierzy ϕ. Czy $A=\begin{bmatrix}2&3&0&1\\0&-1&0&0\\0&0&2&2\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$ może być macierzą ϕ w jakiejś bazie przestrzeni $\mathbb{R}^4$?

Zadanie 3

Niech $A=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&2&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\1&2&0&0\\2&2&2&1\\-2&-2&-1&0\end{bmatrix}$. Znaleźć macierz Jordana podobną do macierzy A. Czy macierze A i B są podobne? Czy macierz B^3 jest podobna do A?

Zadanie 4

Niech przekształcenie liniowe f ma w pewnej bazie postać Jordana A. Udowodnić, że liczba liniowo niezależnych wektorów własnych o wartości własnej a jest równa ilości klatek Jordana macierzy A mających a na przekątnej.
Wskazówka: pamiętaj, że przestrzeń własna odpowiadająca danej wartości własnej to jądro pewnego endomorfizmu.

Zadanie 5

Dowieść, że macierze rzeczywiste A, B, podobne nad $\mathbb{C}$, są podobne nad $\mathbb{R}$.
Wskazówka: niech $S=P+iQ$ będzie macierzą nieosobliwą, dla której $SA=BS$ (macierze P i Q są rzeczywiste). Dowieść, że $(P+tQ)A=B(P+tQ)$ dla wszystkich $t\in\mathbb{R}$ oraz $\det(P+tQ)\neq 0$ dla pewnego $t\in\mathbb{R}$ (zinterpretować $\det(P+tQ)$ jako wielomian zmiennej zespolonej).