GAL II: zadania domowe, seria 3

Każde zadanie jest na 10 punktów, należy zrobić 4 zadania. Zadanie 5 jest odrobinę ambitniejsze, jego zrobienie (poza zadowoleniem prowadzącego, walorami edukacyjnymi itp.) będzie mieć dodatkowy pozytywny wpływ na ocenę z aktywności. Zadania można rozwiązywać w zespołach maksymalnie dwuosobowych, wystarczy, że rozwiązanie zanotuje jedna osoba (pod warunkiem, że obie podpiszą się pod rozwiązaniem). **Termin oddania zadań: 20.03.2013 godz. 17.00**.

Zadanie 1

Niech $\phi : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^k$ ma w bazie standardowej macierz A. Znaleźć bazę, w której macierz ϕ ma postać Jordana:

a) $k = 3$, $A = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

b) $k = 4$, $A = \begin{bmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Zadanie 2

Niech $A \in \mathbb{R}^5$ i $\omega_A(x) = -(x-1)^5$. Udowodnij, że macierze A^2 i A^5 są podobne.

Zadanie 3

Niech $A = (0,0)$, $B = (2,0)$, $C = (0,2)$, $D = (2,2)$ będą wierzchołkami kwadratu w $\mathbb{R}^2$. Przedstaw jego środek $S = (1,1)$ jako kombinację afiniczną wierzchołków na wszystkie możliwe sposoby.

Zadanie 4

Niech K będzie ciałem, niech $x_1, ..., x_r$ będą parami różnymi elementami zbioru X i niech $W = \{f \in F(X,K) | f(x_1) = ... = f(x_r) = 0\}$ (gdzie jako przestrzeń liniową $F(X,K)$ rozumiemy zbiór funkcji $f : X \to K$ z działaniem dodawania po współrzędnych). Wykazać, że jeżeli $H \in F(X,K)$ jest warstwą podprzestrzeni W, to istnieją $c_1, ..., c_r \in K$ takie, że $H = \{f \in F(X,K) | f(x_1) = c_1, ..., f(x_r) = c_r\}$.

Zadanie 5

Niech $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ spełnia warunek $k > 0 \Rightarrow tr\, A^k = 0$. Wykaż, że $\det A = 0$.