GAL II: zadania domowe, seria 4

Każde zadanie jest na 10 punktów, należy zrobić 4 zadania. Zadanie 5 jest odrobinę ambitniejsze, jego zrobienie (poza zadowoleniem prowadzącego, walorami edukacyjnymi itp.) będzie mieć dodatkowy pozytywny wpływ na ocenę z aktywności. Zadania można rozwiązywać w zespołach maksymalnie dwuosobowych, wystarczy, że rozwiązanie zanotuje jedna osoba (pod warunkiem, że obie podpiszą się pod rozwiązaniem). **Termin oddania zadań: 10.04.2013 godz. 17.00**.

Zadanie 1

W przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^4$ podprzestrzeń H zadana jest równaniami:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Niech f będzie rzutem wzdłuż $lin\{(1,0,-1,1),(0,1,1,0)\}$ na H.

a) znaleźć przeciwobraz prostej $L = (1,0,1,0) + s(1,-1,1,1)$

b) znaleźć równania opisujące obraz płaszczyzny $K = (1,0,1,0) + lin\{(1,1,0,1),(0,0,0,1)\}$

Zadanie 2

Niech $H_1 \subset H_2$ będą przestrzeniami afinicznymi skończonego wymiaru. Wykaż, że jeśli $dim\ H_1 \geqslant dim\ H_2$, to $H_1 = H_2$.

Zadanie 3

W $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym niech W bedzie podprzestrzenią opisaną równaniami:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

i niech $W_t = lin\{(2,5,0,0),(t+2, 4+3t, -2+t, (t-2)^2)\}$. Dla jakich wartości parametru t:

a) $W_t \subset W^{\perp}$?

b) $W_t = W^{\perp}$?

Zadanie 4

Niech $\langle (x_1,x_2,x_3,x_4),(y_1,y_2,y_3,y_4)\rangle = x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$. Czy $\langle , \rangle$ jest iloczynem skalarnym na $\mathbb{R}^4$? Czy jest iloczynem skalarnym na $W = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0\}$?

Zadanie 5

Niech $\langle , \rangle$ będzie iloczynem skalarnym na przestrzeni liniowej V. Wiemy (patrz skrypt), że mają miejsce następujące nierówności:

- $|\langle v, w\rangle| \leqslant \|v\| \cdot \|w\|$ (nierówność Schwarza)
- $\|v + w\| \leqslant \|v\| + \|w\|$ (nierówność trójkąta)

Udowodnij, że dla dowolnych $v, w \in V$:

a) $|\langle v, w\rangle| = \|v\| \cdot \|w\| \Leftrightarrow$ wektory v, w są liniowo zależne (*Wskazówka*: można skorzystać z faktu, że dla $u \in V$ mamy rozkład $V = lin\{u\} \oplus (lin\{u\})^{\perp}$),

b) $\|v + w\| = \|v\| + \|w\| \Leftrightarrow$ istnieje $t \geqslant 0$ takie, że $v = tw$ lub $w = tv$.