GAL II: zadania domowe, seria 5

Każde zadanie jest na 10 punktów, należy zrobić 4 zadania. Zadanie 5 jest odrobinę ambitniejsze, jego zrobienie (poza zadowoleniem prowadzącego, walorami edukacyjnymi itp.) będzie mieć dodatkowy pozytywny wpływ na ocenę z aktywności. Zadania można rozwiązywać w zespołach maksymalnie dwuosobowych, wystarczy, że rozwiązanie zanotuje jedna osoba (pod warunkiem, że obie podpiszą się pod rozwiązaniem). **Termin oddania zadań: 17.04.2013 godz. 17.00**.

Zadanie 1

Na $\mathbb{R}^4$ dany jest standardowy iloczyn skalarny. Niech $W \subset \mathbb{R}^4$ będzie podprzestrzenią liniową opisaną równaniem

$$x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0$$

a) znaleźć bazę ortonormalną W

b) znaleźć rzuty prostopadłe $\alpha = (1, 1, 1, 0)$ na W oraz $W^\perp$

Zadanie 2

Dany jest punkt $A = (7, 3, 2) \in \mathbb{R}^3$ oraz płaszczyna $\pi : 2x + y - z = 0$.

a) znajdź punkt symetryczny do A (tzn. obraz przy symetrii prostopadłej, przy standardowym iloczynie skalarnym) względem π.

b) znajdź odległość A do π.

Zadanie 3

Niech $P : x_1 + 2x_2 - 3x_3$ oraz $Q : x_1 + x_2 + x_3 = 3$ będą płaszczyznami w $\mathbb{R}^3$. Opisz równaniami obraz Q przy symetrii prostopadłej względem P.

Zadanie 4

Niech V będzie przestrzenią liniową z iloczynem skalarnym, zaś $\|\cdot\|$-normą zadaną przez ten iloczyn. Dla $v, w \in V$ udowodnij warunek równoległoboku:

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$$

Zadanie 5

Rozpatrujemy $C = C([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ jako rzeczywistą przestrzeń liniową z iloczynem skalarnym $\langle f, g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$

a) Dowieść, że układ funkcji $\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin t, \cos t, \sin 2t, \cos 2t, ...$ jest ortonormalny

b) Dowieść, że rzut prostopadły funkcji $f \in C$ na podprzestrzeń

$$U = lin\{1, \sin t, \cos t, \sin 2t, \cos 2t, ..., \sin kt, \cos kt\}$$

jest równy $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{k}(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$, gdzie:

$$a_n := \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt, \qquad b_n := \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt$$