GAL II: zadania domowe, seria 7

Każde zadanie jest na 10 punktów, należy zrobić 4 zadania. Zadanie 5 jest odrobinę ambitniejsze, jego zrobienie (poza zadowoleniem prowadzącego, walorami edukacyjnymi itp.) będzie mieć dodatkowy pozytywny wpływ na ocenę z aktywności. Zadania można rozwiązywać w zespołach maksymalnie dwuosobowych, wystarczy, że rozwiązanie zanotuje jedna osoba (pod warunkiem, że obie podpiszą się pod rozwiązaniem). **Termin oddania zadań: 8.05.2013 godz. 17.00**.

Zadanie 1

Pokaż, że jeśli V jest przestrzenią euklidesową liniową, zaś $\phi : V \to V$ monomorfizmem liniowym takim, że dla dowolnych $v, w \in V$ zachodzi $v \perp w \Rightarrow \phi(v) \perp \phi(w)$, to ϕ jest złożeniem izometrii i jednokładności.
Wskazówka: Rozważ bazę ortonormalną $\{e_1, ..., e_n\}$ przestrzeni V, zbadaj iloczyn skalarny $\langle \phi(e_i+e_j), \phi(e_i-e_j)\rangle$ dla $i \neq j$.

Zadanie 2

a) Znajdź warunek konieczny i wystarczający na to, by przekształcenie liniowe $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zachowywało n-wymiarową miarę równoległościanów (tzn. dla dowolnych wektorów $v_1, ..., v_n$: $\mu_n(R(v_1, ..., v_n)) = \mu_n(R(f(v_1), ..., f(v_n))$, gdzie $R(w_1, ..., w_n)$ jest równoległościanem rozpinanym przez wektory $w_1, ..., w_n$).

b) Znajdź wartości parametru $t \in \mathbb{R}$, dla których przekształcenie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dane wzorem:

$$f((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + x_2 + 3x_3 - 7, 2x_1 + tx_2 + 4x_3 + 5, x_1 + x_3 - 1)$$

zachowuje objętość 3-wymiarowych równoległościanów.

Zadanie 3

W $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym rozważamy $p = (3, -1, 2)$, prostą $L = (2, 0, 3) + lin\{(1, 2, 3)\}$ oraz płaszczyznę $P :\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$. Znaleźć wszystkie punkty, które można otrzymać jako obrazy punktu p w izometriach $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takich, że:

a) $f(x) = x$ dla wszystkich $x \in P$;

b) $f(x) = x$ dla $x \in L$ oraz $f(P) = P$.

c) f zachowuje orientację, $f((0, 0, 0)) = (0, 1, 0)$, $f((0, 0, 1)) = (0, 1, 1)$

Wskazówka: jedynymi izometriami liniowymi płaszczyzny zachowującymi orientację są obroty.

Zadanie 4

Niech U, V będą podprzestrzeniami liniowej przestrzeni euklidesowej W wykaż, że:

a) $(U + V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp$

b) $(U \cap V)^\perp = U^\perp + V^\perp$

Zadanie 5

Dla wektorów $v_i = (v_{i,1}, ..., v_{i,n})$, $i = 1, ..., n-1$ zapisanych w bazie ortonormalnej $\{e_1, ..., e_n\}$ $n-$wymiarowej przestrzeni euklidesowej V definiujemy wyznacznik:

$$\det \begin{bmatrix} & & & e_1 \\ v_1 & ... & v_{n-1} & \vdots \\ & & & e_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} e_i \det \begin{bmatrix} v_{1,1} & ... & v_{n-1,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{1,i-1} & ... & v_{n-1,i-1} \\ v_{1,i+1} & ... & v_{n-1,i+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{1,n} & ... & v_{n-1,n} \end{bmatrix}$$

jako wektor będący formalnym rozwinięciem ostatniej kolumny. Wykaż, że wyznacznik ten jest równy $v_1 \times ... \times v_{n-1}$.