GAL II: zadania domowe, seria 9

Każde zadanie jest na 10 punktów, należy zrobić 4 zadania. Zadanie 5 jest odrobinę ambitniejsze, jego zrobienie (poza zadowoleniem prowadzącego, walorami edukacyjnymi itp.) będzie mieć dodatkowy pozytywny wpływ na ocenę z aktywności. Zadania można rozwiązywać w zespołach maksymalnie dwuosobowych, wystarczy, że rozwiązanie zanotuje jedna osoba (pod warunkiem, że obie podpiszą się pod rozwiązaniem). **Termin oddania zadań: 29.05.2013 godz. 17.00**.

Zadanie 1

Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & t \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Dla jakich wartości parametry $t \in \mathbb{R}$ są kongruentne:

a) nad $\mathbb{R}$?

b) nad $\mathbb{C}$?

Zadanie 2

Niech V-przestrzeń liniowa wymiaru 2 nad $\mathbb{R}$ i niech $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie niezdegenerowaną symetryczną formą dwuliniową. Wykaż, że jeśli V zawiera niezerowy wektor izotropowy, to istnieją bazy $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ takie, że $G(h, \mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ oraz $G(h, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
Wskazówka: skorzystaj z klasyfikacji form z dokł. do kongruencji

Zadanie 3

Dla każdej z poniższych form dwuliniowych $h : V \times V \to K$ znaleźć bazę prostopadłą:

a) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $h((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_3 + x_2y_2 + x_3y_3$;

b) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^4$, $h((x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4)) = 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_4y_4$;

c) $K = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C}^2$, $h((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 3x_1y_1 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + x_2y_2$.

Zadanie 4

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K charakterystyki różnej od 2 (tzn. $1 + 1 \neq 0$, w szczególności $2 \neq 0$). *Formą kwadratową* $q : V \to K$ nazywamy funkcję taką, że istnieje forma dwuliniowa symetryczna na V taka, że $q(v) = h(v, v)$ dla każdego $v \in V$. Wykaż, że:

a) zbiór form kwadratowych na V tworzy przestrzeń liniową;

b) dla każdej formy kwadratowej q mamy $q(av) = a^2q(v)$ dla $a \in K$, $v \in V$

c) jeśli forma kwadratowa q jest zadana jak wyżej przez formę dwuliniową h, to:

$$h(v, w) = \frac{q(v + w) - q(v) - q(w)}{2}$$

Uwaga: można łatwo wykazać, korzystając z powyższego zadania, że przestrzenie form dwuliniowych symetrycznych i from kwadratowych na V są izomorficzne.

Zadanie 5

Dla formy symetrycznej h takiej, że $G(h, st) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ znaleźć w $\mathbb{R}^3$ taką bazę, która jest prostopadła względem h oraz standardowego iloczynu skalarnego na $\mathbb{R}^3$
Wskazówka: zauważ, że ponieważ macierz $G(h, st)$ jest symetryczna, jest ortogonalnie podobna do pewnej macierzy diagonalnej.