Tematy egzaminacyjne z arytmetyki Peano

Konrad Zdanowski

22 stycznia 2008

Proponuję aby każdy, kto chce zdawać egzamin wybrał trzy z poniższych zagadnień, o które spytam. Na termin egzaminu najwygodniej będzie chyba umówić się indywidualnie w dogodnych dla Państwa terminach.

Niektóre z problemów, oznaczone gwiazdką, wykraczają poza tematykę poruszaną na wykładzie (choć mogły być omówione podczas ćwiczeń). Mogą też wymagać sięgnięcia po definicje i fakty spoza wykładu. W tym przypadku odsyłam do książki Kaye'a.

Pytania:

1. Σ_1–zupełnośc arytmetyki PA^- oraz jej istotna nierozstrzygalność.

2. Równoważność zasad indukcji $I\Sigma_n$, $I\Pi_n$ oraz zasad minimum $L\Sigma_n$ and $L\Pi_n$, dla $n \geq 0$.

3. Dowodliwość kolekcji $\mathrm{Coll}\Sigma_n$ z $I\Sigma_n$, dla $n \geq 1$.

4. (*) Dla zbioru formuł Γ, $B\Gamma = I\Delta_0 + \mathrm{Coll}\Gamma$, czyli do Δ_0 indukcji dokładamy aksjomaty kolekcji dla formuł z Γ.

   Dla $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B\Sigma_n \vdash \mathrm{PA}$.

5. (**) $\mathrm{PA}^- \cup \{B\Sigma_n : n \in \mathbb{N}\} \nvdash I\Delta_0$.

   (Hint. Każdy model PA^- ma końcowe rozszerzenie do modelu dla PA^-. W ten sposob mozna stworzyc model ω_1–like, który musi spełniać kolekcje a może nie spełniać $I\Delta_0$.)

6. (Ryll–Nardzewski) Żadne niesprzeczne rozszerzenie PA w języku PA nie jest skończenie aksjomatyzowalne.

7. Δ_1 definiowalność funkcji pierwotnie rekurencyjnych w modelu standardowym oraz w $I\Sigma_1$.

8. Arytmetyzacja składni (jak ją wykonać, jakie własności kodowania skończonych ciągów liczb są potrzebne).

9. Lemat przekątniowy. Twierdzenie Tarskiego o niedefiniowalności prawdy.

10. Konstrukcja częściowych predykatów prawdy (dla klas Σ_n i Π_n). Twierdzenie o hierarchii definiowalności arytmetycznej – Σ_n, Π_n.

11. Własności predykatu dowodliwości.

12. Pierwsze i drugie twierdzenie Gödla.

13. Zarytmetyzowane drugie twierdzenie Gödla (czyli $\mathrm{PA} \vdash (\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}} \Rightarrow \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}+\neg\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}}))$.

14. Twierdzenie Rossera i dowodliwość niesprzeczności w sensie Rosserowskim.

15. Twierdzenie Löba i zasada refleksji w PA. Refleksja dla Π_1 zdań, $\{\mathrm{Pr}_{\mathrm{PA}}(\varphi) \Rightarrow \varphi : \varphi \in \Pi_1\}$, jest równoważna $\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$.

16. (*) Zarytmetyzowane twierdzenie o pełności.

17. (Tw. Chaitina) Niech złożoność Kołmogorowa liczby n to długość nakrótszej maszyny Turinga M takiej, że $M(0) = n$. Niech $K(x) \leq y$ będzie Σ_1 formułą wyrażającą fakt, że złożoność Kołmogorowa x'a jest nie większa niż y. Pokaż, że istnieje stała C taka, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ i dowolnego $K \geq C$, $\mathrm{PA} \nvdash K(\underline{n}) \geq \underline{K}$.

    Pokaż, że istnieje stała C taka, że $\mathrm{PA} \vdash (\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}} \equiv \forall n \neg \mathrm{Pr}_{\mathrm{PA}}(K(\underline{n}) \geq \underline{C}))$.

18. $I\Sigma_n \nvdash B\Sigma_{n+1}$.

19. $B\Sigma_n \nvdash I\Sigma_n$.

20. (*) Opis uzyskiwania wyników o niezależności metodą indykatorów.

21. (*) Dowód faktu, że $I\Sigma_1$ dowodzi całkowitości dokładnie funkcji pierwotnie rekurencyjnych.