Uniwersytet Humanistyczno-Przyrodniczy im. Jana Kochanowskiego

Wydział Matematyczno-Przyrodniczy

Instytut Matematyki

Dr hab. prof. UJK. GRZEGORZ ŁYSIK

Równania Różniczkowe Cząstkowe

Skrypt wykładów

Kielce, 2009.

Wstęp

Treść skryptu odpowiada semestralnemu wykładowi *Równania Różniczkowe Cząstkowe*, który prowadziłem w roku akademickim 2004/05 oraz 2005/06 na Wydziale Matematyczno-Przyrodniczym Akademii Świętokrzyskiej w Kielcach. Skrypt zawiera wprowadzenie do teorii równań różniczkowych cząstkowych rzędu 1, klasyfikację równań liniowych rzędu 2, klasyczne omówienie trzech najważniejszych równań fizyki matematycznej, a mianowicie równania Laplace'a (i Poissona), przewodnictwa cieplnego i falowego, wprowadzenie do teorii transformacji Fouriera, podstawowe fakty z teorii przestrzeni Sobolewa oraz główne wyniki z teorii równań 2 rzędu w przestrzeniach Sobolewa. Uzupełnieniem części teoretycznej jest wybór przykładowych zadań egzaminacyjnych. Z uwagi na szczupłość miejsca wiele aspektów nowoczesnej teorii równań różniczkowych cząstkowych zostało pominiętych. Również dowody niektórych twierdzeń zostały pominięte. Czytelnika zainteresowanego głębszym poznaniem równań cząstkowych odsyłamy do następujących podręczników:

- L. Evans, *Równania różniczkowe cząstkowe*, PWN, 2002.
- H. Marcinkowska, *Wstęp do teorii równań różniczkowych cząstkowych*, PWN, 1986.
- V. P. Mikhailov, *Differencjalnye uravnienia v castnych proizvodnych*, Moskva, 1983.

Szczególnie warty polecenia jest nowocześnie napisany podręcznik L. Evansa, który w opinii autora tego skryptu powinien się znaleźć na półce każdego matematyka.

Spis treści

1. Wprowadzenie **5**
1.1. Przykłady równań 5
1.2. Rozwiązanie równania 6
1.3. Przykłady zagadnień dla równań cząstkowych 7

2. Równania różniczkowe cząstkowe rzędu 1 **7**
2.1. Równanie transportu 7
2.2. Zagadnienie początkowe 8
2.3. Zagadnienie niejednorodne 9
2.4. Całka zupełna dla równania rzędu 1 9
2.5. Metoda charakterystyk 12
2.6. Zagadnienie Cauchy'ego 16
2.7. Przykład równania bez rozwiązań 18

3. Klasyfikacja równań liniowych **19**
3.1. Równania liniowe 19
3.2. Równania liniowe rzędu 2 21
3.3. Równania liniowe rzędu 2 dwóch zmiennych niezależnych 22

4. Równania Laplace'a i Poissona **24**
4.1. Interpretacja fizyczna 24
4.2. Rozwiązanie podstawowe 25
4.3. Własność wartości średniej 26
4.4. Regularność funkcji harmonicznych 29
4.5. Równanie Poissona 30
4.6. Problem Dirichleta 33
4.7. Funkcja Greena 34
4.8. Funkcja Greena kuli jednostkowej 35
4.9. Wzór Poissona 36

5. Równanie przewodnictwa cieplnego **39**
5.1. Interpretacja fizyczna 39
5.2. Rozwiązanie podstawowe 39
5.3. Zagadnienie początkowe 41
5.4. Zagadnienie niejednorodne 43

6. Równanie falowe **45**
6.1. Interpretacja fizyczna 45
6.2. Zagadnienie początkowe dla równania struny. Wzór d'Alamberta 46
6.3. Wymuszone drgania struny 47
6.4. Równanie struny na półprostej 48
6.5. Średnie sferyczne 49
6.6. Wzór Kirchoffa 52
6.7. Wzór Poissona 53

6.8. Zagadnienie niejednorodne . . . 54
6.9. Jednoznaczność . . . 55

7. Transformacja Fouriera **56**

7.1. Definicja i podstawowe własności . . . 56
7.2. Transformacja Fouriera na $L^2(\mathbb{R}^n)$ . . . 59
7.3. Odwrotna transformacja Fouriera . . . 61
7.4. Zastosowania . . . 62

8. Przestrzenie Sobolewa **64**

8.1. Słabe pochodne . . . 64
8.2. Definicja przestrzeni Sobolewa . . . 66
8.3. Własności przestrzeni Sobolewa . . . 67
8.4. Twierdzenia o włożeniu . . . 69
8.5. Przestrzenie $H^k(\mathbb{R}^n)$ . . . 70

9. Równania eliptyczne rzędu 2 **72**

9.1. Postawienie zagadnienia . . . 72
9.2. Słabe rozwiązania . . . 73
9.3. Twierdzenie Laxa-Milgrama . . . 74
9.4. Istnienie słabych rozwiązań . . . 76

Zadania **79**

1. Wprowadzenie

Równania różniczkowe cząstkowe stanowią niezwykle obszerną dziedzinę matematyki, łączącą się z innymi gałęziami matematyki jak: analiza matematyczna, analiza funkcjonalna, geometria różniczkowa, rachunek prawdopodobieństwa geometria rozmaitości topologia... . Tego ogromu powiązań nie sposób przedstawić jest w trakcie semestralnego wykładu. Początki badania równań cząstkowych sięgają XVIII wieku i prac Daniela Bernoulliego i Jeana d'Alamberta poświęconych badaniu rozwiązań równania struny. Natomiast współczesnej teorii równań nie sposób przedstawić bez pomocy metod analizy funkcjonalnej. Przykłady ilustrujące sposoby rozwiązywania poszczególnych równań są często niełatwe z uwagi na długie rachunki. Niektóre z tych przykładów miały w swoim czasie przełomowe znaczenie dla rozwoju matematyki. Np. teoria szeregów Fouriera wyrosła z prób rozwiązywania równania falowego i równania ciepła; natomiast teoria przestrzeni Hilberta ma swoje korzenie w badaniach równań Laplace'a i Poissona.

Faktycznie nie istnieje coś takiego jak ogólna teoria równań różniczkowych cząstkowych; nie ma praktycznie żadnych twierdzeń dotyczących wszystkich lub większości równań różniczkowych cząstkowych. Na ogół twierdzenia dotyczą jednego równania lub konkretnej klasy równań. Podczas badania równań cząstkowych często warto odwoływać się do motywacji fizycznej danego równania. Na ogół z fizyki wynika, które z równań są ważne, gdyż opisują ważny proces fizyczny. Znajomość fizyki pozwala także na interpretację wyników i wzorów oraz daje pełniejszy obraz teorii.

Z tego co wyżej zostało powiedziane wynika, że nie warto podawać ogólnej definicji równań cząstkowych. Zamiast tego podamy kilka przykładów. Bliższym omówieniem niektórych z nich zajmiemy się na dalszych wykładach.

1.1. Przykłady równań

A. Równania liniowe.

1. Równanie transportu

$$\partial_t u + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0.$$

2. Równania Laplace'a i Poissona

$$\Delta u = 0, \qquad \Delta u = f(x) \quad \text{gdzie } \Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

3. Równanie ciepła

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u.$$

4. Równanie Schrödingera
$$i\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u.$$
5. Równanie falowe
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u.$$

B. Równania nieliniowe.

6. Semiliniowe równania Poissona, ciepła i falowe
$$\begin{aligned} -\Delta u &= f(x,u), \\ u_t - \Delta u &= f(x,u), \\ u_{tt} - \Delta u &= f(x,u). \end{aligned}$$
7. Równanie Kortewega-de Vriesa
$$u_t + u \cdot u_x + u_{xxx} = 0.$$
8. Równanie powierzchni minimalnych
$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = 0,$$

gdzie $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\nabla u = (\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u_n}{\partial x_n})$, $\operatorname{div}(u_1, ..., u_n) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial u_n}{\partial x_n}$.

1.2. Rozwiązanie równania

Mając zadane równanie różniczkowe musimy sobie zadać pytanie czym może być jego rozwiązanie. Wydaje się, że jest naturalne żądać aby rozwiązanie równania różniczkowego rzędu k (tzn. takiego, w którym występują pochodne cząstkowe do rządu k) było funkcją przynajmniej k-krotnie różniczkowalną w sposób ciągły. Wtedy wszystkie pochodne sa funkcjami ciągłymi i jest jasne, że równanie jest spełnione gdy jest spełnione tożsamościowo. Takie rozwiązanie nazywamy klasycznym. Okazuje się jednak, że dla wielu równań rozwiązania klasyczne nie istnieją lub też ich znalezienie jest kłopotliwe. Przykładem tutaj może być skalarne prawo zachowania
$$u_t + F(u)_x = 0$$
opisujące model powstawania i rozchodzenia się fal uderzeniowych. Otóż czoło fali uderzeniowej jest krzywą wzdłuż której rozwiązanie nie jest ciągłe. Zatem musimy dopuścić rozwiązania, które nie są nawet funkcjami ciągłymi. Rozwiązania takie nazywa się *słabymi* lub *uogólnionymi*. Jak się wkrótce przekonamy istnienie słabych rozwiązań wynika ze stosunkowo łatwych oszacowań uzupełnionych ideami analizy funkcjonalnej. Natomiast wykazanie ich regularności jest oparte na zawiłych nierównościach całkowych.

Z rozwiązywaniem równań wiąże się pojęcie zagadnienia poprawnie postawionego. Otóż zagadnienie nazywamy poprawnie postawionym jeśli spełnione są trzy warunki

a) Zagadnienie ma rozwiązanie (w danej klasie funkcji);
b) Rozwiązanie jest jedyne (w tej klasie funkcji);
c) Rozwiązanie zależy w sposób ciągły od danych.

1.3. Przykłady zagadnień dla równań cząstkowych

– Problem początkowy dla równania ciepła

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, \\ u(0,x) = \varphi(x), \end{cases}$$

gdzie φ jest zadaną funkcją.

– Problem początkowy dla równania falowego

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u, \\ u(0,x) = f(x), \\ u_t(0,x) = g(x), \end{cases}$$

gdzie f, g sa zadane.

– Problem brzegowy dla równania Laplace'a

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u_{|\partial\Omega} = g, \end{cases}$$

gdzie g jest funkcją zadaną na brzegu obszaru Ω.

2. Równania różniczkowe cząstkowe rzędu 1

2.1. Równanie transportu

Jednym z najprostszych równań różniczkowych cząstkowych jest równanie transportu.

$$u_t + b \cdot \nabla u = 0, \tag{1}$$

gdzie $u = u(t,x)$ jest funkcją określoną na $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^n$, $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ jest gradientem funkcji u, a $\cdot$ oznacza iloczyn skalarny. W celu rozwiązania równania (1) zauważmy, że równanie to oznacza, że pochodna kierunkowa funkcji u w kierunku wektora $v = (1,b) \in \mathbb{R}^{n+1}$ znika. Zatem ustalając dowolny punkt $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ i kładąc dla $s \in \mathbb{R}$

$$z(s) = u(t+s, x+sb)$$

dostajemy

$$\frac{dz(s)}{ds} = u_t(t+s, x+sb) + \nabla_x u(t+s, x+sb) = 0.$$

Zatem $z(s)$ jest funkcją stałą. Ustalając wartość rozwiązania na każdej prostej równoległej do wektora $(1,b)$ dostajemy rozwiązanie równania (1).

2.2. Zagadnienie początkowe

Dla ustalenia uwagi załóżmy, że w chwili $t = 0$ zadana jest wartość funkcji $u(0,x)$. Wówczas zagadnienie początkowe

$$(2) \qquad \begin{cases} u_t + b \cdot \nabla u = 0 & \text{dla } t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = g(x) & \text{dla } x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

ma rozwiązanie

$$(3) \qquad u(t,x) = g(x - tb) \ \text{ dla } \ t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n.$$

Zatem zachodzi

Twierdzenie 1. *Jeśli funkcja g jest klasy C^1, to rozwiązanie (3) równania (2) jest rozwiązaniem klasycznym oraz jest ono jednoznaczne.*

Uwaga. Jeśli g nie jest klasy C^1, to (2) nie posiada rozwiązania klasycznego. Tym nie mniej (3) definiuje funkcję, która jest jedyną kandydatką na rozwiązanie uogólnione (2).

Aby zdefiniować pojęcie słabego (uogólnionego) rozwiązania (2) pomnóżmy (1) przez funkcję φ klasy $C^1(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}^n)$ o zwartym nośniku [(1)] i scałkujmy obie strony równania. Dostajemy

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \big(u_t(t,x) + b \cdot \nabla u(t,x)\big)\varphi(t,x)dxdt \\ &= -\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} u(t,x)\varphi_t(t,x)dxdt - \int_{\mathbb{R}^n} u(0,x)\varphi(0,x)dx \\ &- \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} b \cdot u(t,x) \cdot \nabla\varphi(t,x)dxdt. \end{aligned}$$

Ponieważ $u(0,x) = g(x)$ dostajemy więc tożsamość całkową

$$(4) \quad \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \big(u(t,x)\varphi_t(t,x) + b \cdot u(t,x) \cdot \nabla\varphi(t,x)\big)dxdt + \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\varphi(0,x)dx = 0.$$

Zauważmy, że (4) ma sens nawet wtedy, gdy u jest funkcją tylko ograniczoną.

Definicja. Mówimy, że $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$ jest *słabym* rozwiązaniem zagadnienia (2) jeśli (4) zachodzi dla każdej funkcji $\varphi \in C_0^1(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}^n)$.

---

(1) Nośnikiem funkcji ciągłej ϕ nazywamy domknięcie zbioru $\{x : \varphi(x) \neq 0\}$.

2.3. Zagadnienie niejednorodne

W celu rozwiązania zagadnienia niejednorodnego

$$\begin{cases} u_t + b \cdot \nabla u = f & \text{dla } t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = g(x) & \text{dla } x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{5}$$

połóżmy $z(s) = u(t+s, x+bs)$. Wówczas

$$\frac{dz}{ds}(s) = u_t(t+s, x+bs) + \nabla u(t+s, x+bs) \cdot b = f(t+s, x+bs).$$

Zatem

$$\begin{aligned} u(t,x) - g(x-tb) = z(0) - z(-t) &= \int_{-t}^{0} \frac{dz}{ds}(s)ds \\ &= \int_{-t}^{0} f(t+s, x+sb)ds \\ &= \int_{0}^{t} f(s, x+(s-t)b)ds. \end{aligned}$$

Czyli

$$u(t,x) = g(x-tb) + \int_{0}^{t} f(s, x+(s-t)b)ds$$

jest rozwiązaniem zagadnienia (5). $\diamond$

Uwaga. Zauważmy, że w celu rozwiązania problemów (2) i (5) przekształciliśmy równania cząstkowe w równania zwyczajne. Jest to typowa procedura rozwiązywania równań cząstkowych rzędu pierwszego nazywana *metodą charakterystyk*. Omówimy ją dokładniej w dalszej części wykładu.

2.4. Całka zupełna dla równania rzędu 1

Ogólne równanie różniczkowe cząstkowe rzędu 1 można zapisać w postaci

$$F(x, u, \nabla u) = 0, \tag{6}$$

gdzie $x \in \Omega$, Ω jest otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $\nabla u = (\partial_{x_1} u, ..., \partial_{x_n} u)$ jest gradientem funkcji u, natomiast $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest funkcją gładką (różniczkowalną w sposób ciągły). Równania takie pojawiają się m.in.

w mechanice klasycznej (przekształcenia kanoniczne), mechanice ośrodków ciągłych (prawa zachowania) oraz w optyce (rozchodzenie się fal).

Definicja. Przypuśćmy, że dla każdego parametru $a \in A \subset \mathbb{R}^n$ mamy rozwiązanie $u_a = u(x;a)$ równania (6) klasy C^2. Oznaczmy

$$(\nabla_a u, \nabla^2_{xa} u) = \begin{pmatrix} u_{a_1} & u_{a_1 x_1} & \dots & u_{a_1 x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{a_n} & u_{a_n x_1} & \dots & u_{a_n x_n} \end{pmatrix} \in M\big(n \times (n+1)\big).$$

Wówczas funkcję $u = u(x,a)$ nazywamy *całką zupełną* w $\omega \times A$ o ile
(i) $u(x,a)$ jest rozwiązaniem (6) dla każdego $a \in A$;
(ii) $\text{rząd}(\nabla_a u, \nabla^2_{xa} u) = n$.

Warunek (ii) oznacza, że $u(x,a)$ faktycznie zależy od n liniowo niezależnych parametrów $a_1, ..., a_n$.

Przykłady.
1. W geometrii różniczkowej występuje równanie Clairauta

$$x \cdot \nabla u + f(\nabla u) = u, \qquad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Całką zupełną tego równania jest $u(x,a) = a \cdot x + f(a), \quad x \in \Omega, \quad a \in \mathbb{R}^n$.
2. W optyce geometrycznej czoło fali opisuje równanie eikonału

$$|\nabla u| = 1.$$

Jego całką zupełną jest $u(x,a,b) = ax + b, \quad a \in S^{n-1}, b \in \mathbb{R}$.
3. W mechanice najprostsze równanie Hamiltona-Jacobiego ma postać

$$u_t + H(\nabla_x u) = 0, \quad H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Jego całką zupełną jest $u(t,x;a,b) = ax - tH(a) + b, \quad a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$.

Mając daną całkę zupełną równania (6) możemy konstruować bardziej skomplikowane rozwiązania, które w istocie zależą of dowolnej funkcji $(n-1)$ zmiennych, a nie od n parametrów rzeczywistych. Te nowe rozwiązania są obwiedniami całek zupełnych.

Definicja. Niech $u = u(x,a)$ będzie całką zupełną klasy $C^1(\Omega \times A)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n, A \subset \mathbb{R}^n$. Rozpatrzmy równanie wektorowe

$$\nabla_a u(x,a) = 0. \tag{7}$$

Jeśli równanie to posiada rozwiązanie $a = \varphi(x)$, gdzie $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest klasy C^1 tzn. $\nabla_a(x, \varphi(x)) = 0$ dla $x \in \Omega$, to

$$v(x) = u(x, \varphi(x)), \quad x \in \Omega \tag{8}$$

nazywamy *obwiednią* rodziny funkcji $\{u(x,a)\}_{a\in A}$.

Okazuje się, że obwiednia rodziny rozwiązań równania (6) jest też jego rozwiązaniem, nazywanym *całką osobliwą*.

Twierdzenie 2. *Przy powyższych oznaczeniach załóżmy, że dla każdego $a \in A$ funkcja $u(x) = u(x;a)$ spełnia równanie (6). Jeśli obwiednia (8) rodziny $\{u(x;a)\}_{a\in A}$ istnieje i jest funkcją klasy C^1, to jest ona też rozwiązaniem równania (6).*

Dowód. Mamy $v(x) = u(x;\varphi(x))$. Zatem dla $i = 1, ..., n$

$$\begin{aligned} v_{x_i}(x) &= u_{x_i}(x,\varphi(x)) + \sum_{j=1}^{n} u_{a_j}(x,\varphi(x)) \cdot \varphi^j_{x_i}(x) \\ &= u_{x_i}(x,\varphi(x)) + \nabla_a u(x,\varphi(x)) \cdot \varphi_{x_i}(x) \\ &= u_{x_i}(x,\varphi(x)). \end{aligned}$$

Stąd dla $x \in \Omega$

$$F\big(x, v(x), \nabla v(x)\big) = F\big(x, u(x,\varphi(x)), \nabla u(x,\varphi(x))\big) = 0. \qquad \diamond$$

Przykład. Całką zupełną równania

$$u^2\big(1 + |\nabla u|^2\big) = 1$$

jest

$$u(x,a) = \pm(1 - |x-a|^2)^{1/2}, \qquad |x-a| < 1.$$

Wówczas

$$\nabla_a u(x) = \frac{\mp(x-a)}{(1-|x-a|^2)^{1/2}}, \qquad |x-a| < 1$$

i równanie $\nabla_a u = 0$ ma rozwiązanie $\varphi(x) = x = a$. Zatem $v(x) = \pm 1$ są całkami osobliwymi. $\diamond$

Zmienimy teraz nieco opisaną wyżej procedurę. W tym celu weźmy dowolny zbiór otwarty $A' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ i dowolną funkcję $h : A' \to \mathbb{R}$ taką, że jej wykres leży wewnątrz A tzn. $\{(a', h(a')) : a' \in A'\} \subset A$.

Definicja. *Całką ogólną zależną od h* nazywamy obwiednię $v' = v'(x)$ rodziny funkcji $u'(x,a') = u(x,a',h(a'))$, $a' \in A'$, o ile ta obwiednia istnieje i jest funkcją klasy C^1.

Przykłady.

1. Całką zupełną dla równania eikonału $|\nabla u| = 1$ w wymiarze $n = 2$ jest $u(x,\varphi,b) = x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi + b$, $-\pi < \varphi < \pi, b \in \mathbb{R}$. Połóżmy $h(\varphi) = 0$. Wówczas $u'(x,\varphi) = x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi + b$ jest rodziną rozwiązań, których wykresy przechodzą przez punkt $0 \in \mathbb{R}^3$. Aby znaleźć obwiednię liczymy

$$\nabla_\varphi u'(x) = \frac{\partial u'(x)}{\partial \varphi} = -x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi = 0.$$

Zatem $\varphi = \operatorname{arctg}(x_2/x_1)$ oraz

$$\begin{aligned} v'(x) &= x_1 \cos\big(\operatorname{arctg}(x_2/x_1)\big) + x_2 \sin\big(\operatorname{arctg}(x_2/x_1)\big) \\ &= x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi = \pm|x| \end{aligned}$$

jest rozwiązaniem równania eikonału (osobliwym w zerze). $\diamond$

2. Dla równania Hamiltona -Jacobiego $u_t + |\nabla_x u|^2 = 0$ mamy $u(t,x,a,b) = ax - ta^2 + b, a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$. Kładąc $h(a) = 0$ dostajemy

$$\begin{aligned} u'(t,x,a) &= ax - ta^2, \\ \nabla_a u' &= x - 2ta = 0. \end{aligned}$$

Stąd $a = x/(2t)$, a zatem

$$v'(t,x) = \frac{x}{2t} \cdot x - t\Big(\frac{x}{2t}\Big)^2 = \frac{x^2}{4t}$$

jest rozwiązaniem dla $t > 0$. $\diamond$

2.5. Metoda charakterystyk

Wracając do ogólnego równania rzędu pierwszego spróbujmy rozwiązać zagadnienie brzegowe (Cauchy'ego)

$$F(x,u,\nabla u) = 0 \ \text{ w obszarze } \ \Omega \subset \mathbb{R}^n, \tag{9}$$

$$u = g \ \text{ na powierzchni } \ \Gamma \subset \partial\Omega. \tag{10}$$

Zakładamy, że funkcje F i g oraz powierzchnia Γ są dostatecznie gładkie.

Nasz plan postępowania jest następujący: będziemy się starali połączyć punkt $x \in \Omega$ z pewnym punktem $x_0 \in \Gamma$ pewną krzywą γ w taki sposób, aby można było policzyć wartości rozwiązania u wzdłuż tej krzywej.

Załóżmy więc, że $\gamma = \{x(s), s \in I \subset \mathbb{R}\}$ jest parametryzacją naszej krzywej. Połóżmy

$$z(s) = u(x(s)), \qquad p(s) = \nabla u(x(s)). \tag{11}$$

Chcemy dobrać krzywą $x(s)$ tak, aby można było policzyć $z(s)$ i $p(s)$. W tym celu policzmy $\dot{p}(s) := \frac{dp(s)}{ds}$:

$$\dot{p}^i(s) = \sum_{j=1}^n u_{ij}(x(s)) \cdot \dot{x}^j(s) \ \text{ dla } \ i = 1,...,n \ \text{ gdzie } \ u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}. \tag{12}$$

Z drugiej strony różniczkując (9) względem x_i dostajemy
(13)
$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x,u,\nabla u)+\frac{\partial F}{\partial z}(x,u,\nabla u)u_{x_i}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial p_j}(x,u,\nabla u)u_{ij}=0 \ \text{ dla } \ i=1,...,n.$$

Załóżmy, że

$$\dot{x}^j(s)=\frac{\partial F}{\partial p_j}\big(x(s),z(s),p(s)\big) \quad \text{dla} \ \ j=1,...,n. \tag{14}$$

Wówczas wobec (13) równanie (12) przyjmuje postać
(15)
$$\dot{p}^i(s)=-\frac{\partial F}{\partial x_i}\big(x(s),z(s),p(s)\big)-\frac{\partial F}{\partial z}\big(x(s),z(s),p(s)\big)p^i(s) \ \text{ dla } \ i=1,...,n.$$

Ostatecznie różniczkując obie strony (11) po s i uwzględniając (14) dostajemy

$$\dot{z}(s)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_j}(x(s))\dot{x}^j(s)=\sum_{j=1}^{n}p^j(s)\frac{\partial F}{\partial p_j}\big(x(s),z(s),p(s)\big). \tag{16}$$

Równania (14), (15) i (16) możemy zapisać w postaci wektorowej

$$\dot{p}(s)=-\nabla_x F\big(x(s),z(s),p(s)\big)-\nabla_z F\big(x(s),z(s),p(s)\big)\cdot p(s), \tag{$*1$}$$
$$\dot{z}(s)=\nabla_p F\big(x(s),z(s),p(s)\big)\cdot p(s), \tag{$*2$}$$
$$\dot{x}(s)=\nabla_p F\big(x(s),z(s),p(s)\big). \tag{$*3$}$$

Otrzymany układ $(2n+1)$ równań różniczkowych zwyczajnych nazywa się *układem charakterystyk* równania (9); jego krzywe fazowe $\big(x(\cdot),z(\cdot),p(\cdot)\big)\subset\mathbb{R}^{2n+1}$ *charakterystykami*, natomiast krzywą $x(\cdot)\subset\mathbb{R}^n$ - *zrzutowaną charakterystyką*. Wykazaliśmy

Twierdzenie 3. *Jeśli $u\in C^2(\Omega)$ jest rozwiązaniem równania (9) oraz $x(\cdot)$ spełnia ($*3$), to $p(\cdot)$ spełnia ($*1$), a $z(\cdot)$ spełnia ($*2$).*

Aby skorzystać w praktyce z tego twierdzenia należy jeszcze uwzględnić warunki brzegowe (10).

A. F liniowa. Załóżmy, że równanie (1) jest liniowe tzn.

$$F(x,u,\nabla u)=b(x)\cdot\nabla u(x)+c(x)u(x)=0, \tag{17}$$

gdzie b jest funkcją o wartościach w $\mathbb{R}^n$, a c jest funkcją skalarną. Wówczas

$$F(x,z,p)=b(x)\cdot p+c(x)z, \qquad \nabla_p F=b(x)$$

i równania (∗) przyjmują postać

$$\begin{aligned}
\dot{x}(s) &= b(x(s)),\\
\dot{z}(s) &= b(x(s)) \cdot p(s) = -c(x(s))z(s),\\
\dot{p}(s) &= -\nabla_x b \cdot p - \nabla_x c \cdot z - c(x)p.
\end{aligned}$$

(Faktycznie ostatnie z tych równań nie będzie nam potrzebne.)

Przykład. Rozpatrzmy układ

$$\begin{cases} x_1 u_{x_2} - x_2 u_{x_1} = u & \text{w } \Omega = \{x_1 > 0, x_2 > 0\},\\ u(x_1, x_2) = g(x_1) & \text{na } \Gamma = \{x_1 > 0, x_2 = 0\}. \end{cases}$$

Wówczas równania charakterystyk mają postać

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -x_2,\\
\dot{x}_2 &= x_1,\\
\dot{z} &= z.
\end{aligned}$$

Rozwiązując ten układ równań z uwzględnieniem warunku brzegowego dostajemy

$$x_1(s) = x_0 \cos s, \quad x_2(s) = x_0 \sin s, \quad z(s) = g(x_0)e^s, \quad x_0 > 0, 0 \le s < \pi/2.$$

Ostatecznie rugując parametr s dostajemy rozwiązanie

$$u(x_1, x_2) = g\Big(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,\Big) \exp\Big\{ \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1} \Big\}, \quad x_1 > 1, x_2 > 0. \qquad \diamond$$

B. F quasiliniowa. Załóżmy, że równanie (1) jest quasiliniowe tzn.

$$F(x, u, \nabla u) = b(x, u) \cdot \nabla u(x) + c(x, u) = 0, \tag{18}$$

gdzie b jest funkcją o wartościach w $\mathbb{R}^n$, a c jest funkcją skalarną. Wówczas

$$F(x, z, p) = b(x, z) \cdot p + c(x, z), \qquad \nabla_p F = b(x, z)$$

i równania (∗) przyjmują postać

$$\begin{aligned}
\dot{x}(s) &= b(x(s), z(s)),\\
\dot{z}(s) &= b(x(s), z(s)) \cdot p(s) = -c(x(s), z(s)),
\end{aligned} \tag{19}$$

(pominęliśmy ostatnie równanie). Na ogół równania te nie dają się rozwiązać w sposób jawny, tym nie mniej w wielu przypadkach jest to możliwe.

Przykład. Rozpatrzmy układ

$$\begin{cases} u_{x_1} + u_{x_2} = u^2 & \text{w } \Omega = \{x_1 \in \mathbb{R}, x_2 > 0\}, \\ u(x_1, x_2) = g(x_1) & \text{na } \Gamma = \{x_2 = 0\}. \end{cases}$$

Wówczas równania charakterystyk mają postać

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 1, \\ \dot{x}_2 &= 1, \\ \dot{z} &= z^2. \end{aligned}$$

Rozwiązując ten układ równań z uwzględnieniem warunku brzegowego dostajemy

$$x_1(s) = x_0 + s, \quad x_2(s) = s, \quad z(s) = \frac{z_0}{1 - sz_0} = \frac{g(x_0)}{1 - sg(x_0)}.$$

Zatem

$$u(x_1, x_2) = z(s) = \frac{g(x_0)}{1 - sg(x_0)} = \frac{g(x_1 - x_2)}{1 - x_2 g(x_1 - x_2)}. \qquad \diamond$$

Powróćmy jeszcze do równania quasiliniowego (18). Jak już wiemy równania charakterystyk przybierają wówczas postać układu (19). Układ ten można zapisać w postaci symetrycznej

$$\frac{dx_1}{b_1} = \frac{dx_2}{b_2} = ... = \frac{dx_n}{b_n} = \frac{dz}{-c}.$$

Jak wiadomo z ogólnej teorii równań różniczkowych zwyczajnych jeśli wektor $(b(x), c(x))$ nigdzie nie znika, to układ ten posiada n liniowo niezależnych całek pierwszych

$$\varphi_1(x, z) = C_1, \ ..., \ \varphi_n(x, z) = C_n.$$

Rozwiązanie ogólne (9) przedstawia się w postaci uwikłanej przez

$$\Phi(\varphi_1, ..., \varphi_n) = 0,$$

gdzie Φ jest dowolną funkcją klasy C^1.

Przykład. Dla równania Eulera

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = \lambda u$$

równaniem charakterystyk w postaci symetrycznej jest

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = \frac{du}{\lambda u}.$$

Mamy 3 całki pierwsze

$$\varphi_1 = \frac{y}{x}, \quad \varphi_2 = \frac{z}{x}, \quad \varphi_3 = \frac{u}{x^\lambda}.$$

Rozwiązanie ogólne w postaci uwikłanej wyraża się przez

$$\Phi\Big(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \frac{u}{x^\lambda}\Big) = 0.$$

Rozwikłując względem trzeciej zmiennej dostajemy

$$u(x,y,z) = x^\lambda f\big(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\big)$$

gdzie f jest dowolną funkcją klasy C^1. Zatem u jest funkcją jednorodną stopnia λ tzn.

$$u(tx, ty, tz) = t^\lambda u(x,y,z) \text{ dla } t > 0.$$

Charakterystykami są półproste wychodzące z zera. $\diamond$

C. F całkowicie nieliniowa. Wówczas trzeba całkować pełny układ, co jest możliwe w sposób jawny tylko w wyjątkowych przypadkach.

2.6. Zagadnienie Cauchy'ego.

Dla zadanej powierzchni $\Gamma \subset \partial\Omega$ i funkcji $g : \Gamma \to \mathbb{R}$ znaleźć rozwiązanie równania (9), którego wartość na Γ pokrywa się z g tzn.

$$u_{|\Gamma} = g. \tag{10}$$

Zakładamy, że Γ i g są klasy C^1.

Geometrycznie zagadnienie to oznacza znalezienie n-wymiarowej powierzchni całkowej równania (9) przechodzącej przez $(n-1)$-wymiarową powierzchnię $\{(x, g(x)) : x \in \Gamma\}$. Powierzchnia całkowa jest utkana z charakterystyk przechodzących przez punkty $(x, g(x)) : x \in \Gamma$. Okazuje się, że jeśli Γ nie zawiera kierunków charakterystycznych, to rozwiązanie problemu Cauchy'ego istnieje lokalnie w pobliżu Γ. Dokładne sformułowanie odpowiedniego twierdzenia i jego dowód można znaleźć w monografii L. Evansa, §3.2. Tutaj ograniczymy się do podania algorytmu rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego dla równania quasi-liniowego w dwóch wymiarach.

Problem. Niech będzie dane równanie quasi-liniowe

$$P(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x} + Q(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y} = R(x,y,u),$$

gdzie P, Q i R są funkcjami klasy $C^1(\Omega \times \mathbb{R})$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Znaleźć rozwiązanie spełniające warunek początkowy

$$u_{|\Gamma} = g,$$

gdzie Γ jest krzywą $\Gamma = \{(a(s), b(s)), s \in (s_1, s_2) \subset \mathbb{R}\}$, a g jest zadaną funkcją.

Algorytm rozwiązania.

1. Piszemy równania charakterystyk

$$\frac{dx}{P(x,y,u)} = \frac{dy}{Q(x,y,u)} = \frac{du}{R(x,y,u)}.$$

2. Znajdujemy całki pierwsze $\varphi_1(x,y,u), \varphi_2(x,y,u)$, a następnie z układu

$$\begin{cases} \varphi_1\big(a(s), b(s), g(a(s), b(s))\big) = C_1, \\ \varphi_2\big(a(s), b(s), g(a(s), b(s))\big) = C_2 \end{cases}$$

rugując parametr s wyznaczamy zależność

$$\Phi(C_1, C_2) = 0.$$

3. Rozwiązanie $u(x,y)$ jest dane w postaci uwikłanej

$$\Phi\big(\varphi_1(x,y,u), \varphi_2(x,y,u)\big) = 0.$$

Przykład. Wyznaczyć powierzchnię całkową równania

$$xy\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$$

przechodzącą przez krzywą $\{x = s, y = s, z = s^2\}$.

1. Równania charakterystyk mają postać

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

2. Całkami pierwszymi są $y - \ln x = C_1$, $z/y = C_2$. Z układu

$$\begin{cases} x = s, \\ y = s, \\ z = s^2, \\ y - \ln x = C_1, \\ z/y = C_2 \end{cases}$$

rugując parametr s wyznaczamy zależność

$$C_2 - \ln C_2 = C_1.$$

3. Rozwiązanie $z = z(x,y)$ spełnia równanie uwikłane

$$\frac{z}{y} - \ln\frac{z}{y} = y - \ln x \quad \text{lub} \quad ze^{-z/y} = xye^{-y}\ . \qquad \diamond$$

2.7. Przykład równania bez rozwiązań

Jak widzieliśmy w przypadku rzeczywistego równania liniowego lub quasi-liniowego lokalnie istnieje dużo rozwiązań. Sytuacja zmienia się diametralnie gdy przejdziemy do równań zespolonych lub układów równań rzeczywistych. Podamy teraz przykład równania liniowego zespolonego rzędu pierwszego nie posiadającego rozwiązań.

Rozważmy równanie

$$\frac{\partial w}{\partial x} + ix\frac{\partial w}{\partial y} = f(x,y), \tag{20}$$

gdzie $w = \mathrm{Re}w + i\mathrm{Im}w = u + iv.$. Równanie to jest równoważne układowi równań

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial v}{\partial y} = \mathrm{Re}f, \\ \frac{\partial v}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = \mathrm{Im}f. \end{cases}$$

Załóżmy, że $f \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ spełnia warunki $f(x,y) = f(-x,y)$; $\mathrm{supp}f \cap \{x > 0\} \subset \cup_{n\in\mathbb{N}}\Omega_n$ gdzie $\Omega_n = B_1(x_n, x_n)$ przy czym $x_n \to 0$ oraz $\Omega_n \cap \Omega_{n+1} = \emptyset$; $\int_{\Omega_n} f(x,y)dxdy \neq 0$. Przy powyższych założeniach równanie (20) nie posiada rozwiązań klasy $C^1(G)$ gdzie G jest dowolnym otoczeniem zera.

Dowód. Rozłóżmy funkcje w na sumę funkcji nieparzystej i parzystej $w = p + q$. Wówczas

$$p_x(x,y) + ixp_y(x,y) = f(x,y) \quad (\text{gdyż } \ p_x, xp_y, f \ \text{ są } \ \text{parzyste}),$$
$$p(0,y) = 0 \quad (\text{gdyż } \ p \ \text{ jest } \ \text{parzysta}).$$

Niech $s = x^2/2$. Wtedy $p_x = p_s \cdot s$, $\quad p(0,y) = 0$ oraz

$$p_s + ip_y = \frac{1}{\sqrt{2s}} f(\sqrt{2s}, y), \qquad s > 0.$$

Ponieważ $f = 0$ poza zbiorem $\Omega = \cup_{n\in\mathbb{N}}\Omega_n$ więc p jest tam holomorficzna oraz równa tożsamościowo zero, gdyż $p(0,y) = 0$. Wobec ciągłości $p = 0$ również na $\partial\Omega_n$. Lecz ze wzoru Greena mamy

$$\begin{aligned} 0 \neq \iint_{\Omega_n} f(x,y)dxdy &= \iint_{\Omega_n} (p_x + ixp_y)dxdy \\ &= \int_{\partial\Omega_n} pdy - ixpdx = 0. \end{aligned}$$

Otrzymana sprzeczność dowodzi naszej tezy. $\diamond$

3. Klasyfikacja równań liniowych

W celu uproszczenia zapisów w teorii równań różniczkowych cząstkowych stosuje się następujące oznaczenia. Układ $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ nazywa się *wielowskaźnikiem* o długości $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$. Jeśli $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, to

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot x_n^{\alpha_n};$$

$$\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} ... \partial_n^{\alpha_n}, \quad \text{gdzie} \quad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1, ..., n;$$

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} ... D_n^{\alpha_n} \quad \text{gdzie} \quad D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1, ..., n;$$

$$\alpha! = \alpha_1! ... \alpha_n!.$$

3.1. Równania liniowe

Definicja. *Równaniem liniowym rzędu* $m \in \mathbb{N}$ nazywamy równanie postaci

$$(1) \qquad Pu = f, \quad \text{gdzie} \quad Pu = \sum_{|\alpha| \le m} A_\alpha(x) D^\alpha u.$$

Zakładamy, że *współczynniki* równania A_α i prawa strona f są zadanymi funkcjami rzeczywistymi określonymi w obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, natomiast funkcja u jest nieznana. Funkcję $u : \Omega \to \mathbb{R}$, m-krotnie różniczkowalną w sposób ciągły (tzn. klasy $C^m(\Omega)$) taką, że $Pu(x) = f(x)$ dla każdego $x \in \Omega$ nazywamy *rozwiązaniem klasycznym* równania (1).

Definicja. *Symbolem głównym* równania (1) (lub operatora P) nazywamy wielomian zmiennej $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\sigma_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = m} A_\alpha(x) \xi^\alpha.$$

Niezerowy wektor $\xi \in \mathbb{R}^n$ spełniający w danym punkcie $x \in \Omega$ równość $\sigma_m(x, \xi) = 0$ nazywamy *wektorem charakterystycznym* równania (lub operatora).

Definicja. Niech $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^1 oraz niech $S = \{x \in \Omega : \psi(x) = 0\}$ będzie hiperpowierzchnią zanurzoną w $\mathbb{R}^n$ przy czym $\nabla\psi(x) = \text{grad}\psi(x) \neq 0$ dla $x \in S$. S nazywamy *hiperpowierzchnią charakterystyczną* równania (1) jeśli

$$\sigma_m(x, \nabla\psi(x)) = 0 \quad \text{dla} \quad x \in S.$$

Przykład. Niech $n = 2$, $Pu = D_1^2 u - D_2^2 u$. Wówczas P jest operatorem rzędu 2 oraz $\sigma_2(x,\xi) = \xi_1^2 - \xi_2^2$. Jeśli $S = \{\psi(x_1, x_2) = 0\}$, to S jest charakterystyczna jeśli

$$\Big(\frac{\partial\psi(x_1,x_2)}{\partial x_1}\Big)^2 - \Big(\frac{\partial\psi(x_1,x_2)}{\partial x_2}\Big)^2 = 0.$$

Zatem charakterystykami są proste $x_1 + x_2 = C_1$ oraz $x_1 - x_2 = C_2$ gdzie $C_1, C-2$ są dowolnymi stałymi.

Definicja. Równanie (1) (operator P) nazywa się *eliptycznym w punkcie* x jeśli $\sigma_m(x,\xi) \neq 0$ dla każdego $\xi \neq 0$. Równanie jest eliptyczne w obszarze Ω jeśli jest eliptyczne w każdym punkcie tego obszaru.

Przykład. Równania Laplace'a $\Delta u = 0$ i Poissona $\Delta u = f$ są eliptyczne; symbolem operatora Laplace'a jest $\sigma_2(x,\xi) = -\xi^2$.

Definicja. Równanie (1) (operator P) nazywa się *ściśle hiperbolicznym w punkcie x w kierunku wektora* $N \in \mathbb{R}^n, N \neq 0$ jeśli równanie $\sigma_m(x, \xi + \tau N) = 0$ posiada m różnych rzeczywistych pierwiastków względem zmiennej τ przy każdym ustalonym $\xi \notin sN, s \in \mathbb{R}$.

Definicja. Niech $P = P(D) = \sum_{|\alpha|\leq m} A_\alpha D^\alpha$ będzie operatorem różniczkowym rzędu m o stałych współczynnikach. Mówimy, że P jest operatorem *hiperbolicznym* w kierunku wektora N jeśli $\sigma_m(N) \neq 0$ oraz istnieje $\gamma_0 \in \mathbb{R}$ taka, że $P(\xi + \tau N) \neq 0$ dla $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\tau \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}\tau < \gamma_0$.

Przykład. Operator $P(D) = D_1^2 - D_2^2$ jest hiperboliczny w kierunku wektora $N = (n_1, n_2)$ jeśli $n_1 + n_2 \neq 0$ oraz $n_1 - n_2 \neq 0$; natomiast operator Laplace'a nie jest hiperboliczny.

Definicja. Niech $P(D)$ będzie operatorem różniczkowym rzędu m o stałych współczynnikach. Zagadnieniem Cauchy'ego w półprzestrzeni $x_n \geq 0$ nazywamy następujący problem

$$(2) \qquad \begin{cases} P(D)u = f & \text{w półprzestrzeni } x_n > 0, \\ \partial_n^j u = g_j & \text{dla } j = 0, ..., m-1 \text{ na hiperpowierzchni } x_n = 0 \end{cases}$$

gdzie funkcje f oraz g_j, $j = 0, ..., m-1$ są dane.

Definicja. Mówimy, że zagadnienie Cauchy'ego (2) jest *dobrze postawione (w klasie C^∞)* jeśli posiada ono jednoznaczne rozwiązanie $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ $\cap C^{m-1}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ dla każdej funkcji $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ oraz dowolnych $g_j \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$, $j = 0, ..., m-1$.

Niech $N \in \mathbb{R}^n$ będzie dowolnym wektorem oraz $T \in \mathbb{R}$. Analogicznie definiuje się pojęcie zagadnienia Cauchy'ego w półprzestrzeni $< x, N > \geq T$ oraz pojęcie dobrze postawionego zagadnienia Cauchy'ego. Operator jednorodny o stałych współczynnikach ściśle hiperboliczny w kierunku N jest operatorem hiperbolicznym w tym kierunku. Można udowodnić, że operator $P(D)$

jest hiperboliczny w kierunku N wtedy i tylko wtedy, gdy zagadnienie Cauchy'ego jest dobrze postawione w półprzestrzeni $< x, N > \geq T$ dla dowolnego $T \in \mathbb{R}$. Natomiast problem charakteryzacji operatorów $P(D)$ dla których zagadnienie Cauchy'ego (2) jest dobrze postawione jest otwarty.

3.2. Równania liniowe rzędu 2

Ogólne równanie różniczkowe cząstkowe liniowe rzędu 2 określone w obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ma postać

$$\sum_{k,l=1}^{n} a_{k,l}(x) u_{x_k x_l}(x) + \sum_{k=1}^{n} b_k(x) u_{x_k}(x) + c(x) u = f(x). \tag{3}$$

Ponadto, będziemy zakładać, że macierz $a = \{a_{k,l}(x)\}_{k,l=1}^{n}$ jest symetryczna, tzn. $a_{k,l} = a_{l,k}$ dla $k, l = 1, ..., n$. Niech $A \in M(n, n)$ będzie nieosobliwą macierzą o stałych współczynnikach $A_{k,l} \in \mathbb{R}, k, l = 1, ..., n$. Dokonajmy zamiany zmiennych niezależnych $y = Ax$. Wówczas, kładąc $\widetilde{u}(y) = u(A^{-1}y)$ mamy

$$u_{x_k}(x) = \sum_{i=1}^{n} A_{i,k} \widetilde{u}_{y_i}(y), \qquad k = 1, ..., n,$$
$$u_{x_k x_l}(x) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{i,k} A_{j,l} \widetilde{u}_{y_i y_j}(y,) \qquad k, l = 1, ..., n.$$

Zatem w zmiennych y równanie (3) jest równoważne równaniu

$$\sum_{i,j=1}^{n} \Big(\sum_{k,l=1}^{n} \widetilde{a}_{k,l}(y) A_{i,k} A_{j,l} \Big) \widetilde{u}_{y_i y_j}(y)$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{n} \widetilde{b}_k(y) A_{i,k} \Big) \widetilde{u}_{y_i}(y) + \widetilde{c}(y) = \widetilde{f}(y),$$

gdzie $\widetilde{a}_{k,l}(y) = a_{k,l}(A^{-1}y), \widetilde{b_k}(y) = b_k(A^{-1}y), \widetilde{c}(y) = c(A^{-1}y), \ \widetilde{f}(y) = f(A^{-1}y)$. Zauważmy teraz, że symbol główny równania (3) jest postaci $\sigma_2(x, \xi) = -\sum_{k,l=1}^{n} a_{k,l}(x) \xi_k \xi_l$. Po zamianie zmiennych $\xi = A^T \eta$ otrzymamy

$$\sigma_2(x, A^T \eta) = -\sum_{i,j=1}^{n} \Big(\sum_{k,l=1}^{n} a_{k,l}(x) A_{i,k} A_{j,l} \Big) \eta_i \eta_j.$$

Zatem część główna operatora liniowego P rzędu 2 reaguje na nieosobliwą zamianę zmiennych $y = SAx$ tak jat forma kwadratowa σ_2 na zamianę zmiennych $\xi = A^T \eta$. Przypomnijmy sobie teraz twierdzenie Sylwestra. Powiada ono, że każdą symetryczną formę kwadratową można poprzez liniową zamianę zmiennych sprowadzić do postaci kanonicznej tzn. do postaci $\sum_{i=1}^{n} \delta_1 \eta_i^2$ gdzie

$\delta_i \in \{-1, 0, 1\}$. Zatem w każdym ustalonym punkcie x część główną operatora P można sprowadzić do postaci kanonicznej $\sum_{i=1}^{n} \delta_i u_{y_i y_i}$. Niech r (odpowiednio s) oznacza liczbę współczynników δ_i, przyjmujących wartość 1 (odpowiednio -1). Wówczas, jeśli $(r, s) \in \{(n, 0), (0, n)\}$, to operator P jest *eliptyczny* oraz jeśli $(r, s) \in \{(n-1, 1), (1, n-1)\}$, to P jest *ściśle hiperboliczny*. Ponadto, jeśli $(r, s) \in \{(n-1, 0), (0, n-1)\}$, to P nazywamy *słabo parabolicznym*.

3.3. Równania liniowe rzędu 2 dwóch zmiennych niezależnych

W przypadku równań liniowych rzędu 2 dwóch zmiennych niezależnych powyższą klasyfikację można dalej kontynuować.

Ogólne równanie cząstkowe drugiego rzędu dwóch zmiennych niezależnych liniowe względem najwyższych pochodnych można zapisać w postaci

$$A(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2B(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial xy} + C(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = F\big(x, y, f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\big), \tag{4}$$

gdzie funkcje A, B, C są określone w pewnym obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, natomiast F jest określona na $\Omega \times \mathbb{R}^3$. Okazuje się, że własności rozwiązań równania (4) istotnie zależą od typu równania. W celu określenia typu równania zdefiniujmy najpierw jego *wyróżnik*

$$\Delta(x,y) = B^2(x,y) - A(x,y)C(x,y).$$

Definicja.
Równanie (4) jest *eliptyczne* w obszarze Ω jeśli $\Delta(x,y) < 0$ dla $x, y \in \Omega$.
Równanie (4) jest *paraboliczne* w obszarze Ω jeśli $\Delta(x,y) = 0$ dla $x, y \in \Omega$.
Równanie (4) jest *hiperboliczne* w obszarze Ω jeśli $\Delta(x,y) > 0$ dla $x, y \in \Omega$.

Zauważmy, że typ równania nie zależy od pochodnych rzędu pierwszego, natomiast zależy od obszaru. Na przykład równanie Tricomiego

$$y\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = F\big(x, y, f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\big)$$

jest eliptyczne w obszarze $\{(x,y) : y > 0\}$, natomiast hiperboliczne w obszarze $\{(x,y) : y < 0\}$. (Równanie to w żadnym obszarze nie jest paraboliczne.)

Definicja. Symbolem głównym równania (4) nazywamy funkcję

$$\sigma(x, y, \xi, \eta) = A(x,y)\xi^2 + 2B(x,y)\xi\eta + C(x,y)\eta^2 \tag{5}$$

określoną dla $x, y \in \Omega$, $\xi, \eta \in \mathbb{R}$.

Definicja. Niech krzywa $\gamma \subset \Omega$ będzie zadana równością $\gamma = \{(x,y) : \psi(x,y) = 0\}$ dla pewnej funkcji ψ klasy C^1. Mówimy, że krzywa γ jest *krzywą charakterystyczną* lub *charakterystyką* równania (4) jeśli

$$\sigma(x, y, \nabla\psi(x,y)) = 0 \qquad \text{dla} \;\; x, y \in \gamma.$$

Wobec (5) oznacza to spełnienie równości

$$A(x,y)\big(\psi'_x(x,y)\big)^2 + 2B(x,y)\psi'_x(x,y)\psi'_y(x,y) + C(x,y)\big(\psi'_y(x,y)\big)^2 = 0. \tag{6}$$

Zauważmy, że na krzywej γ mamy $\psi'_x(x,y)dx + \psi'_y(x,y)dy = 0$ przy czym w dowolnym punkcie $(x,y) \in \gamma$, $\psi'_x(x,y) \neq 0$ lub $\psi'_y(x,y) \neq 0$. Stąd $\psi'_x(x,y) = -\psi'_y(x,y)\frac{dy}{dx}$. Wstawiając do (6) mamy

$$A(x,y)\big(\psi'_y(x,y)\big)^2\Big(\frac{dy}{dx}\Big)^2 - 2B(x,y)\big(\psi'_y(x,y)\big)^2\frac{dy}{dx} + C(x,y)\big(\psi'_x(x,y)\big)^2 = 0.$$

Ostatecznie skracając dostajemy równanie charakterystyk

$$A(x,y)\Big(\frac{dy}{dx}\Big)^2 - 2B(x,y)\frac{dy}{dx} + C(x,y) = 0, \tag{4}$$

które można zapisać też w postaci symetrycznej

$$A(x,y)(dy)^2 - 2B(x,y)dxdy + C(x,y)(dx)^2 = 0. \tag{6'}$$

W przypadku $\Delta > 0$ (czyli dla równania hiperbolicznego) istnieją dwie rodziny charakterystyk o równaniach

$$\varphi_1(x,y) = C_1, \qquad \varphi_2(x,y) = C_2.$$

Wówczas, podstawiając

$$u = \varphi_1(x,y),$$
$$v = \varphi_2(x,y)$$

równanie (4) sprowadza się do postaci kanonicznej

$$\frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial u \partial v} = \widetilde{F}(u, v, \widetilde{f}_u, \widetilde{f}_v).$$

W przypadku $\Delta < 0$ (czyli dla równania eliptycznego) istnieją dwie rodziny charakterystyk zespolonych o równaniach

$$\varphi_1(x,y) = C_1, \qquad \varphi_2(x,y) = C_2.$$

Wówczas, podstawiając

$$u = \varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y),$$
$$v = \big(\varphi_1(x, y) - \varphi_2(x, y)\big)i$$

równanie (4) sprowadza się do postaci kanonicznej

$$\frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial v^2} = \widetilde{F}(u, v, \widetilde{f}_u, \widetilde{f}_v).$$

Jeśli $\Delta = 0$ (równanie paraboliczne), to istnieje tylko jedna rodzina charakterystyk (podwójna)

$$\varphi(x, y) = C.$$

Wówczas podstawienie $u = \varphi(x, y)$, v -dowolna funkcja, taka aby w obszarze Ω zachodziło $\frac{D(u,v)}{D(x,y)} \neq 0$ sprowadza równanie (4) do postaci kanonicznej

$$\frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial v^2} = \widetilde{F}(u, v, \widetilde{f}_u, \widetilde{f}_v).$$

4. Równania Laplace'a i Poissona

Definicja. Funkcję $u \in C^2(\Omega)$, gdzie Ω jest obszarem w $\mathbb{R}^n$ nazywamy *funkcją harmoniczną w* Ω i piszemy $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ jeśli spełnia ona w tym obszarze równanie Laplace'a

$$\Delta u = 0. \tag{1}$$

4.1. Interpretacja fizyczna

Równanie Laplace'a opisuje wiele procesów fizycznych. W typowej sytuacji funkcję u interpretuje się jako gęstość pewnej wielkości (np. stężenie chemiczne, temperatura, potencjał). W celu wyprowadzenia tego równania rozważmy podobszar V obszaru Ω o gładkim brzegu ∂V. Jeśli F oznacza gęstość strumienia przepływu w obszarze Ω bez źródeł, to całkowity przepływ przez ∂V jest równy zeru tzn.

$$\int_{\partial V} F \cdot \nu dS = 0,$$

gdzie ν jest wektorem normalnym zewnętrznym do ∂V, a dS oznacza miarę na powierzchni ∂V. Zgodnie z prawem Gaussa-Ostrogradzkiego mamy

$$\int_{\partial V} F \cdot \nu dS = \int_V \operatorname{div} F dx.$$

Wobec dowolności obszaru $V \subset \Omega$ dostajemy stąd

$$\operatorname{div} F = 0 \quad \text{w} \quad \Omega. \tag{2}$$

Z fizycznego punktu widzenia przyjmuje się, że strumień F jest proporcjonalny do gradientu gęstości ∇u lecz przeciwnie skierowany (fizycznie oznacza to, że przepływ odbywa się z obszarów o większej gęstości do obszarów o mniejszej gęstości)

$$F = -a \cdot \nabla u.$$

Zatem równanie (2) przybiera postać

$$-a \operatorname{div}(\nabla u) = -a\Delta u = 0,$$

która jest równoważna równaniu (1).

4.2. Rozwiązanie podstawowe

Jedna z metod rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych polega na szukaniu rozwiązań niezmienniczych względem pewnych grup symetrii. Ponieważ równanie Laplace'a jest niezmiennicze względem obrotów tzn. $\Delta \circ A = \Delta$ gdzie A jest macierzą ortonormalną (sprawdzić na ćwiczeniach) wydaje się naturalne poszukiwanie rozwiązań równania Laplace'a zależnych tylko od odległości od zera tzn. rozwiązań postaci

$$u(x) = v(r), \quad \text{gdzie} \quad r = |x| = (x_1^2 + ... + x_n^2)^{1/2}.$$

W tym celu dla $i = 1, ..., n$ liczymy

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial v(r)}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_i} = v'(r) \cdot \frac{x_i}{r},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = v''(r) \cdot \frac{x_i^2}{r^2} + v'(r)\Big(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\Big).$$

Stąd

$$\Delta u = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r). \tag{3}$$

Zatem funkcja $u(x) = v(|x|)$ jest rozwiązaniem równania Laplace'a w $\mathbb{R}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy v spełnia równanie zwyczajne

$$v''(r) + \frac{n-1}{r} \, v'(r) = 0.$$

Rozwiązaniem ogólnym tego równania jest

$$v(r) = \begin{cases} c_1 \ln r + c_2 & \text{gdy } n = 2, \\ c_1 r^{-n+2} + c_2 & \text{gdy } n \geq 3. \end{cases}$$

Definicja. Rozwiązaniem podstawowym operatora Laplace'a nazywamy funkcję

$$
E(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \ln |x| & \text{gdy} \quad n = 2, \\ \dfrac{-1}{4\pi} \dfrac{1}{|x|} & \text{gdy} \quad n = 3, \\ \dfrac{-1}{(n-2)\omega_n} \dfrac{1}{|x|^{n-2}} & \text{gdy} \quad n \geq 3, \end{cases} \tag{4}
$$

gdzie ω_n jest $(n-1)$ wymiarową miarą sfery S^{n-1} w $\mathbb{R}^n$.

Uwaga. Zauważmy, że funkcja $E(x)$ nie jest określona w zerze. Nie istnieją różne od stałych radialne rozwiązania równania Laplace'a określone na całym $\mathbb{R}^n$.

4.3. Własność wartości średniej

W następnym twierdzeniu wykażemy, że wartość funkcji harmonicznej w danym punkcie pokrywa się ze średnią jej wartością na sferze (lub kuli) o środku w tym punkcie.

Twierdzenie 1 (O wartości średniej). *Jeśli funkcja $u \in C^2(\Omega)$ jest harmoniczna w obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ to dla każdej kuli $B(x,r) \subset \Omega$ zachodzi*

$$
u(x) = \fint_{S(x,r)} u(y) dS(y) = \fint_{B(x,r)} u(y) dy, \tag{5}
$$

gdzie

$$
\fint_S f dS = \frac{1}{|S|} \int_S f dS, \qquad \fint_B f dy = \frac{1}{|B|} \int_B f dy
$$

jest średnią wartość funkcji f na sferze i kuli.

Dowód.

1. Połóżmy

$$
f(r) = \fint_{S(x,r)} u(y) dS(y) \overset{y=x+rz}{=} \fint_{S(0,1)} u(x+rz) dS(z).
$$

Wówczas

$$
\begin{aligned}
f'(r) &= \fint_{S(0,1)} \nabla u(x+rz) \cdot z dS(z) \\
&\overset{y=x+rz}{=} \fint_{S(x,r)} \nabla u \cdot \frac{y-x}{r} dS(y) \\
&\overset{\eta=(y-x)/r}{=} \fint_{S(x,r)} \frac{\partial u}{\partial \eta}(y) dS(y) \\
&\overset{\text{tw.Greena}}{=} \frac{r}{n} \fint_{B(x,r)} \Delta u(y) dy = 0.
\end{aligned}
$$

Zatem f jest stała. Stąd

$$f(r) = \lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{t \to 0} \fint_{S(x,t)} u(y)dS(y) = u(x).$$

2. W celu wykazania drugiej części twierdzenia wykorzystamy część pierwszą oraz wzór na całkowanie we współrzędnych biegunowych.

$$\begin{aligned}\int_{B(x,r)} u(y)dy &= \int_0^r \Big(\int_{S(x,s)} u(y)dS(y) \Big) ds \\ &= \int_0^r \Big(\omega_n s^{n-1} \fint_{S(x,s)} u(y)dS(y) \Big) ds \\ &= u(x) \int_0^s \omega_n s^{n-1} ds = \frac{\omega_n}{n} r^n \cdot u(x).\end{aligned}$$

Stąd dostajemy drugą część wzoru (5) gdyż $|B(x,r)| = \frac{\omega_n}{n} r^n$. $\diamond$

Okazuje się, że zachodzi również twierdzenie odwrotne do twierdzenia o wartości średniej.

Twierdzenie 2 (Odwrotne do twierdzenia o wartości średniej). *Jeśli $u \in C^2(\Omega)$ oraz dla każdej kuli $B(x,r) \subset \Omega$*

$$u(x) = \fint_{B(x,r)} u(y)dy,$$

to funkcja u jest harmoniczna w Ω.

Dowód. Załóżmy, że $\Delta u \neq 0$. Wówczas istnieje kula $B(x,r) \subset \Omega$ taka, że $\Delta u > 0$ lub $\Delta u < 0$ na $B(x,r)$. Lecz wówczas dla funkcji f zdefiniowanej w dowodzie Twierdzenia 1 dostajemy

$$0 = f'(r) = \frac{r}{n} \cdot \fint_{B(x,r)} \Delta u(y)dy \neq 0.$$

Uzyskana sprzeczność dowodzi, że $\Delta u = 0$ na Ω. $\diamond$

Z twierdzenia o wartości średniej wynika wiele ciekawych własności funkcji harmonicznych.

Twierdzenie 3 (Zasada maksimum). *Niech Ω będzie obszarem ograniczonym w $\mathbb{R}^n$ oraz niech $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Jeśli u jest harmoniczna w Ω, to*

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \max_{x \in \partial\Omega} u(x) \quad \text{oraz} \quad \min_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \min_{x \in \partial\Omega} u(x).$$

Ponadto jeśli Ω jest spójny i u osiąga maksimum lub minimum w punkcie wewnętrznym Ω, to u jest stała.

Dowód. Załóżmy, że istnieje $x_0 \in \Omega$ taki, że

$$u(x_0) = M = \max_{x \in \overline{\Omega}} u(x).$$

Stosując twierdzenie o wartości średniej dla kuli $B(x_0, r), r < \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$ dostajemy

$$M = u(x_0) = \fint_{B(x_0.r)} u(y)dy \leq M.$$

Stąd $u \equiv M$ na $B(x_0, r)$ ponieważ u jest funkcją ciągłą. Zatem zbiór $\{x \in \Omega : u(x) = M\}$ jest zarazem otwarty jak i domknięty (gdyż u jest funkcją ciągłą), a więc jest on równy Ω o ile Ω jest spójny oraz maksimum funkcji u musi być osiągane na brzegu Ω. Podobne rozumowanie przeprowadzamy dla minimum u. $\diamond$

Wniosek (Twierdzenie o jednoznaczności). *Niech Ω będzie obszarem ograniczonym w $\mathbb{R}^n$. Załóżmy, że $f \in C(\Omega), g \in C(\partial\Omega)$. Wówczas zagadnienie Dirichleta*

$$\begin{cases} \Delta u = f & w \;\; \Omega, \\ u = g & na \;\; \partial\Omega \end{cases} \tag{6}$$

posiada co najwyżej jedno rozwiązanie $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. (Dokładnie jedno gdy $f \in C_0^2(\Omega)$.)

Dowód. Niech u_1 i u_2 będą dwoma rozwiązaniami. Stosując zasadę maksimum do funkcji harmonicznych $w = \pm(u_1 - u_2)$ dostajemy $w \equiv 0$. Stąd $u_1 \equiv u_2$.

Inny dowód. W przypadku gdy $\partial\Omega$ jest klasy C^1 zastosujmy wzór Greena do funkcji $w = u_1 - u_2$

$$0 = \int_\Omega w \Delta w dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial \eta} \, w dS(x) = -\int_\Omega |\nabla w|^2 dx.$$

Stąd $\nabla w \equiv 0$ w Ω i ponieważ $w = 0$ na $\partial\Omega$ mamy $w \equiv 0$. $\diamond$

4.4. Regularność funkcji harmonicznych

Wykażemy teraz, że funkcje harmoniczne są nieskończenie wiele razy różniczkowalne.

Twierdzenie 4 (O regularności). *Jeśli $u \in C^2(\Omega)$ ma własność wartości średniej, to $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Dowód. Niech

$$J(x) = \begin{cases} c\exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & \text{dla } \ |x| < 1, \\ 0 & \text{dla } \ |x| \geq 1, \end{cases}$$

gdzie c jest tak dobrana, aby $\int J(x)dx = 1$. Dla $\varepsilon > 0$ połóżmy

$$J_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} J(x/\varepsilon) \ \text{ dla } \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Wówczas $J_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \mathrm{supp} J_\varepsilon = B(0,\varepsilon), \int J_\varepsilon(x)dx = 1$. Dla $x \in \Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$ połóżmy

$$u^\varepsilon(x) = J_\varepsilon * u(x) = \int_\Omega J_\varepsilon(x-y)u(y)dy.$$

Wobec własności splotu wiemy, że $u^\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$. Wykażemy, że $u = u_\varepsilon$ na Ω_ε. Istotnie dla $x \in \Omega_\varepsilon$ mamy

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(x) &= \int_\Omega J_\varepsilon(x-y)u(y)dy = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{B(x,\varepsilon)} J\big(\frac{x-y}{\varepsilon}\big)u(y)dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^\varepsilon J\big(\frac{r}{\varepsilon}\big)\Big(\int_{S(x,r)} u(y)dS(y)\Big)dr = \frac{u(x)}{\varepsilon^n}\int_0^\varepsilon J\big(\frac{r}{\varepsilon}\big)\omega_n r^{n-1}dr \\ &= u(x)\int_{B(0,\varepsilon)} J_\varepsilon(y)dy = u(x). \end{aligned}$$

Zatem $u \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ dla każdego $\varepsilon > 0$. $\diamond$

Okazuje się, że funkcje harmoniczne są funkcjami analitycznymi t.j. w otoczeniu każdego punktu rozwijają się w zbieżny szereg potęgowy. Mianowicie zachodzi poniższe twierdzenie, którego dowód wymaga subtelniejszej analizy (można go znaleźć w książce L. Evansa).

Twierdzenie. *Jeśli u jest harmoniczna w Ω, to jest ona analityczna w Ω, tzn. w otoczeniu dowolnego punktu $x_0 \in \Omega$ jest ona sumą zbieżnego szeregu potęgowego*

$$u(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{D^\alpha u(x)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha \quad \textit{dla} \ \ |x-x_0| < r.$$

Następną ciekawą własnością funkcji harmonicznych jest nierówność Harnacka. Mianowicie na zbiorach zwartych supremum dodatniej funkcji harmonicznej jest porównywalne z jej minimum.

Twierdzenie 5 (Nierówność Harnacka). *Jeśli u jest nieujemną funkcją harmoniczną w obszarze Ω, to dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset \Omega$ istnieje stała $C = C(K,n)$ taka, że*

$$\sup_{x\in K} u(x) \leq C \inf_{x\in K} u(x)$$

lub inaczej

$$\frac{1}{C}\ u(y) \leq u(x) \leq C\ u(y) \quad dla \quad x, y \in K.$$

Dowód. Niech K będzie zwartym podzbiorem Ω oraz $r = (1/4) \cdot \mathrm{dist}(K, \partial\Omega) > 0$. Wybierzmy punkty $x, y \in \Omega$ takie, że $|x-y| \leq r$. Wówczas na mocy twierdzenia o wartości średniej

$$\begin{aligned} u(x) = \fint_{B(x,2r)} u(z)dz &\geq \frac{1}{|B(x,2r)|} \int_{B(y,r)} u(z)dz \\ &= \frac{1}{2^n} \cdot \fint_{B(y,r)} u(z)dz = \frac{1}{2^n} u(y). \end{aligned}$$

Zatem $2^n u(y) \geq u(x) \geq 1/(2^n)u(y)$ dla $|x-y| \leq r$. Ponieważ K jest zwarty możemy go pokryć skończoną rodziną kul $\{B_i\}_{i=1}^N$ o promieniach $= r$. Wówczas $2^{nN}u(y) \geq u(x) \geq 1/(2^{nN})u(y)$ dla $x, y \in K$. $\diamond$

4.5. Równanie Poissona

Równaniem Poissona nazywamy niejednorodne równanie Laplace'a

(7) $$\Delta u = f, \quad \text{gdzie} \quad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

W celu rozwiązania równania Poissona zauważmy, że dla każdego ustalonego $y \in \mathbb{R}^n$ odwzorowanie

$$x \to E(x-y)f(y)$$

jest harmoniczne. Harmoniczna jest także skończona suma takich wyrażeń. Można by zatem sądzić, że również splot E z funkcją f

(8) $$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} E(x-y)f(y)dy$$

będzie funkcją harmoniczną czyli, że

$$\Delta u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_x E(x-y) f(y) dy = 0.$$

Tak jednak nie jest gdyż $\nabla^2 E(x) \simeq c|x|^{-n}$ nie jest funkcją całkowalną w zerze i nie można wchodzić z różniczkowaniem pod znak całki. W istocie wykażemy, że funkcja określona wzorem (6) spełnia równanie Poissona (5).

Twierdzenie 6. *Jeśli $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$, to funkcja u dana wzorem (8) jest klasy $C^2(\mathbb{R}^n)$ i spełnia równanie Poissona (7).*

Dowód.
1. Wykażemy najpierw, że $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Istotnie

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} E(x-y) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} E(y) f(x-y) dy.$$

Zatem dla $\mathbb{R} \ni h \neq 0$ oraz $i = 1, ..., n$

$$\frac{u(x+he_i) - u(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^n} E(y) \cdot \Big[\frac{f(x+he_i-y) - f(x-y)}{h}\Big] dy.$$

Zauważmy, że wyrażenie w nawiasie kwadratowym dąży do $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y)$ jednostajnie na $\mathbb{R}^n$ gdy $h \to 0$. Stąd

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} E(y) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y) dy.$$

Analogicznie dla $i, j = 1, ..., n$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} E(y) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(x-y) dy.$$

Wobec założenia, że $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ dostajemy stąd, że drugie pochodne cząstkowe funkcji u są funkcjami ciągłymi, czyli $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$.
Uwaga. Jeśli $u \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, to kontynuując powyższe rozumowanie dostajemy $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

2. Wykażemy, że $\Delta u = f$. Ponieważ funkcja E ma osobliwość w zerze, rozbijemy całkę $\Delta u = \int_{\mathbb{R}^n} E(y) \Delta_x f(x-y) dy$ na dwie części

$$\begin{aligned}\Delta u(x) &= \int_{B(0,\varepsilon)} E(y) \Delta_x f(x-y) dy + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} E(y) \Delta_x f(x-y) dy \\ &= I_\varepsilon + J_\varepsilon.\end{aligned}$$

Łatwo jest oszacować pierwszy składnik

$$
\begin{aligned}
|I_\varepsilon| &\le C\|\nabla^2 f\|_{L^\infty} \cdot \int_{B(0,\varepsilon)} |E(y)|dy \\
&\le C_f \cdot \begin{cases} \varepsilon^2(|\ln\varepsilon|+1) & \text{gdy } \ n=2, \\ \varepsilon^2 & \text{gdy } \ n\ge 3. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Zatem $I_\varepsilon \to 0$ gdy $\varepsilon \to 0$.

W celu oszacowania drugiego składnika przypomnijmy wzór Greena.

Twierdzenie Greena. *Jeśli $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$, to*

$$
\int_\Omega u \cdot \Delta v dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} u \cdot \frac{\partial v}{\partial \eta} dS,
$$

gdzie η jest wektorem normalnym zewnętrznym do S oraz $\frac{\partial v}{\partial \eta} = \eta \cdot \nabla v$ jest pochodną kierunkową v w kierunku wektora η.

Zatem wobec założenia o zwartości nośnika funkcji f dostajemy

$$
\begin{aligned}
J_\varepsilon &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} E(y)\Delta_y f(x-y)dy \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} \nabla_y E(y) \cdot \nabla_y f(x-y)dy - \int_{S(\varepsilon)} E(y) \cdot \frac{\partial f}{\partial \eta}(x-y)dS(y) \\
&= K_\varepsilon + L_\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Całkę L_ε łatwo oszacować

$$
|L_\varepsilon| \le \|\nabla f\|_{L^\infty} \cdot \int_{S(\varepsilon)} |E(y)|dS(y) \le \begin{cases} C\varepsilon \ln\varepsilon & \text{gdy } n=2, \\ C\varepsilon & \text{gdy } n\ge 3. \end{cases}
$$

W celu obliczenia K_ε ponownie stosujemy wzór Greena

$$
\begin{aligned}
K_\varepsilon &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(\varepsilon)} \Delta E(y)dy - \int_{S(\varepsilon)} \frac{\partial E}{\partial \eta}(y) \cdot f(x-y)dS(y) \\
&= 0 - \int_{S(\varepsilon)} \frac{\partial E}{\partial \eta}(y) \cdot f(x-y)dS(y)
\end{aligned}
$$

gdyż $\Delta E = 0$ na $\mathbb{R}^n \setminus B(\varepsilon)$. W celu przeprowadzenia dalszych rachunków policzymy

$$
\frac{\partial E}{\partial \eta} \ \text{ na } \ S(\varepsilon).
$$

Otóż

$$
\nabla E(y) = \frac{1}{\omega_n} \cdot \frac{y}{|y|^n},
$$

natomiast na $S(\varepsilon)$ mamy $\eta = -y/|y| = -y/\varepsilon$. Zatem

$$\frac{\partial E}{\partial \eta}(y) = \eta \cdot \nabla E = \frac{-1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}}.$$

Stąd wobec ciągłości funkcji f

$$\begin{aligned} K_\varepsilon &= \frac{-1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \cdot \int_{S(\varepsilon)} f(x-y) dS(y) \\ &= \frac{1}{|S(x,\varepsilon)|} \int_{S(x,\varepsilon)} f(y) dS(y) \to f(x) \quad \text{gdy} \quad \varepsilon \to 0. \end{aligned}$$

Wykazaliśmy więc, że $\Delta u = f$. $\diamond$

4.6. Problem Dirichleta

Niech $f \in C(\Omega)$ oraz $g \in C(\partial\Omega)$. Zajmiemy się teraz rozwiązaniem zagadnienia Dirichleta dla równania Poissona

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{w} \ \ \Omega, \\ u = g & \text{na} \ \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{9}$$

W tym celu zauważmy, że bezpośrednią konsekwencja wzoru Greena jest wzór

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u) dy = \int_{\partial\Omega} \Big(u\frac{\partial v}{\partial \eta} - v\frac{\partial u}{\partial \eta}\Big) dS(y) \quad \text{dla} \quad u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}).$$

Dla ustalonego $x \in \Omega$ połóżmy $v_x(y) = E(x-y)$, gdzie E jest rozwiązaniem podstawowym operatora Laplace'a. Wówczas dla $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ oraz ε dostatecznie małego mamy

$$\int\limits_{\Omega \setminus B(x,\varepsilon)} u(y) \Delta_y E(x-y) dy = \int\limits_{\Omega \setminus B(x,\varepsilon)} E(x-y) \Delta u(y) dy$$
$$- \int\limits_{\partial\big(\Omega \setminus B(x,\varepsilon)\big)} E(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial \eta} dS(y) + \int\limits_{\partial\big(\Omega \setminus B(x,\varepsilon)\big)} u(y) \frac{\partial E(x-y)}{\partial \eta} dS(y).$$

W zbiorze $\Omega \setminus B(x,\varepsilon)$ mamy $\Delta_y E(x-y) = 0$. Ponadto

$$\Big| \int_{\partial B(x,\varepsilon)} E(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial \eta} dS(y) \Big| \le C\varepsilon^{n-1} \max_{|z|=\varepsilon} E(z) = o(1)$$

oraz na podstawie dowodu Twierdzenia 6

$$\int_{\partial B(x,\varepsilon)} u(y) \frac{\partial E(x-y)}{\partial \eta} dS(y) = ⨍_{\partial B(x,\varepsilon)} u(y) dS(y) \to u(x) \quad \text{gdy} \quad \varepsilon \to 0.$$

Zatem po dokonaniu przejścia granicznego $\varepsilon \to 0$ dostajemy

$$
\begin{aligned}
u(x) = &\iint_\Omega E(x-y)\Delta u(y)dy \\
&- \int_{\partial\Omega} E(x-y)\frac{\partial u}{\partial \eta}(y)dS(y) + \int_{\partial\Omega} u(y)\frac{\partial E(x-y)}{\partial \eta}dS(y).
\end{aligned} \tag{10}
$$

W wymiarze $n = 3$ powyższy wzór przybiera postać
(10′)

$$
\begin{aligned}
u(x) = &-\frac{1}{4\pi}\iint_\Omega \frac{f(y)}{|x-y|}dy && \text{(potencjał Newtonowski)} \\
&+ \frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega} \frac{1}{|x-y|}\frac{\partial u}{\partial \eta}(y)dS(y) && \text{(potencjał warstwy pojedyńczej)} \\
&- \frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega} u(y)\frac{\partial(|x-y|^{-1})}{\partial \eta}dS(y) && \text{(potencjał warstwy podwójnej).} \quad \diamond
\end{aligned}
$$

4.7. Funkcja Greena

Wzór (10) wyraża wartość rozwiązania u równania Poissona (7) poprzez wartości prawej strony tego równania oraz wartości u i $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ na brzegu zbioru Ω. Sugeruje to, że warunki brzegowe powinny zawierać wartości funkcji i pochodnej normalnej na brzegu Ω. Okazuje się jednak, że te dwie funkcje są zależne i wystarczy zadać jedną z nich. Fakt ten wynika z twierdzenia o jednoznaczności dla zagadnienia Dirichleta (9) (patrz wniosek z twierdzenia 3). W celu znalezienia formuły na rozwiązanie problemu Dirichleta (9) wygodnie jest wprowadzić pojęcie funkcji Greena obszaru Ω.

Definicja. *Funkcją Greena* obszaru Ω nazywamy funkcję $G(x, y), x, y \in \overline{\Omega}$ taką, że

1° $G(x, y) = E(x - y) + \varphi(x, y)$, gdzie E jest rozwiązaniem podstawowym operatora Laplace'a, natomiast dla każdego $x \in \Omega$ funkcja $\varphi(x, \cdot)$ jest harmoniczna w Ω o ciągła w $\overline{\Omega}$ oraz dla każdego $y \in \Omega$ funkcja $\varphi(\cdot, y))$ jest harmoniczna w Ω o ciągła w $\overline{\Omega}$;

2° Jeśli $x \in \partial\Omega$ lub $y \in \partial\Omega$, to $G(x, y) = 0$ oraz jeśli Ω jest nieograniczony, to $G(x, y) \to 0$ gdy $|x| \to \infty$ lub $|y| \to \infty$.

Zauważmy, że jeśli znana jest funkcja Greena obszaru Ω, to dla rozwiązania u problemu Dirichleta (9) zachodzi

$$
u(x) = \iint_\Omega G(x, y)f(y)dy + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \eta}g(y)dS(y) \tag{11}
$$

Istotnie, ponieważ $\Delta_y \varphi(x,y) = 0$ w Ω i $\varphi(x,y) = -E(x-y)$ dla $y \in \partial\Omega$ więc ze wzoru Greena mamy

$$\begin{aligned}
\iint_\Omega \varphi(x,y)\Delta u(y)dy &= \int_{\partial\Omega} \Big(\varphi(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial \eta} - u(y)\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial \eta}\Big)dS(y) \\
&= \int_{\partial\Omega} \Big(u(y)\frac{\partial E(x-y)}{\partial \eta} - E(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial \eta}\Big)dS(y) \\
&\overset{(10)}{=} u(x) - \iint_\Omega E(x-y)\Delta_y u(y)dy
\end{aligned}$$

Stad wynika (11) gdyż $G(x,y) = E(x-y) + \varphi(x,y)$ oraz $\Delta u = f$. $\diamond$

4.8. Funkcja Greena kuli jednostkowej

Znalezienie funkcji Greena jest na ogół skomplikowanym zadaniem. Faktycznie funkcję tą można explicite znaleźć tylko dla obszarów o prostej geometrii. Przykład takiej konstrukcji podamy w przypadku gdy Ω jest kulą jednostkową w $\mathbb{R}^n$.

Twierdzenie 7. *Funkcją Greena kuli jednostkowej $B = B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ jest*

$$G(x,y) = E(x-y) - E\big(|x|y - \frac{x}{|x|}\big). \tag{12}$$

Dowód. Dla $x \neq 0$ oznaczmy przez x^* punkt symetryczny do x względem sfery jednostkowej (odwzorowanie $x \mapsto x^*$ nazywane jest także inwersją względem sfery) tzn.

$$x^* = \frac{x}{|x|^2}.$$

Wówczas

$$|x||y - x^*| = \big||x|y - \frac{x}{|x|}\big| = \sqrt{|x|^2|y|^2 - 2xy + 1} = \big||y|x - \frac{y}{|y|}\big| = |y||x - y^*|.$$

Zatem przy ustalonym $x \in B$ (odpowiednio $y \in B$) funkcja $\varphi(x,y) = -E\big(|x|y - \frac{x}{|x|}\big)$ jest harmoniczna względem y (odpowiednio względem x). Jeśli $|y| = 1$, to

$$\big||x|y - \frac{x}{|x|}\big| = \sqrt{|x|^2 - 2xy + 1} = |x - y|.$$

Zatem $G(x,y) = 0$ dla $y \in S$. Analogicznie $G(x,y) = 0$ dla $x \in S$. $\diamond$

4.9. Wzór Poissona

Znając funkcję Greena kuli jednostkowej możemy wyprowadzić wzór Poissona wyrażający wartości funkcji u harmonicznej w kuli B poprzez jej wartości na sferze $S = \partial B$.

Twierdzenie 8 (Wzór Poissona). *Jeśli $u \in C^2(B) \cap C^1(\overline{B})$ jest funkcją harmoniczną w B, to*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{S^{n-1}} \frac{1 - |x|^2}{|x-y|^n} u(y) dS(y). \tag{13}$$

Dowód. Wykażemy wzór (13) w przypadku $n \geq 3$ pozostawiając przypadek $n = 2$ jako ćwiczenie. Wobec (11) wystarczy wykazać, że

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial \eta(y)} = \frac{1 - |x|^2}{\omega_n |x-y|^n}.$$

Otóż mamy

$$\begin{aligned}
\omega_n \frac{\partial E(x-y)}{\partial \eta(y)} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \Big(\frac{-1}{n-2} \, \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \Big) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{-1}{n-2} \, \frac{\partial}{\partial y_i} \Big(\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^2 \Big)^{(2-n)/2} \cdot \cos(\eta, y_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{-1}{n-2} \cdot \frac{2-n}{2} \cdot \Big(\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^2 \Big)^{-n/2} \cdot 2(x_i - y_i) \cdot (-y_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2 - x_i y_i}{|x-y|^n}.
\end{aligned}$$

Następnie

$$\begin{aligned}
\omega_n \frac{\partial E(|x|y - x/|x|)}{\partial \eta(y)} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \Big(\frac{1}{n-2} \, \frac{-1}{\big||x|y - x/|x|\big|^{n-2}} \Big) \\
&= \frac{-1}{|x|^{n-2}} \frac{\partial}{\partial \eta} \Big(\frac{1}{n-2} \, \frac{1}{|y - x^*|^{n-2}} \Big) \\
&= \frac{1}{|x|^{n-2}} \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2 - x_i^* y_i}{|y - x^*|^n}.
\end{aligned}$$

Zatem

$$\omega_n \frac{\partial G(x,y)}{\partial \eta(y)} = \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2 - x_i y_i}{|x-y|^n} - \frac{1}{|x|^{n-2}} \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2 - x_i^* y_i}{|y - x^*|^n}.$$

Zauważmy, że

$$\frac{1}{|x|^{n-2}} \frac{y_i^2 - x_i^* y_i}{|y - x^*|^n} = \frac{|x|^2}{|x|^n} \frac{y_i^2 - x_i y_i/|x|^2}{|y - x/|x|^2|^n}$$
$$= \frac{y_i^2|x|^2 - x_i y_i}{\big||x|y - x/|x|\big|^n} = \frac{y_i^2|x|^2 - x_i y_i}{\big||y|x - y/|y|\big|^n}$$
$$= \frac{y_i^2|x|^2 - x_i y_i}{\big|x - y\big|^n}.$$

Stąd ponieważ $\sum_{i=1}^n y_i^2 = 1$ dostajemy

$$\omega_n \frac{\partial G(x,y)}{\partial \eta(y)} = \frac{1}{|x-y|^n} \sum_{i=1}^n \left[(y_i^2 - x_i y_i) - (y_i^2|x|^2 - x_i y_i)\right]$$
$$= \frac{1 - |x|^2}{|x-y|^n}. \qquad \diamond$$

Jak się łatwo domyśleć wzór Poissona stanowi rozwiązanie problemu Dirichleta dla kuli.

Twierdzenie 9. *Jeśli $g \in C^0(S^{n-1})$, to wzór Poissona (13) określa funkcję u harmoniczną w B i taką, że*

$$\lim_{B \ni x \to x_0} u(x) = g(x_0) \quad \text{dla} \quad x_0 \in S^{n-1}. \tag{14}$$

Dowód.
1°. Po pierwsze funkcja u jest harmoniczna w B gdyż

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial \eta(y)} = \frac{1 - |x|^2}{\omega_n |x-y|^n}.$$

oraz funkcja $G(x,y)$ jest harmoniczna względem x dla każdego ustalonego $y \in B$.
2°. W celu wykazania warunku ciągłości ustalmy $x_0 \in S$. Zauważmy, że biorąc w twierdzeniu 8 funkcję $u = 1$ dostajemy

$$1 = \frac{1 - |x|^2}{\omega_n} \int_{S^{n-1}} \frac{1}{|x-y|^n} u(y) dS(y). \tag{15}$$

Mnożąc obie strony (15) przez $g(x_0)$ i odejmując od (13) dostajemy

$$u(x) - g(x_0) = \frac{1 - |x|^2}{\omega_n} \int_{S^{n-1}} \frac{g(y) - g(x_0)}{|x-y|^n} u(y) dS(y). \tag{16}$$

Dla $\alpha > 0$ oznaczmy przez σ kołowe otoczenie punktu x_0 na sferze S definiujące w kuli B stożek o rozwartości 4α. Wobec ciągłości g w punkcie x_0 dla każdego ustalonego $\varepsilon > 0$ możemy znaleźć $\alpha > 0$ takie, że

$$|g(y) - g(x_0)| < \varepsilon/2 \quad \text{dla} \quad y \in \sigma.$$

Wówczas wobec (15)

$$\Big|\frac{1-|x|^2}{\omega_n}\int_\sigma \frac{g(y)-g(x_0)}{|x-y|^n}u(y)dS(y)\Big| \le \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1-|x|^2}{\omega_n}\int_{S^{n-1}}\frac{1}{|x-y|^n}dS(y) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Niech teraz x należy do stożka $\Gamma(2\alpha)$ o rozwartości 2α symetrycznego względem promienia Ox_0. Wówczas dla $y \in S^{n-1} \setminus \sigma$ zachodzi

$$|y - x| \ge |x|^2 + 1 - 2|x|\cos\alpha.$$

Oznaczmy

$$M = \sup_{y \in S^{n-1}} |g(y)|, \qquad r_0 = \inf\{|y - x| : y \in S^{n-1} \setminus \sigma, x \in \Gamma(2\alpha)\} > 0.$$

Wówczas

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{1-|x|^2}{\omega_n}\int_{S^{n-1}\setminus\sigma}\frac{g(y)-g(x_0)}{|x-y|^n}u(y)dS(y)\Big| \\
&\le \frac{1-|x|^2}{\omega_n}\int_{S^{n-1}}\frac{2M}{r_0^n}dS(y) \\
&= (1-|x|^2)\frac{2M}{r_0^n} \le \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{jeśli} \;\; 1-|x|^2 < \frac{\varepsilon r_0^n}{4M}.
\end{aligned}$$

Zatem $|u(x) - g(x_0)| < \varepsilon$ dla x z otoczenia punktu x_0 w kuli B^n co kończy dowód (14). $\diamond$

Wniosek. Rozwiązanie zagadnienia Dirichleta dla kuli o promieniu R

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{w} \;\; B(0,R), \\ u = g & \text{na} \;\; \partial B(0,R). \end{cases}$$

redukuje się do zagadnienia dla kuli jednostkowej poprzez zamianę $\widetilde{u}(x) = u(Rx)$, $\widetilde{g}(x) = g(x)$ i wyraża się wzorem

$$(13') \qquad u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R}\int_{\partial B(0,R)}\frac{g(y)}{|x-y|^n}dS(y). \qquad \diamond$$

5. Równanie przewodnictwa cieplnego

Równanie przewodnictwa cieplnego (w skrócie: równanie ciepła) ma postać

$$u_t - \Delta u = 0. \tag{1}$$

Rozważa się też równanie niejednorodne

$$u_t - \Delta u = f$$

gdzie $f = f(t,x)$ jest zadaną funkcją.

5.1. Interpretacja fizyczna

Równanie przewodnictwa cieplnego zwane jest także jako równanie dyfuzji. W typowej sytuacji opisuje ono jak zmienia się gęstość pewnej wielkości (np. stężenie chemiczne, temperatura). W celu wyprowadzenia tego równania rozważmy podobszar V obszaru Ω o gładkim brzegu ∂V. Niech F oznacza gęstość strumienia przepływu w obszarze Ω. Wówczas tempo w jakim zmienia się ilość substancji wypełniającej V jest równe całkowitemu przepływowi tej substancji przez brzeg ∂V:

$$\frac{d}{dt}\int_V u(t,x)dx = -\int_{\partial V} F \cdot \eta dS = -\int_V \operatorname{div} F dx,$$

gdzie η jest wektorem normalnym zewnętrznym do ∂V, a dS oznacza miarę na powierzchni ∂V (druga równość wynika z prawa Gaussa-Ostrogradzkiego). Wobec dowolności obszaru $V \subset \Omega$ dostajemy stąd

$$u_t = -\operatorname{div} F = 0.$$

Jeśli strumień przepływu F jest proporcjonalny do gradientu gęstości ∇u tzn. $F = -a \cdot \nabla u$, to dostajemy równanie

$$u_t = a \operatorname{div}(\nabla u) = a\Delta u$$

W przypadku równania niejednorodnego funkcja $f(t,x)$ opisuje wydajność źródeł danej substancji w obszarze Ω.

5.2. Rozwiązanie podstawowe

Podobnie jak w przypadku równania Laplace'a znajdziemy najpierw pewne szczególne rozwiązania równania ciepła, które posłużą nam do konstrukcji rozwiązań równania niejednorodnego. Ponieważ równanie ciepła ma bardziej skomplikowaną strukturę od równania Laplace'a nasze poszukiwania tych rozwiązań szczególnych będzie bardziej pracochłonne. Zaczniemy od poszukiwania rozwiązań w postaci tzw. funkcji samopodobnej tzn.

$$u(t,x) = \frac{1}{t^\alpha} v\Big(\frac{x}{t^\beta}\Big), \tag{2}$$

gdzie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, natomiast $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Wstawiając (2) do (1) dostajemy

$$\alpha t^{-\alpha-1} v(y) + \beta t^{-\alpha-1} y \cdot \nabla v(y) + t^{-\alpha-2\beta} \Delta v(y) = 0,$$

gdzie $y = t^{-\beta} x$. Zauważmy, że jeśli przyjmiemy $\beta = 1/2$ to w każdym składniku zmienna t wystąpi w potędze $-\alpha - 1$ i nasze równanie ulegnie uproszczeniu

$$\alpha v(y) + \frac{1}{2} y \cdot \nabla v(y) + \Delta v(y) = 0.$$

Następne uproszczenie otrzymamy przyjmując, że funkcja v zależy tylko od promienia tzn. $v(y) = w(r)$, gdzie $r = |y|$, dla pewnej funkcji $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wówczas korzystając z postaci operatora Laplace'a dla funkcji sferycznie symetrycznej (patrz wzór (4.3)) dostajemy

$$\alpha w(r) + \frac{1}{2} r \cdot w'(r) + w''(r) + \frac{n-1}{r} w'(r) = 0.$$

Pozostaje nam jeszcze dobór parametru α. Otóż okazuje się, że jeśli przyjmiemy $\alpha = n/2$, to otrzymane równanie

$$\frac{n}{2} w(r) + \frac{1}{2} r \cdot w'(r) + w''(r) + \frac{n-1}{r} w'(r) = 0.$$

będziemy mogli rozwiązać. Mianowicie mnożąc je przez r^{n-1} dostajemy

$$\Big[r^{n-1} w'(r) + \frac{1}{2} r^n w(r) \Big]' = 0.$$

Stąd

$$r^{n-1} w'(r) + \frac{1}{2} r^n w(r) = C_1.$$

Zakładając, że $\lim_{r\to\infty} r^n w(r) = \lim_{r\to\infty} r^{n-1} w'(r) = 0$ dostajemy $C_1 = 0$. Stąd po podzieleniu przez r^{n-1}

$$w'(r) = -\frac{1}{2} r w(r).$$

Zatem

$$w(r) = C_2 \exp\Big\{ -\frac{r^2}{4} \Big\}.$$

Wobec (2), pamiętając o przyjętych założeniach $v(y) = w(|y|), y = t^{-\beta}x, \alpha = n/2, \beta = 1/2$ wnioskujemy, że funkcja

$$\frac{C}{t^{n/2}} \exp\big\{ - \frac{|x|^2}{4t}\big\}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n$$

jest rozwiązaniem równania ciepła. $\diamond$

Definicja. *Rozwiązaniem podstawowym* operatora przewodnictwa cieplnego nazywamy funkcję

$$E(t,x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\big\{ - \dfrac{|x|^2}{4t}\big\} & \text{dla } t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ 0 & \text{dla } t \leq 0, x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{3}$$

Funkcja $E(t,x)$ jest funkcją gładką względem obu zmiennych, ma ona osobliwość w zerze względem zmiennej t ale jedynie w sensie braku analityczności. Przyczynę doboru czynnika normalizującego $(4\pi)^{-n/2}$ wyjaśnia poniższy lemat.

Lemat. *Dla każdego $t > 0$ zachodzi*

$$\int_{\mathbb{R}^n} E(t,x)dx = 1.$$

Dowód. Dokonując zamiany zmiennych $x = \sqrt{4t} \cdot u$, $dx = (4t)^{n/2}du$ dostajemy

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} E(t,x)dx &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\big\{ - \frac{|x|^2}{4t}\big\}dx \\ &= \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\big\{ - u^2\big\}du \\ &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} \exp\big\{ - u_i^2\big\}du_i = 1 \end{aligned}$$

gdyż $\int_{\mathbb{R}} \exp\{-s^2\}ds = \sqrt{\pi}$. $\diamond$

5.3. Zagadnienie początkowe

Zajmiemy się teraz rozwiązaniem zagadnienia początkowego

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{dla} \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = g(x) & \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{4}$$

gdzie g jest zadaną funkcją. Zauważmy, że dla każdego $y \in \mathbb{R}^n$ funkcja $(t,x) \mapsto E(t,x-y)$ jest rozwiązaniem równania ciepła. Zatem splot

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \int_{\mathbb{R}^n} E(t,x-y)g(y)dy \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\big\{-\frac{|x-y|^2}{4t}\big\}g(y)dy \end{aligned} \tag{5}$$

też powinien być rozwiązaniem równania ciepła w obszarze $t > 0, x \in \mathbb{R}^n$. Tak w istocie jest. Mianowicie zachodzi

Twierdzenie 1. *Jeśli $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, to funkcja $u(t,x)$ określona wzorem (5) spełnia warunki*

(*i*) $$u \in C^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n);$$

(*ii*) $$u_t - \Delta u = 0 \quad w \quad \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n;$$

(*iii*) $$\lim_{\substack{(t,x)\to(t,x_0)\\ t>0}} u(t,x) = g(x_0) \quad dla \quad każdego \quad x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Dowód. 1. Dla dowolnego $0 < \delta < 1$ funkcja $t^{-n/2}\exp\{-|x|^2/(4t)\}$ jest klasy C^∞ na zbiorze $[\delta, 1/\delta] \times \mathbb{R}^n$ i jej pochodne cząstkowe ustalonego rzędu są ograniczone na tym zbiorze przez funkcję całkowalną zmiennej x. Zatem $u \in C^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$ i można wchodzić z różniczkowaniem pod znak całki

$$u_t(t,x) - \Delta_x u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} \big(\partial_t E(t,x-y) - \Delta_x E(t,x-y)\big)g(y)dy = 0,$$

gdyż $E(t,x)$ spełnia równanie ciepła.

2. Wykażemy teraz warunek ciągłości (*iii*). W tym celu ustalmy $x_0 \in \mathbb{R}^n$ oraz $\varepsilon > 0$. Dobierzmy $\delta > 0$ tak, aby $|g(y) - g(x_0)| < \varepsilon$ dla $|y - x_0| < \delta$. Jeśli $|x - x_0| < \delta/2$, to z Lematu 1 dostajemy

$$\begin{aligned} |u(t,x) - g(x_0)| &= \Big|\int_{\mathbb{R}^n} E(t,x-y)[g(y)-g(x_0)]dy\Big| \\ &\le \int_{B(x_0,\delta)} + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x_0,\delta)} E(t,x-y)\big|g(y)-g(x_0)\big|dy \\ &= I + J. \end{aligned}$$

Na mocy Lematu 1 i oszacowania $|g(y) - g(x_0)| < \varepsilon$ mamy

$$I \le \varepsilon \int_{B(x_0,\delta)} E(t,x-y)dy \le \varepsilon.$$

W celu oszacowania całki J zauważmy, że jeśli $|x - x_0| \le \delta/2$ i $|y - x_0| \ge \delta$, to

$$|y - x_0| \le |y - x| + |x - x_0| \le |y - x| + \delta/2 \le |y - x| + \frac{1}{2}|y - x_0|.$$

Zatem $|y-x| \geq \frac{1}{2}|y-x_0|$. Stąd dostajemy

$$\begin{aligned}
J &\leq 2 \cdot \|g\|_{L^\infty} \cdot \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x_0,\delta)} E(t, x-y)dy \\
&\leq \frac{C}{t^{n/2}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x_0,\delta)} \exp\{-\frac{|x-y|^2}{4t}\}dy \\
&\leq \frac{C}{t^{n/2}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x_0,\delta)} \exp\{-\frac{|y-x_0|^2}{16t}\}dy \\
&\overset{|y-x_0|=r}{=} \frac{C}{t^{n/2}} \cdot \int_\delta^\infty \exp\{-\frac{r^2}{16t}\} r^{n-1}dr \\
&\overset{r=4\sqrt{t}s}{=} 4^n C \int_{\delta/4\sqrt{t}}^\infty e^{-s^2} s^{n-1} ds \to 0 \quad \text{gdy} \;\; t \to 0.
\end{aligned}$$

Czyli $J < \varepsilon$ dla $|x-x_0| \leq \delta$ i t dostatecznie małego oraz $|u(t,x)-g(x_0)| \leq 2\varepsilon$ dla $|x-x_0| \leq \delta$ i t dostatecznie małego co jest równoważne z warunkiem ciągłości (iii). $\diamond$

Uwagi.

1. Jeśli $g \geq 0, g \not\equiv 0$, to $u(t,x) > 0$ dla każdego $t > 0, x \in \mathbb{R}^n$. Innymi słowami, jeśli w chwili $t = 0$ mamy punktowe dodatnie zaburzenie, to natychmiast rozchodzi się ono na całą przestrzeń.

2. Funkcja $u(t,x)$ jest gładka dla $t > 0$ tzn. $u \in C^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$ nawet jeśli g jest tylko funkcją ciągłą ograniczoną.

5.4. Zagadnienie niejednorodne

Zajmiemy się teraz rozwiązaniem zagadnienia niejednorodnego

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{na} \quad \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = 0 & \text{na} \quad \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{6}$$

gdzie $f = f(t,x)$ jest funkcją na $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$. Aby uzyskać rozwiązanie zauważmy, że dla ustalonych $y \in \mathbb{R}^n, 0 < s < t$ funkcja

$$(t,x) \mapsto E(t-s, x-y)$$

jest rozwiązaniem równania ciepła (1). Zatem dla ustalonego $0 < s < t$ funkcja

$$u_s(t,x) = u(s;t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} E(t-s, x-y) f(s,y) dy$$

jest rozwiązaniem zagadnienia

$$\begin{cases} u_t(s;\cdot,\cdot) - \Delta u(s;\cdot,\cdot) = 0 & \text{na} \quad \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n, \\ u(s;s,\cdot) = f(s,\cdot) & \text{na} \quad \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{6_s}$$

tzn. zagadnienia jednorodnego, w którym czas liczy się od chwili $t = s$. W celu znalezienia rozwiązania zagadnienia (6) stosujemy tzw. *zasadę Duhamela.* Powiada ona, że rozwiązanie równania (6) otrzymuje się całkując rodzinę rozwiązań równań (6_s) względem parametru s. Zatem rozwiązaniem zagadnienia (6) jest funkcja

$$
\begin{aligned}
u(t,x) &= \int_0^t u(s;t,x)ds = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} E(t-s,x-y)f(s,y)dyds \\
&= \int_0^t \frac{1}{\big(4\pi(t-s)\big)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\Big\{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}\Big\} f(s,y)dyds. \qquad \diamond
\end{aligned} \tag{7}
$$

Wówczas zachodzi

Twierdzenie 2. *Jeśli* $f \in C_0^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}^+ \times \mathbb{R}^n)$, *to funkcja* u *zdefiniowana wzorem (7) spełnia warunki*

(*i*) $$u \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n);$$

(*ii*) $$u_t - \Delta u = f \quad w \quad \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n;$$

(*iii*) $$\lim_{\substack{(t,x)\to(t,x_0)\\ t>0}} u(t,x) = g(x_0) \quad dla \quad każdego \quad x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Dowód powyższego twierdzenia przebiega podobnie do dowodu Twierdzenia 1.

Z Twierdzeń 1 i 2 dostajemy

Wniosek. *Jeśli* $f \in C_0^{1,2}(\overline{\mathbb{R}}^+ \times \mathbb{R}^n)$, $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, *to rozwiązaniem zagadnienia*

$$
\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{dla} \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = g(x) & \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{8}
$$

jest funkcja

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} E(t,x-y)g(y)dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} E(t-s,x-y)f(s,y)dyds.$$

Na zakończenie podamy bez dowodu twierdzenie o jednoznaczności.

Twierdzenie 3. *Niech* $f \in C\big(\overline{\mathbb{R}}^+ \times \mathbb{R}^n)$, $g \in C(\mathbb{R}^n)$. *Wówczas zagadnienie początkowe (8) ma co najwyżej jedno rozwiązanie*

$$u \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n) \cap C(\overline{\mathbb{R}}^+ \times \mathbb{R}^n)$$

spełniające warunek wzrostu

$$|u(t,x)| \leq A \exp\{a|x|^2\} \quad dla \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n$$

i pewnych stałych $A, a < \infty$.

Uwaga. Okazuje się, że zagadnienie (8) może mieć nieskończenie wiele rozwiązań nie spełniających powyższego warunku wzrostu. Są to tzw. rozwiązania niefizyczne.

6. Równanie falowe

Równanie falowe ma postać równania jednorodnego

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \tag{1}$$

lub niejednorodnego

$$u_{tt} - \Delta u = f$$

gdzie $f = f(t, x)$ jest zadaną funkcją. Okazuje się, że rozwiązania równania falowego zachowują się inaczej niż rozwiązania równania Laplace'a i równania przewodnictwa cieplnego; rozwiązania te nie muszą być klasy C^∞, występuje skończona prędkość rozchodzenia się zaburzeń.

6.1. Interpretacja fizyczna

Równanie falowe stanowi uproszczony model drgań struny (dla $n = 1$), membrany (dla $n = 2$) lub bryły (dla $n = 3$). W celu jego wyprowadzenia oznaczmy przez $u(t, x)$ wychylenie punktu x w chwili t od położenia równowagi. Niech V będzie dowolnym podobszarem w Ω. Wówczas sumaryczne przyspieszenie zbioru V wynosi

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_V u(t, x) dx = \int_V u_{tt}(t, x) dx,$$

a siła działająca na V wynosi

$$- \int_{\partial V} F \cdot \eta dS.$$

Z drugiej zasady dynamiki wynika, że przyspieszenie jest proporcjonalne do siły. Zatem na podstawie wzoru Stokesa mamy

$$m \int_V u_{tt}(t, x) dx = - \int_{\partial V} F \cdot \eta dS = - \int_V \operatorname{div} F(x) dx.$$

Wobec dowolności obszaru $V \subset \Omega$ dostajemy $m u_{tt} = -\operatorname{div} F$. Stąd jeśli siła jest proporcjonalna do gradientu odkształcenia $F = -a \nabla u$ dostajemy równanie

$$m u_{tt} = a \Delta u.$$

Powyższa interpretacja fizyczna równania falowego sugeruje potrzebę zadania dwóch warunków początkowych, mianowicie początkowego odkształcenia $u(0,x)$ oraz prędkości początkowej $u_t(0,x)$.

6.2. Zagadnienie początkowe dla równania struny. Wzór d'Alamberta

Badanie równania falowego zaczniemy od przypadku jednowymiarowego czyli od tzw. równania struny. Skoncentrujemy się na równaniu struny nieograniczonej pozostawiając na ćwiczenia badanie struny ograniczonej. Naszym celem jest rozwiązanie zagadnienia

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{dla} \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = g(x) & \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}, \\ u_t(0,x) = h(x) & \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2}$$

gdzie g i h są zadanymi funkcjami. Jak wiemy z teorii równań różniczkowych rzędu 2 dwóch zmiennych niezależnych rozwiązanie ogólne równania $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ wyraża się wzorem

$$u(t,x) = F(x+ct) + G(x-ct)$$

gdzie F i G są funkcjami klasy $C^2(\mathbb{R})$. Korzystając z warunków początkowych dostajemy układ równań

$$\begin{cases} u(0,x) & = F(x) + G(x) = g(x), \\ u'_t(0,t) & = cF'(x) - cG'(x) = h(x). \end{cases}$$

Całkując drugie równanie mamy

$$F(x) - G(x) = \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x} h(\tau)d\tau + F(x_0) - G(x_0).$$

Zatem rozwiązaniem powyższego układu równań jest para funkcji

$$F(x) = \frac{g(x)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} h(\tau)d\tau + \frac{F(x_0) - G(x_0)}{2},$$
$$G(x) = \frac{g(x)}{2} - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} h(\tau)d\tau - \frac{F(x_0) - G(x_0)}{2},$$

Stąd rozwiązanie problemu (2) wyraża się wzorem d'Alamberta:

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\big(g(x+ct) + g(x-ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(\tau)d\tau. \tag{3}$$

Możemy zatem sformułować

Twierdzenie 1. *Jeśli $g \in C^2(\mathbb{R}), h \in C^1(\mathbb{R})$, to rozwiązanie zagadnienia (2) wyraża się wzorem d'Alamberta (3). Ponadto,*

$$\lim_{(t,x)\to(0,x_0)} u(t,x) = g(x_0), \qquad \lim_{(t,x)\to(0,x_0)} u'(t,x) = h(x_0). \qquad \diamond$$

6.3. Wymuszone drgania struny

Zajmiemy się teraz zagadnieniem niejednorodnym opisującym drgania struny przy działaniu siły zewnętrznej:

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(t,x) & \text{dla} \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = g(x) & \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}, \\ u_t(0,x) = h(x) & \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

W celu rozwiązania tego zagadnienia zauważmy, że jego rozwiązanie jest sumą

$$u(t,x) = u_1(t,x) + u_2(t,x)$$

gdzie u_1 spełnia (2), natomiast u_2 spełnia

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(t,x) & \text{dla} \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = 0 & \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}, \\ u_t(0,x) = 0 & \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Zatem wystarczy rozwiązać zagadnienie (5). W tym celu wybierzmy punkt $P = (t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ i przeprowadźmy przez niego proste charakterystyczne

$$l_1: \quad x - ct = x_0 - ct_0, \quad \text{oraz} \quad l_2: \quad x + ct = x_0 + t_0,$$

które przecinają oś $\{t = 0\}$ w punktach $A = (0, x_0 - ct_0)$ i $B = (0, x_0 + ct_0)$. Oznaczmy przez Ω trójkąt ABP i zcałkujmy po Ω lewą stronę równania (5)

$$\begin{aligned}
&\iint_\Omega \Big(\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\Big) dtdx \\
&\iint_\Omega \Big\{\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\Big) - \frac{\partial}{\partial x}\Big(c^2 \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\Big)\Big\} dtdx \\
&\overset{\text{tw.Greena}}{=} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} dx + c^2 \frac{\partial u(t,x)}{\partial x} dt \\
&\overset{u_{|AB}=0}{=} \int_{BP} + \int_{PA} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} dx + c^2 \frac{\partial u(t,x)}{\partial x} dt \\
&\overset{\substack{dx=-cdt \text{ na } BP \\ dx=cdt \text{ na } PA}}{=} -c \int_{BP} \Big(\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} dt + \frac{\partial u(t,x)}{\partial x} dx\Big) \\
&\qquad + c \int_{PA} \Big(\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} dt + \frac{\partial u(t,x)}{\partial x} dx\Big) \\
&= -c\big(u(P) - u(B)\big) + c\big(u(A) - u(B)\big) \\
&\overset{u(A)=u(B)=0}{=} -2cu(P).
\end{aligned}$$

Zatem

$$u(P) = \frac{-1}{2c} \iint_\Omega f(t,x)dtdx.$$

Ponieważ $\Omega = \{0 \le t \le t_0, x_0 - c(t_0 - t) \le x \le x_0 + c(t_0 - t)\}$ więc

$$u_2(t_0, x_0) = \frac{-1}{2c} \int_0^{t_0} \int_{x_0 - c(t_0 - t)}^{x_0 + c(t_0 - t)} f(t,x)dtdx.$$

Ostatecznie rozwiązanie zagadnienia (4) jest dane wzorem pochodzącym od d'Alamberta

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{g(A) + g(B)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{AB} h(\xi)d\xi - \frac{1}{2c} \iint_\Omega f(\tau,\xi)d\tau d\xi \\ &= \frac{g(x-ct) + g(x+ct)}{2} \\ &+ \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(\xi)d\xi - \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(\tau,\xi)d\xi d\tau. \end{aligned} \tag{6}$$

Widzimy, że wartość rozwiązania w punkcie P zależy od danych początkowych na odcinku $[A,B]$ i od funkcji f w obszarze Ω. $\diamond$

6.4. Równanie falowe na półprostej

Problem początkowo-brzegowy dla struny zaczepionej w jednym punkcie ma postać

$$\begin{cases} u''_{tt} - u''_{xx} = 0 & \text{dla} \quad t \ge 0, x > 0, \\ u(0,x) = g(x) & \text{dla} \quad x > 0, \\ u'_t(0,x) = h(x) & \text{dla} \quad x > 0, \\ u(t,0) = 0 & \text{dla} \quad t > 0, \end{cases} \tag{7}$$

przy czym $g(0) = h(0) = 0$. W celu rozwiązania tego problemu przedłużmy funkcje u, g, h do funkcji nieparzystych zmiennej x na $\mathbb{R}$ tzn. połóżmy

$$\widetilde{u}(t,x) = \begin{cases} u(t,x) & \text{dla} \ \ t \ge 0, \quad x \ge 0, \\ -u(t,-x) & \text{dla} \ \ t \ge 0, \quad x < 0, \end{cases}$$

$$\widetilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{dla} \ \ x \ge 0, \\ -g(-x) & \text{dla} \ \ x < 0, \end{cases}$$

$$\widetilde{h}(x) = \begin{cases} h(x) & \text{dla} \ \ x \ge 0, \\ -h(-x) & \text{dla} \ \ x < 0. \end{cases}$$

Wówczas wobec (7) funkcja $\widetilde{u}$ spełnia

$$\begin{cases} \widetilde{u}_{tt} - \widetilde{u}_{xx} = 0 & \text{dla} \quad t \ge 0, x \in \mathbb{R}, \\ \widetilde{u}(0,x) = \widetilde{g}(x) & \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}, \\ \widetilde{u}_t(0,x) = \widetilde{h}(x) & \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

oraz ze wzoru d'Alamberta

$$\widetilde{u}(t,x) = \frac{\widetilde{g}(x-t) + \widetilde{g}(x+t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \widetilde{h}(\xi)d\xi.$$

Zatem

$$(8) \qquad u(t,x) = \begin{cases} \frac{g(x+t)+g(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(\xi)d\xi & \text{dla } x \geq t \geq 0, \\ \frac{g(x+t)-g(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{-x+t}^{x+t} h(\xi)d\xi & \text{dla } 0 \leq x \leq t. \end{cases} \qquad \diamond$$

Wzór ten można zinterpretować następująco: początkowe zaburzenie w punkcie $x_0 > 0$ propaguje się początkowo zarówno w prawo jak i lewo, następnie zaburzenie propagujące się w lewo po dojściu do punktu zaczepienia struny odbija się i propaguje się w prawo.

6.5. Średnie sferyczne

Przed przystąpieniem do szukania rozwiązań zagadnienia początkowego dla równania falowego w wymiarze $n \geq 2$

$$(9) \qquad \begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{dla} \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = g(x) & \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u_t(0,x) = h(x) & \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

zbadamy najpierw średnie rozwiązania u na sferach w $\mathbb{R}^n$ o promieniach $r > 0$. Okazuje się, że takie średnie jako funkcja czasu t i promienia r spełniają równanie Eulera-Poissona-Darboux, które dla n nieparzystych daje się przekształcić do jednowymiarowego równania struny zaczepionej w jednym punkcie.

Dla $t > 0, r > 0$ oraz $x \in \mathbb{R}^n$ niech

$$U(t,r;x) = \fint_{S(x,r)} u(t,y)dS(y) = \frac{1}{|S(x,r)|}\int_{S(x,r)} u(t,y)dS(y)$$

będzie wartością średnią rozwiązania równania (9) na sferze $S(x,r)$ w chwili t. Podobnie połóżmy

$$G(r;x) = \fint_{S(x,r)} g(y)dS(y),$$
$$H(r;x) = \fint_{S(x,r)} h(y)dS(y).$$

Lemat 1 (Eulera-Poissona-Darboux). *Ustalmy $x \in \mathbb{R}^n$. Jeśli funkcja $u \in C^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ spełnia (9), to $U \in C^2(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+)$ spełnia*

$$\begin{cases} U''_{tt} - U''_{rr} - \frac{n-1}{r} U = 0 & \text{dla} \quad t \geq 0, r > 0, \\ U(0,r) = G(r) & \text{dla} \quad r > 0, \\ U'_t(0,r) = H(r) & \text{dla} \quad r > 0. \end{cases} \tag{10}$$

Dowód.

1. Wykażemy najpierw, że $U \in C^2(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+)$. W tym celu zauważmy, że

$$\begin{aligned} U(t,r;x) &= \fint_{S(x,r)} u(t,y) dS(y) \\ &\overset{y=x+rz}{=} \fint_{S(0,1)} u(t, x+rz) dS(z). \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} U'_r(t,r;x) &= \fint_{S(0,1)} \nabla_y u(t, x+rz) \cdot z dS(z) \\ &= \fint_{S(x,r)} \nabla_y u(t,y) \cdot \frac{y-x}{r} dS(y) \\ &\overset{(y-x)/r=\eta}{=} \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{S(x,r)} \frac{\partial u}{\partial \eta}(t,y) dS(y) \\ &\overset{\text{tw.Greena}}{=} \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{B(x,r)} \Delta u(t,y) dy \\ &= \frac{r}{n} \fint_{B(x,r)} \Delta u(t,y) dy. \end{aligned}$$

Stąd

$$\lim_{r \to 0} U'_r(t,r;x) = 0.$$

Podobnie liczymy drugą pochodną względem r

$$U''_{rr}(t,r;x) = \frac{1}{n} \fint_{B(x,r)} \Delta u(t,y) dy + \frac{r}{n} \frac{\partial}{\partial r} \fint_{B(x,r)} \Delta u(t,y) dy.$$

Oznaczmy $w(y) = \Delta u(t,y)$. Wówczas

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \fint_{B(x,r)} w(y) dy &= \frac{\partial}{\partial r} \fint_{B(0,1)} w(x+rz) dz \\ &= \fint_{B(0,1)} \nabla w(x+rz) \cdot z dz \\ &= \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} \nabla w(y) \cdot \frac{y-x}{r} dy. \end{aligned}$$

Ponieważ $|B(x,r)| = \omega_n r^n/n$ dostajemy stąd na mocy wzoru Greena

$$
\begin{aligned}
\frac{r}{n}\frac{\partial}{\partial r} \fint_{B(x,r)} w(y)dy &= \frac{1}{\omega_n r^n}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} \nabla w(y)\cdot(y-x)dy \\
\Big(\nabla v = y-x\Big) \quad &\overset{\substack{\text{Tw.}\\ \text{Greena}}}{=} \frac{1}{\omega_n r^n}\Big(-\int\limits_{B(x,r)} w(y)\Delta v(y)dy \\
&\quad + \int\limits_{S(x,r)} w(y)\frac{\partial v}{\partial\eta}dS(y)\Big) \\
\Big(v(y) = \frac{1}{2}(y-x)^2\Big) \quad &= \frac{1}{\omega_n r^n}\Big(-\int_{B(x,r)} w(y)\cdot n dy \\
&\quad + \int_{S(x,r)} w(y)\cdot r dS(y)\Big) \\
\Big(\Delta v = n, \frac{\partial v}{\partial \eta} = \nabla v\cdot\eta = r\Big) \quad &= \fint_{S(x,r)} w(y)dS(y) - \fint_{B(x,r)} w(y)dy.
\end{aligned}
$$

Stąd

$$
U''_{rr}(t,r;x) = \fint_{S(x,r)} \Delta u(y)dS(y) + \Big(\frac{1}{n}-1\Big)\fint_{B(x,r)} \Delta u(y)dy
$$

oraz

$$
\lim_{r\to 0} U''_{rr} = \frac{1}{n}\Delta u.
$$

Zatem $U(t,r;x)$ jest funkcją klasy $C^2(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+)$.

2. Wykorzystamy teraz fakt, że u spełnia równanie falowe $u_{tt} = \Delta u$. Dostajemy stąd

$$
\begin{aligned}
U'_r(t,r) &= \frac{r}{n}\fint_{B(x,r)} \Delta u(t,y)dy \\
&= \frac{r}{n}\fint_{B(x,r)} u_{tt}(t,y)dy = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\int_{B(x,r)} u_{tt}(t,y)dy.
\end{aligned}
$$

Zatem

$$
r^{n-1}U'_r(t,r) = \frac{1}{\omega_n}\int_{B(x,r)} u_{tt}(t,y)dy.
$$

Następnie korzystając ze wzoru Greena

$$
\begin{aligned}
\Big(r^{n-1}U'_r(t,r)\Big)'_r &= (n-1)r^{n-2}\cdot\frac{r}{n}\fint_{B(x,r)} \Delta u dy \\
&\quad + r^{n-1}\Big(\fint_{S(x,r)} \Delta u dS(y) + (\frac{1}{n}-1)\fint_{B(x,r)} \Delta u dy\Big) \\
&= \frac{1}{\omega_n}\int_{S(x,r)} u_{tt}(t,y)dS(y) = r^{n-1}\cdot\fint_{S(x,r)} u_{tt}(t,y)dS(y) \\
&= r^{n-1}U_{tt}(t,r).
\end{aligned}
$$

Ponieważ

$$\left(r^{n-1}U'_r(t,r)\right)'_r = (n-1)r^{n-2}U'_r(t,r) + r^{n-1}U''_{rr}(t,r)$$

dostajemy stąd równanie (10). $\diamond$

6.6. Wzór Kirchoffa

Rozwiążemy teraz zagadnienie początkowe (9) w wymiarze $n = 3$. Z Lematu Eulera - Poissona - Darboux wiemy, że średnie sferyczne $U(r,t;x)$ spełniają zagadnienie (10) przy $n = 3$. Dla $t > 0, r > 0, x \in \mathbb{R}^n$ połóżmy

$$\widetilde{U}(t,r;x) = r \cdot U(t,r;x), \qquad \widetilde{G}(r;x) = r \cdot G(r;x), \qquad \widetilde{H}(r;x) = r \cdot H(r;x)$$

i zauważmy, że

$$\widetilde{U}''_{rr} = \left(r \cdot U\right)''_{rr} = 2U'_r + r \cdot U''_{rr}.$$

Zatem funkcja $\widetilde{U}$ spełnia zagadnienie

$$(11) \qquad \begin{cases} \widetilde{U}''_{tt} - \widetilde{U}''_{rr} = 0 & \text{dla} \quad t \geq 0, r > 0, \\ \widetilde{U}(0,r) = \widetilde{G}(r) & \text{dla} \quad r > 0, \\ \widetilde{U}'_t(0,r) = \widetilde{H}(r) & \text{dla} \quad r > 0, \\ \widetilde{U}(t,0) = 0 & \text{dla} \quad t > 0. \end{cases}$$

Jest to zagadnienie dla równania struny zaczepionej w jednym punkcie. Na podstawie wzoru (8) rozwiązanie tego zagadnienia dla $0 < r < t$ jest dane przez

$$\widetilde{U}(t,r;x) = \frac{1}{2}\left(\widetilde{G}(r+t) - \widetilde{G}(t-r)\right) + \frac{1}{2}\int_{t-r}^{t+r} \widetilde{H}(y)dy.$$

Ponieważ $u(t,x) = \lim_{r\to 0} U(t,r;x)$ więc

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \lim_{r\to 0} \frac{\widetilde{U}(t,r;x)}{r} \\ &= \lim_{r\to 0} \left[\frac{\widetilde{G}(t+r;x) - \widetilde{G}(t-r;x)}{2r} + \frac{1}{2r}\int_{t-r}^{t+r} \widetilde{H}(y;x)dy\right] \\ &= \widetilde{G}'_t(t;x) + \widetilde{H}(t;x) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\Big(t \cdot ⨍_{S^2(x,t)} g(y)dS(y)\Big) + t \cdot ⨍_{S^2(x,t)} h(y)dS(y) \\ &= ⨍_{S^2(x,t)} g(y)dS(y) + t \cdot ⨍_{S^2(x,t)} \nabla g(y) \cdot \frac{y-x}{t} dS(y) \\ &+ t \cdot ⨍_{S^2(x,t)} h(y)dS(y). \end{aligned}$$

Ostatecznie dostajemy wzór Kirchoffa na rozwiązanie zagadnienia początkowego (9) w wymiarze $n = 3$

$$(12) \qquad u(t,x) = \fint_{S^2(x,t)} \big(\nabla g(y)\cdot(y-x) + g(y) + th(y)\big) dS(y).$$

Warto zauważyć, że ze wzoru tego wynika, że wartość rozwiązania w punkcie (t,x) zależy tylko od danych początkowych na sferze $S^2(x,t)$. $\diamond$

6.7. Wzór Poissona

Dla $n = 2$ żadne proste podstawienie nie przekształca równania Eulera-Poissona-Darboux w 1-wymiarowe równanie struny. Dlatego, aby w tym przypadku rozwiązać zagadnienie początkowe (9) sztucznie zwiększa się wymiar przestrzeni. Mianowicie kładąc

$$\begin{aligned} \widetilde{u}(t,x_1,x_2,x_3) &= u(t,x_1,x_2), \\ \widetilde{g}(x_1,x_2,x_3) &= g(x_1,x_2), \\ \widetilde{h}(x_1,x_2,x_3) &= h(x_1,x_2) \end{aligned}$$

dostajemy równanie na $\widetilde{u}$

$$(13) \qquad \begin{cases} \widetilde{u}_{tt} - \Delta\widetilde{u} = 0 & \text{dla} \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3, \\ \widetilde{u}(0,x) = \widetilde{g}(x) & \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}^3, \\ \widetilde{u}_t(0,x) = \widetilde{h}(x) & \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

Stosując wzór Kirchoffa dostajemy

$$\begin{aligned} u(t,x_1,x_2) &= \widetilde{u}(t,x_1,x_2,0) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\Big(t\cdot \fint_{S^2(x_1,x_2,0,t)} \widetilde{g}(y)dS^2(y)\Big) + t\cdot \fint_{S^2(x_1,x_2,0,t)} \widetilde{h}(y)dS^2(y). \end{aligned}$$

Pozostaje nam uprościć to wyrażenie. Otóż

$$\begin{aligned} \fint_{S^2(x_1,x_2,0,t)} \widetilde{g}(y)dS^2(y) &= \frac{1}{4\pi t^2}\int_{S^2(x_1,x_2,0,t)} \widetilde{g}(y)dS^2(y) \\ &= \frac{2}{4\pi t^2}\int\limits_{B^2(x_1,x_2,t)} g(y)\sqrt{1+|\nabla\gamma(y_1,y_2)|^2}dy_1dy_2 \end{aligned}$$

gdzie $\gamma(y_1,y_2) = \sqrt{t^2 - |y_1-x_1|^2 - |y_2-x_2|^2}$ jest parametryzacją półsfery. Następnie liczymy

$$\sqrt{1+|\nabla\gamma(y_1,y_2)|^2} = \gamma^{-1}(y)\sqrt{\gamma^2(y) + |y_1-x_1|^2 + |y_2-x_2|^2} = t\cdot\gamma^{-1}(y).$$

Zatem

$$\fint_{S^2(x_1,x_2,0,t)} \widetilde{g}(y)dS^2(y) = \frac{2t}{4\pi t^2} \int_{B^2(x_1,x_2,t)} \frac{g(y)}{\gamma(y)} d(y)$$
$$= \frac{t}{2} \fint_{B^2(x_1,x_2,t)} \frac{g(y)}{\gamma(y)} d(y)$$

Postępując analogicznie z drugim składnikiem wzoru Kirchoffa dostajemy

$$u(t,x_1,x_2) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{t^2}{2} \cdot \fint_{B^2(x,t)} \frac{g(y)}{\gamma(y)} d(y)\Big) + \frac{t^2}{2} \cdot \fint_{B^2(x,t)} \frac{h(y)}{\gamma(y)} d(y).$$

Ostatecznie po wyliczeniu pochodnej po $\partial/\partial t$ dostajemy wzór Poissona

$$u(t,x) = \frac{1}{2} \fint_{B^2(x,t)} \frac{tg(y) + t^2 h(y) + t\nabla g(y) \cdot (y-x)}{\gamma(y)} d(y). \qquad \diamond \tag{14}$$

Ze wzoru tego wnioskujemy, że wartość rozwiązania w punkcie (t,x) zależy od wartości danych początkowych w całym kole $B(x,t)$. Wynik ten można zinterpretować następująco: w świecie dwuwymiarowym sygnał akustyczny, który dotrze do odbiorcy jest przez niego odbierany już na zawsze, jedynie natężenie odbieranego sygnału zmniejsza się wraz z upływem czasu.

6.8. Zagadnienie niejednorodne

Rozpatrzymy teraz zagadnienie niejednorodne w $\mathbb{R}^3$ z zerowymi warunkami początkowymi tzn. zagadnienie

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f(t,x) & \text{dla} \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3, \\ u(0,x) = 0 & \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}^3, \\ u_t(0,x) = 0 & \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{15}$$

Dla ustalonego $s > 0$ oznaczmy przez $u(t,s,x)$ rozwiązanie zagadnienia

$$\begin{cases} u_{tt}(\cdot,s,\cdot) - \Delta u(\cdot,s,\cdot) = 0, \\ u(s,s,\cdot) = 0, \\ u_t(s,s,\cdot) = f(s,\cdot) \end{cases}$$

i połóżmy

$$u(t,x) = \int_0^t u(t,s,x)ds \quad \Big(= \int_0^{v(t)} u(t,s,x)ds_{|v(t)=t}\Big) \quad \text{dla} \ \ t > 0, \ \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Wówczas zgodnie z zasadą Duhamela funkcja $u(t,x)$ jest rozwiązaniem zagadnienia (15).

Ponieważ $n = 3$ ze wzoru Kirchoffa dostajemy

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= \int_0^t (t-s)\cdot \fint_{S^2(x,t-s)} f(s,y)dS^2(y)ds \\
\Big(|S^2(x,t-s)| = 4\pi(t-s)^2\Big) \quad &= \frac{1}{4\pi}\int_0^t \int_{S^2(x,t-s)} \frac{f(s,y)}{t-s} dS^2(y)ds \\
&\overset{t-s=r}{=} \frac{1}{4\pi}\int_0^t \int_{S^2(x,r)} \frac{f(t-r,y)}{r} dS^2(y)dr \\
&\overset{r=|y-x|}{=} \frac{1}{4\pi}\int_{B^3(x,r)} \frac{f(t-|y-x|,y)}{|y-x|} dy. \quad \diamond
\end{aligned}$$

6.9. Jednoznaczność

Na zakończenie tego rozdziału podamy twierdzenie o jednoznaczności rozwiązania zagadnienia brzegowo-początkowego dla równania falowego w obszarze ograniczonym.

Twierdzenie 2 (O jednoznaczności). *Niech Ω będzie obszarem ograniczonym w $\mathbb{R}^n$ z gładkim brzegiem. Dla $0 < T < \infty$ oznaczmy $\Omega_T = \Omega \times (0,T]$ – walec o podstawie Ω, $\Gamma_T = \overline{\Omega_T} \setminus \Omega_T$ - brzeg walca bez wierzchu. Wówczas zagadnienie brzegowo-początkowe*

$$\begin{cases}
u_{tt} - \Delta u = f(t,x) & dla \quad (t,x) \in \Omega_T, \\
u(t,x) = g(t,x) & dla \quad (t,x) \in \Gamma_T, \\
u_t(0,x) = h(x) & dla \quad x \in \Omega,
\end{cases}$$

posiada co najwyżej jedno rozwiązanie klasy $C^2(\Omega_T)$.

Dowód. Oczywiście wystarczy wykazać, że jeśli $f = g = h = 0$, to jedynym rozwiązaniem jest funkcja $u \equiv 0$. W tym celu określmy energię rozwiązania u w chwili t wzorem

$$E[u](t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \big(u_t^2(t,x) + |\nabla_x u(t,x)|^2\big)dx$$

i policzmy jej pochodną względem czasu

$$\begin{aligned}
\frac{dE[u](t)}{dt} &= \int\limits_\Omega \big(u_t(t,x)\cdot u_{tt}(t,x) + \nabla_x u(t,x) \circ \nabla_x u_t(t,x)\big)dx \\
&\overset{\text{tw.Greena}}{=} \int\limits_\Omega u_t(t,x)\big(u_{tt}(t,x) - \Delta u(t,x)\big)dx + \int\limits_{\partial\Omega} u_t(t,x)\frac{\partial}{\partial\eta}\nabla u(t,x)dS(x) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

gdyż $u_{tt} - \Delta u = f = 0$ oraz $g = h = 0$. Zatem $E[u](t)$ jest funkcją niezależną od czasu $E[u](t) = E[u](0) = E[g] = 0$. Stąd $u_t(t,x) = \nabla_x u(t,x) = 0$, a więc $u \equiv 0$. $\diamond$

7. Transformacja Fouriera

W badaniu równań różniczkowych cząstkowych niezwykle użytecznym narzędziem jest transformacja Fouriera. Pozwala ona sprowadzić rozwiązywanie równań cząstkowych do rozwiązywania równań algebraicznych lub też równań różniczkowych zwyczajnych.

7.1. Definicja i podstawowe własności

Przed podaniem definicji transformacji Fouriera przypomnijmy sobie, że przestrzeń funkcji absolutnie całkowalnych na $\mathbb{R}^n$ oznacza się przez $L^1(\mathbb{R}^n)$, przy czym $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\|f\|_1 := \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx < \infty$.

Definicja. Transformatą Fouriera funkcji $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ nazywamy funkcję $\mathcal{F}[f] = \widehat{f}$ określoną wzorem

$$\widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}[f(x)](\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\xi}dx \qquad \text{dla } \ \xi \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

gdzie $x\xi = x_1\xi_1 + ... + x_n\xi_n$ jest iloczynem skalarnym wektorów x i ξ.

Ponieważ $|e^{-ix\xi}| = e^{\mathrm{Re}(-ix\xi)} = e^0 = 1$ więc transformacja Fouriera funkcji z L^1 jest funkcją ograniczoną tzn. $\widehat{f} \in L^\infty$ oraz $\|\widehat{f}\|_\infty \le \|f\|_1$.

Twierdzenie 1. *Niech $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Wówczas*

a) $\mathcal{F}[f]$ jest funkcją ciągłą, znikającą w nieskończoności.

b) Jeśli $a \in \mathbb{R}^n$, to

$$\mathcal{F}[f(x-a)](\xi) = e^{-ia\xi}\widehat{f}(\xi), \qquad \mathcal{F}[e^{iax}f(x)](\xi) = \widehat{f}(\xi - a).$$

c) Jeśli $f_\delta(x) = \delta^{-n}f(x/\delta)$ dla $\delta > 0$, to

$$\mathcal{F}[f_\delta](\xi) = \widehat{f}(\delta\xi), \qquad \mathcal{F}[f(\delta x)](\xi) = (\widehat{f})_\delta(\xi).$$

d) Jeśli $j \in \{1, ..., n\}$ oraz $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, to $\big(\frac{\partial f}{\partial x_j}\big)^\wedge(\xi) = i\xi_j\widehat{f}(\xi)$.

Jeśli $j \in \{1, ..., n\}$ oraz $x_j \cdot f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, to $\mathcal{F}[x_j \cdot f](\xi) = i\frac{\partial}{\partial \xi_j}\widehat{f}(\xi)$.

Ogólniej, jeśli $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$, $x^\alpha D^\beta f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, gdzie $D^\beta f = (-i)^{|\beta|}\partial^\beta f$, to

$$\mathcal{F}[x^\alpha D^\beta f](\xi) = (-1)^{|\alpha|}D^\alpha\big(\xi^\beta \mathcal{F}[f](\xi)\big).$$

e) Jeśli $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, *to* $\quad (f * g)\widehat{\ }(\xi) = \widehat{f}(\xi) \cdot \widehat{g}(\xi)$.

Jeśli $\widehat{f}, \widehat{g} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, *to* $\quad (\widehat{f} * \widehat{g})(\xi) = (2\pi)^n (f \cdot g)\widehat{\ }(\xi)$.

Dowód. Dowód przeprowadzimy w wymiarze $n = 1$, gdyż w wyższym wymiarze przebiega analogicznie.
a). Ustalmy $\xi \in \mathbb{R}$. Wówczas dla $h \in \mathbb{R}$ mamy

$$
\begin{aligned}
\big|\mathcal{F}f(\xi + h) - \mathcal{F}f(\xi)\big| &= \Big| \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} \big(e^{-ixh} - 1\big) dx \Big| \\
&\le \int_{B(r)} |f(x)||e^{-ixh} - 1| dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}\setminus B(r)} |f(x)||e^{-ixh} - 1| dx = I_1 + I_2.
\end{aligned}
$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Ponieważ $f \in L^1(\mathbb{R})$, więc istnieje $r < \infty$ takie, że $I_2 < \varepsilon/2$. Teraz znajdujemy $\delta > 0$ takie, że jeśli $x \in B(r)$ oraz $|h| < \delta$, to

$$
\big|e^{-ixh} - 1\big| \le \cos(r\delta) - 1 + \sin(r\delta) \le \varepsilon/(2\|f\|_{L^1}).
$$

Wówczas $I_1 \le \varepsilon/2$. Wobec dowolności $\varepsilon > 0$ wykazaliśmy ciągłość $\mathcal{F}f$ w punkcie ξ. W celu wykazania, że $\mathcal{F}f$ znika w ∞ liczymy bezpośrednio

$$
\mathcal{F}[\chi_{[a,b]}](\xi) = \frac{\sin(b\xi) - \sin(a\xi)}{\xi} + i\frac{\cos(b\xi) - \cos(a\xi)}{\xi} \to 0 \;\text{ gdy }\; \xi \to \infty.
$$

Następnie przybliżamy funkcję $f \in L^1(\mathbb{R})$ ciągiem funkcji schodkowych i stosujemy twierdzenie o zmajoryzowanym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki.
b), c). Trywialne.
d). Całkując przez części mamy

$$
\begin{aligned}
\Big(\frac{df}{dx}\Big)\widehat{\ }(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{dx}(x) e^{-ix\xi} dx \\
&= f(x) e^{-ix\xi}\Big|_{-\infty}^{\infty} + i\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx \\
&= i\xi_j \widehat{f}(\xi).
\end{aligned}
$$

Podobnie wykazujemy drugi wzór, natomiast trzeci wynika z dwóch pierwszych przez indukcję.
e). Niech $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Wówczas na mocy twierdzenia Fubiniego mamy

$$
\begin{aligned}
(f * g)\widehat{\ }(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y) g(y) dy dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi(x-y)} f(x - y) e^{-i\xi y} g(y) dy dx \\
&\overset{x-y=z}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi z} f(z) dz e^{-i\xi y} g(y) dy \\
&= \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi).
\end{aligned}
$$

Drugi wzór otrzymujemy analogicznie, korzystając z twierdzenia o odwracaniu transformacji Fouriera, które zostanie wykazane później. $\diamond$

Ważny przykład. Dla $x \in \mathbb{R}^n$ połóżmy $\exp\{-x^2\} = \exp\{-x_1^2 - x_2^2 - ... - x_n^2\}$. Wówczas

$$\mathcal{F}[\exp\{-x^2/2\}](\xi) = (2\pi)^{n/2}\exp\{-\xi^2/2\} \quad \text{dla} \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Dowód. Wykażemy najpierw (2) w wymiarze $n = 1$. W tym celu połóżmy

$$\Phi(\xi) = \mathcal{F}[\exp\{-x^2/2\}](\xi) = \int_{\mathbb{R}} \exp\{-x^2/2 - ix\xi\}dx \quad \text{dla} \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Powyższą całką można policzyć korzystając z metody residuów. Zastosujemy tutaj inna metodę. Mianowicie najpierw policzymy pochodną $d\Phi/d\xi$, a następnie zastosujemy wzór na całkowanie przez części

$$\begin{aligned}
\frac{d\Phi}{d\xi}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} -ix\exp\{-x^2/2 - ix\xi\}dx \\
&= i\int_{\mathbb{R}} \Big(\exp\{-x^2/2\}\Big)'_x \exp\{-ix\xi\}dx \\
&= -i\int_{\mathbb{R}} \exp\{-x^2/2\}(-i\xi)\exp\{-ix\xi\}dx \\
&= -\xi\Phi(\xi).
\end{aligned}$$

Ponadto, wiemy że

$$\Phi(0) = \int_{\mathbb{R}} \exp\{-x^2/2\}dx = \sqrt{2\pi}.$$

Zatem funkcja Φ spełnia równanie różniczkowe zwyczajne $\frac{d\Phi}{d\xi} = -\xi\Phi(\xi)$ z warunkiem początkowym $\Phi(0) = \sqrt{2\pi}$. Rozwiązując to równanie dostajemy, że $\Phi(\xi) = \sqrt{2\pi}\exp\{-\xi^2/2\}$.

Jeśli $n \geq 2$, to korzystając z twierdzenia Fubiniego dostajemy

$$\mathcal{F}[\exp\{-x^2/2\}](\xi) = \Phi(\xi_1)\cdot\ldots\cdot\Phi(\xi_n) = (2\pi)^{n/2}\exp\{-\xi^2/2\}. \qquad \diamond$$

Wniosek. Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ mamy

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[\exp\{-\varepsilon x^2\}](\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp\Big\{-\frac{(\sqrt{2\varepsilon}x)^2}{2} - i\sqrt{2\varepsilon}x\cdot\frac{\xi}{\sqrt{2\varepsilon}}\Big\}dx \\
&\overset{y=\sqrt{2\varepsilon}x}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\Big\{-\frac{y^2}{2} - iy\cdot\frac{\xi}{\sqrt{2\varepsilon}}\Big\}\cdot\frac{1}{(2\varepsilon)^{n/2}}dy \\
&= \frac{1}{(2\varepsilon)^{n/2}}\cdot(2\pi)^{n/2}\cdot\exp\Big\{-\frac{\xi^2}{2\cdot 2\varepsilon}\Big\}.
\end{aligned}$$

Zatem

$$\mathcal{F}[\exp\{-\varepsilon x^2\}](\xi) = \Big(\frac{\pi}{\varepsilon}\Big)^{n/2} \exp\Big\{-\frac{\xi^2}{4\varepsilon}\Big\}. \qquad \diamond \tag{3}$$

7.2. Transformacja Fouriera na $L^2(\mathbb{R}^n)$

W dowodzie następnego twierdzenia będzie nam potrzebny

Lemat 1. *Niech $f \in L^p(\mathbb{R}^n), g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ gdzie $1 \le p, q \le \infty$ przy czym $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Wówczas splot $f * g$ jest funkcją ciągłą na $\mathbb{R}^n$ znikającą w ∞.*

Dowód. Korzystając z nierówności Höldera dostajemy, że splot $f * g$ jest dobrze zdefiniowaną, ograniczoną funkcją, przy czym dla $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} |f * g(x)| &\le \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)g(x-y)|dy \\ &\le \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p dy\Big)^{1/p} \cdot \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|^q dy\Big)^{1/q} \\ &= \|f\|_p \|g\|_q. \end{aligned}$$

Niech

$$J(x) = \begin{cases} c \exp\big\{\frac{-1}{x^2-1}\big\} & \text{dla} \quad |x| < 1, \\ 0 & \text{dla} \quad |x| \ge 1, \end{cases}$$

gdzie stała c jest tak dobrana, aby $\int J(x)dx = 1$ oraz niech I będzie funkcją gładką na $\mathbb{R}^n$ taką, że

$$I(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad |x| \le 1, \\ 0 & \text{dla} \quad |x| \ge 2. \end{cases}$$

Dla $\varepsilon > 0$ połóżmy

$$f_\varepsilon(x) = I_\varepsilon(x) \cdot \big(f * J_\varepsilon(x)\big), \qquad g_\varepsilon(x) = I_\varepsilon(x) \cdot \big(g * J_\varepsilon(x)\big),$$

gdzie $J_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} J(x/\varepsilon)$, $I_\varepsilon(x) = I(\varepsilon x)$. Wówczas $f_\varepsilon, g_\varepsilon$ są funkcjami gładkimi oraz $f_\varepsilon \to f$ w $L^p(\mathbb{R}^n)$ gdy $\varepsilon \to 0$, $g_\varepsilon \to g$ w $L^q(\mathbb{R}^n)$ gdy $\varepsilon \to 0$. Zatem dla ustalonego $\delta > 0$ istnieje $\varepsilon_0 > 0$ takie, że dla $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$

$$\|f_\varepsilon - f\|_p < \delta \ \text{ oraz } \ \|g_\varepsilon - g\|_q < \delta.$$

Korzystając z nierówności trójkąta, a następnie Höldera dostajemy

$$\begin{aligned} \|f * g - f_\varepsilon * g_\varepsilon\|_\infty &\le \|(f - f_\varepsilon) * g\|_\infty + \|f_\varepsilon * (g - g_\varepsilon)\|_\infty \\ &\le \|f - f_\varepsilon\|_p \|g\|_q + \|f_\varepsilon\|_p \|g - g_\varepsilon\|_q \\ &\le \delta\big(\|g\|_q + \|f\|_p\big). \end{aligned}$$

Zatem $f*g$ jest jednostajną granicą funkcji gładkich (a więc ciągłych) $f_\varepsilon * g_\varepsilon$ o zwartych nośnikach. Wynika stąd, że $f*g$ jest funkcją ciągłą na $\mathbb{R}^n$ znikającą w ∞. $\diamond$

Twierdzenie 2 (Plancherela-Parsevala). *Jeśli $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, to $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ oraz*

$$\|\widehat{f}\|_2 = (2\pi)^{n/2}\|f\|_2. \tag{4}$$

Dowód. Zauważmy najpierw, że dla $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mamy

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(\xi)e^{-ix\xi}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)g(\xi)d\xi.$$

We wzorze tym połóżmy $g(\xi) = e^{-\varepsilon\xi^2}$. Wówczas ze wzoru (3) dostajemy $\widehat{g}(x) = \big(\frac{\pi}{\varepsilon}\big)^{n/2}\exp\big\{-\frac{x^2}{4\varepsilon}\big\}$. Stąd

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\exp\{-\varepsilon\xi^2\}d\xi = \Big(\frac{\pi}{\varepsilon}\Big)^{n/2}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\exp\Big\{-\frac{x^2}{4\varepsilon}\Big\}dx. \tag{5}$$

Weźmy teraz dowolną funkcję $u \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ i połóżmy $v(x) = \overline{u}(-x)$ oraz $f = u * v$. Wówczas $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ (gdyż $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$) oraz na mocy Lematu 1, f jest funkcją ciągłą (gdyż $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$). Ponadto z własności *e)* Twierdzenia 1 mamy $\widehat{f}(\xi) = \widehat{u}(\xi)\cdot\widehat{v}(\xi)$. Lecz $\widehat{v}(\xi) = \int \overline{u}(-x)e^{-ix\xi}dx = \overline{\widehat{u}}(\xi)$. Zatem $\widehat{f}(\xi) = \widehat{u}(\xi)\cdot\overline{\widehat{u}}(\xi) = |\widehat{u}(\xi)|^2 \geq 0$. Ponieważ funkcja f jest ciągła, więc z Twierdzenia 5.1 o rozwiązaniu problemu początkowego dla równania ciepła wnioskujemy, że

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{(4\pi\varepsilon)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\exp\Big\{-\frac{x^2}{4\varepsilon}\Big\}dx = f(0).$$

Wobec tego przechodząc we wzorze (5) do granicy $\varepsilon \to 0$ dostajemy

$$\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(\xi)d\xi = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(2\pi)^n}{(4\pi\varepsilon)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\exp\Big\{-\frac{x^2}{4\varepsilon}\Big\}dx = (2\pi)^n f(0).$$

Ostatecznie

$$\begin{aligned}\|\widehat{u}\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^n}|\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(\xi)d\xi = (2\pi)^n f(0) = (2\pi)^n\int_{\mathbb{R}^n} u(x)v(-x)dx \\ = (2\pi)^n\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\overline{u}(x)dx = (2\pi)^n\|u\|_2^2\end{aligned}$$

co kończy dowód. $\diamond$

Korzystając z Twierdzenia 2 możemy zdefiniować transformację Fouriera na przestrzeni $L^2(\mathbb{R}^n)$ w następujący sposób.

Definicja. Jeśli $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, to znajdujemy ciąg funkcji $f_k \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ taki, że $f_k \to f$ w $L^2(\mathbb{R}^n)$ gdy $k \to \infty$. (Można na przykład wziąć $f_k(x) = \exp\{-x^2/k\}f(x)$.) Wówczas $\|\widehat{f_k} - \widehat{f_j}\|_2 = (2\pi)^{n/2}\|f_k - f_j\|_2$. Zatem $\{\widehat{f_k}\}$ jest ciągiem Cauchy'ego w $L^2(\mathbb{R}^n)$ i wobec zupełności tej przestrzeni zbiega on do granicy $\widehat{f}$, którą nazywamy transformatą Fouriera f. Łatwo jest zauważyć, że $\widehat{f}$ nie zależy od wyboru ciągu f_k zbieżnego do f w $L^2(\mathbb{R}^n)$.

7.3. Odwrotna transformacja Fouriera

Twierdzenie 3 (O odwracaniu transformacji Fouriera). *Niech $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C^0(\mathbb{R}^n)$ będzie taka, że $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Wówczas*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi \qquad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{6}$$

Dowód. Jeśli do wzoru (6) bezpośrednio wstawimy definicję $\widehat{f}$, to dostaniemy całkę iterowaną

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n_\xi}\int_{\mathbb{R}^n_y} f(y)e^{-i(y-x)\xi}dyd\xi,$$

w której nie można dokonać zamiany kolejności całkowania (dlaczego?). Dlatego pomnożymy najpierw $\widehat{f}(\xi)$ przez $e^{-\varepsilon\xi^2}$. Wówczas korzystając z twierdzeń o przechodzeniu do granicy pod znakiem całki i Fubiniego dostajemy

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(\xi)e^{-\varepsilon\xi^2}e^{ix\xi}d\xi \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n_\xi}\int_{\mathbb{R}^n_y} f(y)e^{-iy\xi}dye^{-\varepsilon\xi^2}e^{ix\xi}d\xi \\
\text{(tw.Fubiniego)} \quad &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n_y} f(y)\int_{\mathbb{R}^n_\xi} e^{-\varepsilon\xi^2}e^{-i(y-x)\xi}d\xi dy \\
&\overset{(3)}{=} \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n_y} f(y)\left(\frac{\pi}{\varepsilon}\right)^{n/2}e^{-(y-x)^2/4\varepsilon}dy \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{(4\pi\varepsilon)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n_y} f(y)e^{-(y-x)^2/4\varepsilon}dy = f(x)
\end{aligned}$$

na podstawie Twierdzenia 5.1 o rozwiązaniu zagadnienia początkowego dla równania ciepła. $\diamond$

Powyższe twierdzenie motywuje następującą definicję.

Definicja. Jeśli $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, to odwrotną transformatą Fouriera funkcji g nazywamy funkcję

$$\mathcal{F}^{-1}[g](x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) e^{ix\xi} d\xi \quad \text{dla} \;\; x \in \mathbb{R}^n.$$

7.4. Zastosowania

1. Potencjały Bessela. Jako pierwsze zastosowanie transformacji Fouriera przedstawimy rozwiązanie równania

$$-\Delta u + u = f \qquad \text{gdzie} \;\; f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Stosując własność $d)$ z Twierdzenia 1 dostajemy równanie algebraiczne

$$(1+\xi^2)\widehat{u}(\xi) = \widehat{f}(\xi).$$

Stąd

$$\widehat{u}(\xi) = \frac{\widehat{f}(\xi)}{1+\xi^2}.$$

Zatem

$$u(x) = \mathcal{F}^{-1}\Big[\frac{\widehat{f}(\xi)}{1+\xi^2}\Big](x) = f * B(x) \quad \text{gdzie} \quad \widehat{B}(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2},$$

gdyż $\mathcal{F}^{-1}[f \cdot g] = \mathcal{F}^{-1}[f] * \mathcal{F}^{-1}[g]$. W celu znalezienia funkcji B zauważmy, że

$$\frac{1}{1+\xi^2} = \int_0^\infty \exp\{-t(1+\xi^2)\} dt.$$

Zatem

$$\begin{aligned} B(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^\infty e^{-t}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi - t\xi^2} d\xi\Big) dt \\ &\overset{(3)}{=} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^\infty e^{-t}\Big(\frac{\pi}{t}\Big)^{n/2} e^{-x^2/(4t)} dt \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \int_0^\infty \frac{\exp\{-t - x^2/(4t)\}}{t^{n/2}} dt. \end{aligned}$$

Funkcja B nazywa się *potencjałem Bessela.* Ostatecznie

$$u(x) = f * B(x) = \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\exp\{-t - (x-y)^2/(4t)\}}{t^{n/2}} f(y) dy dt. \qquad \diamond$$

2. Równanie ciepła. Rozważmy problem początkowy dla równania ciepła

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, \\ u(0,x) = g(x) \end{cases}$$

przy czym $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Stosując transformację Fouriera względem zmiennych przestrzennych dostajemy równanie różniczkowe zwyczajne względem czasu

$$\begin{cases} \frac{d\widehat{u}}{dt}(t,\xi) + \xi^2\widehat{u}(t,\xi) & = 0, \\ \widehat{u}(0,\xi) & = \widehat{g}(\xi). \end{cases}$$

Jego rozwiązaniem jest $\widehat{u}(t,\xi) = \exp\{-t\xi^2\}\widehat{g}(\xi)$. Stąd $u(x) = g * F(x)$ gdzie $\widehat{F}(\xi) = \exp\{-t\xi^2\}$. Zatem

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi - t\xi^2}d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\left(\frac{\pi}{t}\right)^{n/2} e^{-x^2/(4t)} \end{aligned}$$

Ostatecznie dostajemy wzór zgodny z (5.5)

$$u(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} \exp\{\frac{-(x-y)^2}{4t}\}g(y)dy. \qquad \diamond$$

3. Równanie falowe. Zastosujmy jeszcze transformację Fouriera do rozwiązania problemy początkowego dla równania falowego

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u & = 0, \\ u(0,x) & = g(x), \\ u_t(0,x) & = 0 \end{cases}$$

przy czym $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Biorąc transformatę Fouriera względem zmiennych przestrzennych dostajemy równanie różniczkowe zwyczajne

$$\begin{cases} \frac{d^2\widehat{u}}{dt^2}(t,\xi) + \xi^2\widehat{u}(t,\xi) & = 0, \\ \widehat{u}(0,\xi) & = \widehat{g}(\xi), \\ \widehat{u}'_t(0,\xi) & = 0. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego równania jest

$$\widehat{u}(t,\xi) = \frac{\widehat{g}(\xi)}{2}\left(e^{it|\xi|} + e^{-it|\xi|}\right).$$

Zatem

$$u(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\widehat{g}(\xi)}{2}\left(e^{i(x\xi + t|\xi|)} + e^{i(x\xi - t|\xi|)}\right)d\xi.$$

Wnioskujemy stąd, że rozwiązanie jest „sumą” fal płaskich postaci

$$v_\xi(t,x) = \exp\{i(x\xi \pm t|\xi|)\}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \qquad \diamond$$

8. Przestrzenie Sobolewa

Dotychczas szukaliśmy klasycznych rozwiązań równań różniczkowych tzn. rozwiązań klasy C^k gdzie k jest rzędem równania. Dla podstawowych równań fizyki matematycznej, a mianowicie dla równań Laplace'a, Poissona, ciepła i falowego udało nam się wzory na rozwiązania odpowiednich problemów brzegowych lub początkowych. Było to możliwe dzięki znajomości rozwiązań podstawowych tych równań. W ogólniejszej sytuacji to podejście nie daje szans na powodzenie. Po pierwsze nie znane są rozwiązania podstawowe ogólnych równań, a nawet jeśli są one znane to wyrażają się skomplikowanymi wzorami. Po drugie okazuje się, że często naturalne równania nie posiadają rozwiązań klasycznych. Zauważyliśmy to już przy rozwiązywaniu problemu początkowo-brzegowego dla równania zaczepionej struny, jeśli dane początkowe nie są klasy C^3, to rozwiązanie dane poprzez szereg Fouriera nie jest funkcją klasy C^2. Ponieważ naszym celem jest badanie szerokich klas równań niezbędne okazuje się być interpretowanie równań i ich rozwiązań w sposób abstrakcyjny. Mianowicie będziemy zapisywać równanie (liniowe) jako operator

$$A : X \to Y$$

gdzie A jest operatorem kodującym postać równania, jak również warunki brzegowo-po- czątkowe, natomiast X i Y są pewnymi przestrzeniami funkcyjnymi. Zaletą tego podejścia jest możliwość odwoływania się do ogólnych twierdzeń analizy funkcjonalnej takich jak np. twierdzenie o punkcie stałym odwzorowania zwężającego. Główną trudnością przy tym podejściu jest dobór właściwych przestrzeni funkcyjnych. Jest on uwarunkowany kompromisem pomiędzy łatwością uzyskania rozwiązania w dużej przestrzeni funkcyjnej, a dobrymi własnościami rozwiązań gdy przestrzeń funkcyjna jest mała. Okazuje się, że do badania szerokiej klasy liniowych równań różniczkowych cząstkowych dobrze nadają się przestrzenie Sobolewa. Zawierają one funkcje, które niekoniecznie muszą być gładkie lecz zachowują pewne cechy funkcji gładkich.

8.1. Słabe pochodne

Załóżmy, że $u \in C^1(\Omega)$. Wówczas dla dowolnej funkcji próbnej $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ ze wzoru na całkowanie przez części dostajemy

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\varphi(x)dx, \qquad i = 1, ..., n.$$

Ogólniej, jeśli $u \in C^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$ oraz $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ przy czym $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n \le k$ to

$$\int_\Omega u(x) \cdot D^\alpha \varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u(x) \cdot \varphi(x)dx. \tag{1}$$

Przyjrzyjmy się temu wzorowi. Otóż jego lewa strona ma sens o ile tylko funkcja u jest lokalnie całkowalna. Problem polega na tym, aby nadać sens prawej stronie w przypadku, gdy u nie jest funkcją klasy $C^k(\Omega)$. Rozwiążemy go w ten sposób, że zażądamy aby istniała funkcja v lokalnie całkowalna taka, że (1) zachodzi gdy zamiast $D^\alpha u$ podstawimy v.

Definicja. Niech $u, v \in L^1_{loc}(\Omega), \alpha \in \mathbb{N}^n_0$. Mówimy, że v jest α-tą słabą pochodną funkcji u jeśli

$$\int_\Omega u(x) \cdot D^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v(x) \cdot \varphi(x) dx \tag{2}$$

dla wszystkich $\varphi \in C^\infty_0(\Omega)$.

Przykład. Niech $n = 1, \Omega = \mathbb{R}$ oraz $u(x) = |x|$. Wiadomo, że u nie jest różniczkowalna w zerze. Tym nie mniej wykażemy, że u jest słabo różniczkowalna oraz jej słabą pochodną jest $v(x) = \mathrm{sgn} x$. Istotnie $u, v \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ oraz dla $\varphi \in C^\infty_0(\mathbb{R})$ mamy

$$\begin{aligned}
\int_\mathbb{R} u(x)\varphi'(x)dx &= \int_{-\infty}^0 -x\varphi'(x)dx + \int_0^\infty x\varphi'(x)dx \\
&= -x\varphi(x)\Big|_{-\infty}^0 + \int_{-\infty}^0 \varphi(x)dx + x\varphi(x)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \varphi(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^0 \varphi(x)dx - \int_0^\infty \varphi(x)dx \\
&= -\int_\mathbb{R} \mathrm{sgn}(x)\varphi(x)dx. \qquad \diamond
\end{aligned}$$

Następujący lemat powiada, że jeśli słabe pochodne istnieją, to są one wyznaczone jednoznacznie w sensie przestrzeni $L^1_{loc}(\Omega)$. Jego dowód wymaga pewnych wiadomości z teorii całki Lebesgue'a.

Lemat 1 (De Bois -Raymonda). *Niech $u, v, \widetilde{v} \in L^1_{loc}(\Omega)$ oraz $\alpha \in \mathbb{N}^n_0$. Jeśli $D^\alpha u = v$ i $D^\alpha u = \widetilde{v}$ w słabym sensie, to $v = \widetilde{v}$ prawie wszędzie.*

Dowód. Połóżmy $w = v - \widetilde{v}$. Wówczas wystarczy wykazać, że jeśli dla każdej funkcji $\varphi \in C^\infty_0(\Omega)$ zachodzi

$$\int_\Omega w(x)\varphi(x)dx = 0,$$

to $w = 0$ p.w. (prawie wszędzie). Załóżmy, że teza powyższego stwierdzenia nie zachodzi. Wówczas ponieważ

$$\{x \in \Omega : w(x) \neq 0\} = \bigcup_{i=1}^\infty \{x \in \Omega : |w(x)| > 1/i\}$$

możemy znaleźć $\varepsilon > 0$ oraz zbiór zwarty $K \subset \Omega$ taki, że $w(x) > \varepsilon$ dla $x \in K$. Niech $U \supset K$ będzie otwartym nadzbiorem K. Weźmy funkcję $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ taką, że $0 \leq \varphi \leq 1$ na Ω, $\varphi \equiv 0$ na K i $\varphi \equiv 0$ poza U. Wówczas

$$\begin{aligned} 0 = \int_\Omega w(x)\varphi(x)dx &= \int_K w(x)\varphi(x)dx + \int_{U\setminus K} w(x)\varphi(x)dx \\ &= \int_K w(x)dx + \int\limits_{U\setminus K} w(x)\varphi(x)dx \\ &\geq \varepsilon|K| - \int_{U\setminus K} |w(x)|dx > 0 \end{aligned}$$

o ile miara zbioru $U \setminus K$ jest dostatecznie mała, ponieważ całka jest bezwzględnie ciągłą funkcją zbioru. Uzyskana sprzeczność potwierdza słuszność tezy stwierdzenia. $\diamond$

8.2. Definicja przestrzeni Sobolewa

Niech Ω będzie obszarem w $\mathbb{R}^n$ oraz $1 \leq p < \infty$. Przypomnijmy najpierw, że przestrzeń $L^p(\Omega)$ funkcji całkowalnych z p-tą potęga składa się z funkcji f określonych na Ω dla których skończona jest norma

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_p : = \Big(\int_\Omega |f(x)|^p dx \Big)^{1/p} < \infty.$$

Natomiast przestrzeń $L^\infty(\Omega)$ składa się z funkcji dla których istotne supremum jest skończone

$$\|f\|_\infty : = \operatorname{esssup}_{x\in\Omega} |f(x)| < \infty.$$

Definicja. Niech Ω będzie obszarem w $\mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}_0, 1 \leq p \leq \infty$. Wówczas kładziemy

$$\begin{aligned} W^{k,p}(\Omega) =&\{u \in L^p(\Omega) : \text{ dla każdego } \alpha \in \mathbb{N}_0^n \text{ takiego, że } |\alpha| \leq k \text{ istnieje} \\ &\text{słaba pochodna } D^\alpha u \text{ i należy do } L^p(\Omega)\}. \end{aligned}$$

W przestrzeni $W^{k,p}(\Omega)$ wprowadzamy normę

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \|u\|_{k,p} = \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}. \tag{3}$$

Zatem ciąg funkcji $u_j \in W^{k,p}(\Omega), j \in \mathbb{N}$, jest zbieżny w przestrzeni $W^{k,p}(\Omega)$ do $u \in W^{k,p}(\Omega)$ jeśli $\|u_j - u\|_{k,p} \to 0$ gdy $j \to \infty$.

Jeśli $p = 2$, to przestrzeń $W^{k,p}(\Omega)$ oznaczana jest także przez $H^k(\Omega)$. Jest to przestrzeń Hilberta z iloczynem skalarnym

$$< u, v >_{H^k(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega D^\alpha u(x) \overline{D^\alpha v}(x) dx.$$

Poprzez $W^{k,p}_{loc}(\Omega)$ oznaczamy przestrzeń funkcji, które lokalnie należą do $W^{k,p}(\Omega)$ tzn.

$$W^{k,p}_{loc}(\Omega) = \bigcap_{U \subset\subset \Omega} W^{k,p}(U)$$

przy czym ciąg funkcji $u_j \in W^{k,p}_{loc}(\Omega), j \in \mathbb{N}$, jest zbieżny w przestrzeni $W^{k,p}_{loc}(\Omega)$ do $u \in W^{k,p}_{loc}(\Omega)$ jeśli $u_j \to u$ gdy $j \to \infty$ w $W^{k,p}(U)$ dla każdego $U \subset\subset \Omega$.

Poprzez $W^{k,p}_0(\Omega)$ oznacza się domknięcie przestrzeni $C_0^\infty(\Omega)$ w normie $W^{k,p}(\Omega)$, tzn. $u \in W^{k,p}_0(\Omega)$ jeśli istnieje ciąg $u_j \in C_0^\infty(\Omega)$ taki, że $u_j \to u$ w $W^{k,p}(\Omega)$.

Intuicyjnie przestrzeń $W^{k,p}_0(\Omega)$ składa się z tych funkcji $u \in W^{k,p}(\Omega)$, które znikają na $\partial\Omega$ wraz z pochodnymi do rzędu $k - 1$.

Przykład. Niech $\Omega = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$ oraz $1 \le p < \infty$. Zbadamy dla jakich $s \in \mathbb{R}$ funkcja $u(x) = |x|^s$ należy do $W^{k,p}(B)$. Dla $k = 0$ mamy

$$\int_B |u(x)|^p dx = \int_B |x|^{sp} dx = \omega_n \int_0^1 r^{sp+n-1} dr = \frac{\omega_n}{sp + n}$$

o ile $sp + n > 0$. Zatem $u \in W^{0,p}(B) = L^p(B)$ o ile $s > -n/p$. Niech teraz $k = 1$. Dla $x \ne 0$ mamy

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) &= s\ x_i |x|^{s-2}, \\ \nabla u(x) &= s\ x|x|^{s-2}, \\ |\nabla u(x)| &= |s|\ |x|^{s-1}. \end{aligned}$$

Zatem $|\nabla u| \in L^p(B)$ o ile $s - 1 > -n/p$ lub $s = 0$ oraz $u \in W^{1,p}(B)$ jeśli $s > -n/p + 1$ lub $s = 0$.

Kontynuując to rozumowanie wnioskujemy, że jeśli $s > -n/p + k$, to $u \in W^{k,p}(B)$.

Zauważmy, że jeśli wymiar n przestrzeni jest wysoki, to do przestrzeni $W^{k,p}(B)$ należą też funkcje nieciągłe.

8.3. Własności przestrzeni Sobolewa

Następujące twierdzenia zbiera podstawowe algebraiczne i różniczkowe własności słabych pochodnych.

Twierdzenie 1. *Niech $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$ oraz $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| \leq k$. Wówczas*

(i) Jeśli $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, to $\mu u + \nu v \in W^{k,p}(\Omega)$ oraz $D^\alpha(\mu u + \nu v) = \mu D^\alpha u + \nu D^\alpha v$.

(ii) Jeśli $U \subset \Omega$, to $u \in W^{k,p}(U)$.

(iii) Jeśli $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, to $\varphi u \in W^{k,p}(\Omega)$ oraz $D^\alpha(\varphi u) = \sum\limits_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \varphi \cdot D^{\alpha-\beta} u$.

(iv) $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$ oraz $D^\beta(D^\alpha u) = D^{\alpha+\beta} u$ o ile $|\alpha| + |\beta| \leq k$. $\diamond$

Twierdzenie 2. *Przestrzeń $W^{k,p}(\Omega)$ jest przestrzenią Banacha.*

Dowód. 1. Nierówność trójkąta w $W^{k,p}(\Omega)$ jest prostą konsekwencją nierówności Minkowskiego $\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p$ dla $u, v \in L^p(\Omega)$.
2. W celu wykazania zupełności $W^{k,p}(\Omega)$ załóżmy, że $\{u_j\}_{j=1}^\infty$ jest ciągiem Cauchy'ego w $W^{k,p}(\Omega)$. Wówczas dla każdego $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| \leq k$, $\{D^\alpha u_j\}_{j=1}^\infty$ jest ciągiem Cauchy'ego w $L^p(\Omega)$. Wobec zupełności $L^p(\Omega)$ istnieją funkcji $u_\alpha \in L^p(\Omega)$ takie, że $D^\alpha u_j \to u_\alpha$ w $L^p(\Omega)$. Niech $u = u_0$. Wówczas $u \in W^{k,p}(\Omega)$ oraz $D^\alpha u = u_\alpha$ w słabym sensie dla $|\alpha| \leq k$. Istotnie dla $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ mamy

$$\begin{aligned}\int_\Omega u(x) D^\alpha \varphi(x) dx &= \lim_{j\to\infty} \int_\Omega u_j(x) D^\alpha \varphi(x) dx \\ &= \lim_{j\to\infty} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u_j(x) \varphi(x) dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_\alpha(x) \varphi(x) dx.\end{aligned}$$

Zatem $D^\alpha u = u_\alpha$ oraz $u_j \to u$ w $W^{k,p}(\Omega)$. $\diamond$

Następne twierdzenia pokazują, że funkcje z przestrzeni Sobolewa można przybliżać funkcjami gładkimi.

Twierdzenie 3. *Niech $k \in \mathbb{N}_0, 1 \leq p < \infty$ oraz $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Połóżmy $u^\varepsilon(x) = J_\varepsilon * u(x)$ dla $x \in \Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$, gdzie funkcja J_ε została zdefiniowana w dowodzie Lematu 7.1. Wówczas*

(i) $u^\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$;

(ii) $u^\varepsilon \to u$ w $W^{k,p}_{loc}(\Omega)$ gdy $\varepsilon \to 0$. $\diamond$

Twierdzenie 4 (Meyersa-Serrina, 1964). *Niech $k \in \mathbb{N}_0, 1 \leq p < \infty$. Jeśli Ω jest zbiorem ograniczonym oraz $u \in W^{k,p}(\Omega)$, to istnieją funkcje $u_j \in C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega), j \in \mathbb{N}$ takie, że $u_j \to u$ w $W^{k,p}(\Omega)$ gdy $j \to \infty$.*

Dowód. Niech $\Omega = \bigcup_{j=1}^\infty \Omega_j$ przy czym $\Omega_j \subset\subset \Omega_{j+1}$ oraz niech $\{\psi_j\}_{j=1}^\infty$ będzie gładkim rozkładem jedności dla pokrycia $\{\Omega_{j+1} \setminus \Omega_{j-1}\}$, $(\Omega_0 = \emptyset)$. Ustalmy $\eta > 0$. Wówczas istnieją $\varepsilon_j > 0$ takie, że $\varepsilon_j < \mathrm{dist}(\Omega_j, \partial\Omega_{j+1})$ oraz

$$\|(\psi_j u) * J_{\varepsilon_j} - \psi_j u\|_{k,p} \leq \frac{\eta}{2^j}.$$

Połóżmy $v_j = (\psi_j u) * J_{\varepsilon_j}, j \in \mathbb{N}$. Dla ustalonego zbioru zwartego $K \subset\subset \Omega$ tylko skończona liczba funkcji $v_{j|K}$ nie znika. Zatem $v = \sum_{j=1}^\infty$ jest funkcją klasy $C^\infty(\Omega)$ oraz

$$\|v-u\|_{k,p} \le \sum_{j=1}^{\infty} \|v_j - \psi_j u\|_{k,p} \le \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\eta}{2^j} \le \eta.$$

co kończy dowód twierdzenia. $\diamond$

W przypadku gdy Ω jest zbiorem ograniczonym z gładkim brzegiem funkcje z przestrzeni $W^{k,p}(\Omega)$ można aproksymować funkcjami gładkimi także na brzegu Ω. Zachodzi mianowicie poniższe twierdzenie, którego dowód można znaleźć w monografii L. Evansa.

Twierdzenie 5. *Jeśli Ω jest ograniczony i $\partial\Omega$ jest klasy C^1 oraz $u \in W^{k,p}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}_0$, $1 \le p < \infty$, to istnieje ciąg $u_j \in C^\infty(\overline{\Omega})$ taki, że $u_j \to u$ w $W^{k,p}(\Omega)$ gdy $j \to \infty$.*

Przykład. Funkcji $u(x) = |x|$ nie daje się aproksymować funkcjami gładkimi w przestrzeni $W^{1,\infty}\big((-1,1)\big)$.

8.4. Twierdzenia o włożeniu

Okazuje się, że istnieją zanurzenia (włożenia) jednych przestrzeni Sobolewa w inne przestrzenie Sobolewa bądź też w przestrzenie funkcji ciągłych lub różniczkowalnych. Kluczowym narzędziem w dowodach twierdzeń o zanurzeniach są nierówności typu Sobolewa. Wykazuje się je najpierw dla funkcji gładkich, a następnie rozszerza się na funkcje z odpowiednich klas Sobolewa korzystając z twierdzeń o gęstości funkcji gładkich. Za względu na szczupłość miejsca podamy jedynie sformułowanie ogólnego twierdzenia Sobolewa o włożeniu oraz dowód nierówności Poincaré.

Twierdzenie 6. (Twierdzenie Sobolewa o włożeniu.) *Niech Ω będzie zbiorem ograniczonym o brzegu klasy C^1 oraz niech $u \in W^{k,p}(\Omega)$.*

(i) Jeśli $k < n/p$, to $u \in L^q(\Omega)$, gdzie $q = \frac{pn}{n-kp}$ oraz istnieje stała $C = C(n,k,p)$ taka, że

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \le C\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}. \tag{4}$$

(ii) Jeśli $k > n/p$, to $u \in C^l(\overline{\Omega})$, gdzie $l = k - 1 - \lfloor n/p \rfloor$ oraz istnieje stała $C = C(n,k,p)$ taka, że

$$\|u\|_{C^l(\overline{\Omega})} \le C\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}. \tag{5}$$

Dowód powyższego twierdzenia można znaleźć w monografii L. Evansa.

Twierdzenie 7 (Nierówność Poincaré). *Niech* $1 \leq p < \infty$ *oraz niech* Ω *będzie zbiorem ograniczonym. Wówczas istnieje stałą* $C = C(\Omega, p)$ *taka, że dla każdej funkcji* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *zachodzi*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}. \tag{6}$$

Dowód. Ponieważ przestrzeń $W_0^{1,p}(\Omega)$ jest domknięciem $C_0^\infty(\Omega)$ w normie $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ więc wystarczy wykazać, że nierówność (6) zachodzi dla każdej funkcji $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Niech $M < \infty$ będzie takie, że $\Omega \subset [-M, M]^n$. Wówczas korzystając z nierówności Höldera dostajemy

$$\begin{aligned}
|u(x)| &\leq \int_{-M}^{x_1} |u_{x_1}(t, x_2, ..., x_n)| dt \\
&\leq \int_{-M}^{M} 1 \cdot |\nabla u(t, x_2, ..., x_n)| dt \\
\text{(N. Höldera)} \quad &\leq (2M)^{(p-1)/p} \cdot \Big(\int_{-M}^{M} |\nabla u(t, x_2, ..., x_n)|^p dt \Big)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Podnosząc obie strony do potęgi p i całkując względem $x' = (x_2, ..., x_n)$ dostajemy

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u(x)|^p dx &\leq (2M)^{p-1} \cdot 2M \cdot \int_{[-M,M]^{n-1}} \int_{-M}^{M} |\nabla u(t, x')|^p dt dx' \\
&\leq (2M)^p \cdot \int_\Omega |\nabla u(x)|^p dx.
\end{aligned}$$

Zatem

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq 2M \cdot \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}. \qquad \diamond$$

8.5. Przestrzenie $H^k(\mathbb{R}^n)$

Okazuje się, że przestrzenie $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ dla $p = 2$ oznaczane jako $H^k(\mathbb{R}^n)$ można zdefiniować posługując się transformacją Fouriera. Mianowicie zachodzi

Twierdzenie 8. *Niech* $k \in \mathbb{N}_0$ *oraz* $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. *Wówczas następujące warunki są równoważne*

(i) $u \in H^k(\mathbb{R}^n)$;

(ii) $(1 + |\xi|^k)\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Ponadto, istnieje stała $0 < C < \infty$ *taka, że*

$$1/C \cdot \|u\|_{H^k(\mathbb{R}^n)} \leq \|(1 + |\xi|^k \widehat{u})\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{H^k(\mathbb{R}^n)}. \tag{7}$$

Dowód. $(i) \Rightarrow (ii)$. Niech $u \in H^k(\mathbb{R}^n)$. Jeśli $u \in C^k(\mathbb{R}^n)$, to dla $|\alpha| \le k$ mamy

$$\widehat{D^\alpha u} = (i\xi)^\alpha \widehat{u}.$$

Aproksymując u funkcjami gładkimi przekonujemy się, że wzór ten zachodzi też dla $u \in H^k(\mathbb{R}^n)$ przy czym D^α oznacza słabą pochodną. Biorąc $\alpha = k \cdot e_j$, gdzie e_j jest j-tym wersorem, $j = 1, ..., n$, ze wzoru Parsevala dostajemy

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\xi_j|^{2k} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\partial^k_{x_j} u}(\xi)|^2 d\xi = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} |\partial^k_{x_j} u(x)|^2 dx.$$

Ponieważ

$$(1 + |\xi|^k)^2 \le C\big(1 + |\xi_1|^{2k} + ... + |\xi_n|^{2k}\big)$$

dostajemy stąd, że $(1 + |\xi|^k)\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ oraz

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^k)^2 |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \le C \|u\|^2_{H^k(\mathbb{R}^n)}.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$. Niech $(1 + |\xi|^k)\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Wówczas dla $|\alpha| \le k$ mamy

$$\|(i\xi)^\alpha \widehat{u}(\xi)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2|\alpha|} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \le C \|(1 + |\xi|^k)\widehat{u}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Połóżmy $u_\alpha = \mathcal{F}^{-1}\big((i\xi)^\alpha \widehat{u}\big)$ dla $|\alpha| \le k$. Wówczas dla $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ korzystając z tożsamości Parsevala dostajemy

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} u(x) D^\alpha \varphi(x) dx &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}(\xi) \widehat{D^\alpha \varphi}(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} (i\xi)^\alpha \widehat{u}(\xi) \widehat{\varphi}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} u_\alpha(x) \varphi(x) dx.\end{aligned}$$

Zatem $u_\alpha = D^\alpha u$ w słabym sensie i $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ dla $|\alpha| \le k$. Czyli $u \in H^k(\mathbb{R}^n)$. $\diamond$

Powyższe twierdzenie uzasadnia poprawność następującej definicji.

Definicja. Niech $0 \le s < \infty$. Wówczas definiujemy
$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ takich, że

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \|(1 + |\xi|^s)\widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \infty \quad \}.$$

Jeśli $s < 0$, to przestrzeń $H^s(\mathbb{R}^n)$ definiuje się jako przestrzeń dualną do $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$.

Wniosek. *Jeśli $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ dla $s > n/2$, to u jest funkcją ciągłą, znikającą w ∞.*

Dowód. Ponieważ $u = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{u})$ więc na mocy Twierdzenia 7.1 wystarczy wykazać, że $\widehat{u} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Rzeczywiście tak jest gdyż na mocy nierówności Schwarza mamy

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\widetilde{u}(\xi)| d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{1+|\xi|^s} \cdot (1+|\xi|^s)|\widetilde{u}(\xi)| d\xi \\ &\leq \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \Big(\frac{1}{1+|\xi|^s} \Big)^2 d\xi \Big)^{1/2} \cdot \Big(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^s)^2 |\widetilde{u}(\xi)|^2 d\xi \Big)^{1/2} \\ &\leq C \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} < \infty,\end{aligned}$$

gdyż

$$C^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\frac{1}{1+|\xi|^s} \Big)^2 d\xi = \omega_{n-1} \int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(1+r^s)^2} dr < \infty \quad \text{o ile } s > n/2. \qquad \diamond$$

9. Równania eliptyczne rzędu 2

Równania eliptyczne rzędu 2 stanowią naturalne uogólnienie równań Laplace'a i Poissona, w których operator Δ jest zastąpiony ogólniejszym operatorem eliptycznym L drugiego rzędu. Własności rozwiązań równania $Lu = 0$ pod wieloma względami przypominają własności funkcji harmonicznych. Jednakże ponieważ nie dysponujemy jawnymi wzorami na rozwiązania podstawowe, musimy bezpośrednio pracować z samym równaniem oraz wykorzystywać pewne twierdzenia z analizy funkcjonalnej.

9.1. Postawienie zagadnienia

W istocie będziemy zajmować się zagadnieniem brzegowym

$$\begin{cases} Lu = f & \text{w} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ u_{|\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

gdzie $f : \Omega \to \mathbb{R}$ jest zadaną funkcją, zaś L jest operatorem różniczkowym postaci

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^n \big(a^{ij}(x) u_{x_i} \big)_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x) u_{x_i} + c(x) u. \tag{2}$$

Ta postać operatora L nazywa się *dywergencyjna*. Jeśli współczynniki a^{ij} są funkcjami klasy C^1, to operator L można przekształcić do postaci *niedywergencyjnej*; mianowicie kładąc

$$\widetilde{b^i} = b^i - \sum_{j=1}^n a^{ij}_{x_j}.$$

dostajemy

$$(2') \qquad Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} \widetilde{b}^i(x)u_{x_i} + c(x)u.$$

Będziemy zakładać, że macierz $A = \{a^{ij}\}_{i,j=1}^n$ jest symetryczna tzn. $a^{ij} = a^{ji}$ dla $i, j = 1, ..., n$.

Definicja. Mówimy, że operator L jest *eliptyczny* w obszarze Ω jeśli istnieje stała $\theta > 0$ taka, że

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2 \qquad \text{dla} \quad x \in \Omega, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Oznacza to, że macierz $A(x)$ jest dodatnio określona i jej wartości własne są $\geq \theta$ jednostajnie w obszarze Ω. Zauważmy, że w definicji eliptyczności operatora L występuje tylko założenie o dodatniej określoności macierzy A, natomiast funkcje b^i, $i = 1, ..., n$ oraz c mogą być dowolne.

Najprostszym przykładem operatora eliptycznego jest operator

$$L = -\Delta.$$

Wówczas dla $i, j = 1, ..., n$ mamy

$$a^{ij} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } i = j, \\ 0 & \text{gdy } i \neq j, \end{cases} \quad \text{natomiast} \quad b^i = c = 0.$$

W dalszym ciągu będziemy zakładać, że $f \in L^2(\Omega)$ oraz że współczynniki operatora L, a^{ij}, b^i, c są funkcjami ograniczonymi.

9.2.Słabe rozwiązania

Zastanówmy się najpierw jak należy zdefiniować słabe rozwiązania równania (1). W tym celu załóżmy, że funkcja u klasy C^1 spełnia $Lu = f$. Pomnóżmy obie strony przez funkcję $v \in C_0^\infty(\Omega)$ i otrzymany iloczyn przecałkujmy po Ω. Wówczas korzystając z faktu, że v znika na $\partial\Omega$ możemy wykonać całkowanie przez części otrzymując

$$-\int_\Omega \left(a^{ij}(x)u_{x_i}(x)\right)_{x_j} \cdot v(x)dx = \int_\Omega a^{ij}(x)u_{x_i}(x)v_{x_j}(x)dx.$$

Zatem dostaliśmy tożsamość

$$(3) \qquad \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)u_{x_i}(x)v_{x_j}(x) + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i}(x)v(x) + c(x)u(x)v(x) \right) dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx.$$

Ponieważ dowolną funkcją $v \in H_0^1(\Omega)$ możemy aproksymować ciągiem funkcji $v_j \in C_0^\infty(\Omega)$ wnioskujemy, że tożsamość (3) zachodzi dla wszystkich $v \in H_0^1(\Omega)$ oraz że ma ona sens nawet wówczas gdy jedynie wiemy, że rozwiązanie u należy do $H_0^1(\Omega)$. (Wówczas $u_{x_i} \in L^2(\Omega)$ i $v_{x_j} \in L^2(\Omega)$, a więc $u_{x_i} v_{x_j} \in L^1(\Omega)$.)

Definicja.

(i) Formą dwuliniową $B[\cdot,\cdot]$ odpowiadającą operatorowi (2) nazywamy wyrażenie

$$
\begin{aligned}
B[u,v] = \int_\Omega \Big(&\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) u_{x_i}(x) v_{x_j}(x) \\
&+ \sum_{i=1}^n b^i(x) u_{x_i}(x) v(x) + c(x)u(x)v(x) \Big) dx
\end{aligned}
\tag{4}
$$

gdzie $u, v \in H_0^1(\Omega)$.

(ii) Mówimy, że $u \in H_0^1(\Omega)$ jest słabym rozwiązaniem zagadnienia (1) jeśli

$$B[u,v] = < f, v > \qquad \text{dla każdego} \quad v \in H_0^1(\Omega)$$

gdzie $< f, v > = \int_\Omega f(x)v(x)dx$ jest iloczynem skalarnym w $L^2(\Omega)$.

Zauważmy, że zagadnienie z niezerowym warunkiem brzegowym

$$\begin{cases} Lu = f & \text{w} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ u_{|\partial\Omega} = g \end{cases}$$

można sprowadzić do zagadnienia

$$\begin{cases} L\widetilde{u} = \widetilde{f} & \text{w} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ u_{|\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

kładąc $\widetilde{u} = u - w$ gdzie $w_{|\partial\Omega} = g$ oraz $\widetilde{f} = f - Lw \in H^{-1}(\Omega)$.

9.3. Twierdzenie Laxa-Milgrama

W dowodzie twierdzenia o istnieniu słabych rozwiązań zagadnienia (1) skorzystamy z abstrakcyjnego twierdzenia z analizy funkcjonalnej.

Twierdzenie 1. *Niech H będzie rzeczywistą przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym $< \cdot, \cdot >$ i normą $\|\cdot\|$. Załóżmy, że $B : H \times H \to \mathbb{R}$ jest odwzorowaniem dwuliniowym takim, że dla pewnych stałych $0 < \alpha, \beta < \infty$ zachodzi*

$$(i) \qquad |B[u,v]| \le \alpha \|u\| \cdot \|v\| \quad dla \quad u, v \in H, \qquad \text{(warunek ciągłości)},$$

(ii) $\quad \beta\|u\|^2 \leq B[u,u]$ *dla* $u \in H$, (warunek koercytywności).

Niech $f : H \to \mathbb{R}$ *będzie ciągłym funkcjonałem na* H*. Wówczas istnieje dokładnie jeden element* $u \in H$ *taki, że*

$$B[u,v] = f[v] \quad \text{dla} \quad v \in H. \tag{5}$$

Dowód. **1.** Wobec ciągłości formy B dla każdego ustalonego $u \in H$ odwzorowanie

$$v \mapsto B[u,v]$$

jest ciągłym funkcjonałem na H. Na mocy twierdzenia Riesza o reprezentacji funkcjonałów na przestrzeni Hilberta istnieje dokładnie jeden element $w \in H$ taki, że

$$B[u,v] =< w, v > \quad \text{dla} \quad v \in H.$$

Mamy zatem odwzorowanie $H \ni u \mapsto Au = w$ oraz

$$B[u,v] =< Au, v > \quad \text{dla} \quad u,v \in H.$$

2. Wykażemy, że $A : H \to H$ jest liniowym ciągłym operatorem na H. Liniowość jest oczywista gdyż

$$\begin{aligned} < A(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2), v > &= B[\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v] \\ &= \lambda_1 B[u_1, v] + \lambda_2 B[u_2, v] \\ &= \lambda_1 < Au_1, v > + \lambda_2 < Au_2, v > \\ &=< \lambda_1 Au_1 + \lambda_2 Au_2, v > . \end{aligned}$$

W celu wykazania ciągłości zauważmy, że

$$\begin{aligned} \|Au\|^2 =< Au, Au > &= B[u, Au] \\ &\leq \alpha\|u\| \cdot \|Au\|. \end{aligned}$$

Zatem

$$\|Au\| \leq \alpha\|u\| \quad \text{dla} \quad u \in H$$

tzn. operator A jest ograniczony, a więc i ciągły.

3. Operator A jest różnowartościowy i jego obraz $R(A)$ jest domknięty w H.

Istotnie z warunku koercytywności (ii) i nierówności Schwarza mamy

$$\beta\|u\|^2 \leq B[u,u] =< Au, u > \leq \|Au\| \cdot \|u\|.$$

Zatem $\beta\|u\| \leq \|Au\|$. Stąd dostajemy różnowartościowość A, gdyż jeśli $Au = 0$, to $u = 0$. Załóżmy teraz, że dla $j \to \infty$, $u_j \to u$ w H oraz $Au_j \to v$ w H. Wówczas $u_j - u \to 0$, a więc

$$\begin{array}{l} Au_j - Au = A(u_j - u) \to 0, \\ \quad\;\downarrow \\ \;\; v - Au. \end{array}$$

Wobec różnowartościowości A mamy $v = Au$, czyli $R(A)$ jest domknięty.

4. $R(A) = H$.

Istotnie jeśli $R(A) \subsetneq H$, to wobec domkniętości $R(A)$ istnieje $0 \neq w \in R(A)^{\perp}$. Wówczas

$$\beta\|w\|^2 \leq B[w, w] =< Aw, w >= 0$$

gdyż $Aw \in R(A)$, natomiast $w \in R(A)^{\perp}$. Otrzymana sprzeczność dowodzi równości $R(A) = H$.

5. Ponownie korzystając z twierdzenia Riesza o reprezentacji wiemy, że istnieje $w \in H$ taki, że $f[v] =< w, v >$ dla $v \in H$. Z punktów 3. i 4. dowodu wynika, że istnieje $u \in H$ taki, że $Au = w$. Zatem dla $v \in H$

$$B[u, v] =< Au, v >=< w, v >= f[v]$$

czyli zachodzi (5).

6. Jednoznaczność. Załóżmy, że istnieją $u, \widetilde{u} \in H$ takie, że $B[u, v] = B[\widetilde{u}, v] = f[v]$ dla $v \in H$. Wówczas $B[u - \widetilde{u}, v] = 0$. Biorąc $v = u - \widetilde{u}$ i korzystając z warunku (ii) dostajemy

$$\beta\|u - \widetilde{u}\|^2 \leq B[u - \widetilde{u}, u - \widetilde{u}] = 0.$$

Stąd $u = \widetilde{u}$, co kończy dowód twierdzenia. $\diamond$

9.4. Istnienie słabych rozwiązań

Sprawdzimy teraz, że forma dwuliniowa zadana wzorem (4) spełnia założenia twierdzenia Laxa-Milgrama.

Twierdzenia 2 (Oszacowania energetyczne). *Istnieją stałe* $0 < \alpha, \beta < \infty$ *oraz* $\gamma \geq 0$ *takie, że dla wszystkich* $u, v \in H_0^1(\Omega)$ *mamy*

(i)
$$|B[u, v]| \leq \alpha\|u\|_{H_0^1} \cdot \|v\|_{H_0^1},$$

(ii)
$$\beta\|u\|_{H_0^1}^2 \leq B[u, u] + \gamma\|u\|_{L^2}^2.$$

Dowód. 1. W celu wykazania warunku ciągłości korzystając z definicji formy B dostajemy

$$
\begin{aligned}
|B[u,v]| &\le \sum_{i,j=1}^{n} \|a^{ij}\|_{L^\infty} \cdot \int_\Omega |\nabla u(x)| \cdot |\nabla v(x)| dx \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \|b^i\|_{L^\infty} \cdot \int_\Omega |\nabla u(x)| \cdot |v(x)| dx + \|c\|_{L^\infty} \cdot \int_\Omega |u(x)| \cdot |v(x)| dx \\
&\le \alpha \cdot \int_\Omega \Big(|u(x)| + |\nabla u(x)|\Big) \cdot \Big(|v(x)| + |\nabla v(x)|\Big) dx \\
&\le \alpha \cdot \|u\|_{H_0^1} \cdot \|v\|_{H_0^1}
\end{aligned}
$$

gdzie $\alpha = \max\big(\|a^{ij}\|_{L^\infty}, \|b^i\|_{L^\infty}, \|c\|_{L^\infty}\big) < \infty$.

2. Korzystając z eliptyczności operatora L dostajemy dla pewnego $\theta > 0$

$$
\begin{aligned}
\theta \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx &\le \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) u_{x_i}(x) u_{x_j}(x) dx \\
&= B[u,u] - \int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^{n} b^i(x) u_{x_i}(x) u(x) + c(x) u^2(x) \Big) dx \\
&\le B[u,u] + \sum_{i=1}^{n} \|b^i\|_{L^\infty} \cdot \int_\Omega |\nabla u(x)| \cdot |u(x)| dx \\
&+ \|c\|_{L^\infty} \cdot \int_\Omega |u(x)|^2 dx.
\end{aligned}
$$

Następnie korzystamy z elementarnej nierówności

$$
a \cdot b \le \varepsilon \cdot a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \cdot b^2 \quad \text{dla dowolnych} \quad a, b, \varepsilon > 0
$$

dostając

$$
\int_\Omega |\nabla u(x)| \cdot |u(x)| dx \le \varepsilon \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon} \int_\Omega |u(x)|^2 dx.
$$

Teraz dobieramy $\varepsilon > 0$ tak małe, aby $\varepsilon \cdot \sum_{i=1}^{n} \|b^i\|_{L^\infty} < \theta/2$. Wówczas

$$
\frac{\theta}{2} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx \le B[u,u] + \Big(\frac{1}{4\varepsilon} + \|c\|_{L^\infty} \Big) \cdot \int_\Omega |u(x)|^2 dx.
$$

Ale z nierówności Poincaré (Twierdzenie 7.7) mamy

$$
\|u\|_{L^2} \le C \|\nabla u\|_{L^2} \quad \text{dla} \quad u \in H_0^1(\Omega).
$$

Zatem

$$\|u\|_{H_0^1}^2 = \int_\Omega \big(|u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2\big)dx \le (1 + C^2)\|\nabla u\|_{L^2}^2$$

oraz dla $\beta > 0$ takiego, że $\beta(1 + C^2) \le \theta/2$,

$$\beta\|u\|_{H_0^1}^2 \le B[u,u] + \gamma\|u\|_{L^2}^2 \quad \text{gdzie} \ \ \gamma = \frac{1}{4\varepsilon} + \|c\|_{L^\infty}. \qquad \diamond$$

Twierdzenie 3 (O istnieniu słabych rozwiązań). *Istnieje liczba $\gamma \ge 0$ taka, że dla każdego $\mu \ge \gamma$ i dowolnej funkcji $f \in L^2(\Omega)$ zagadnienie*

$$\begin{cases} Lu + \mu u = f & w \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ u_{|\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{6}$$

posiada dokładnie jedno rozwiązanie $u \in H_0^1(\Omega)$.

Dowód. Niech $\gamma \ge 0$ będzie liczbą z tezy Twierdzenia 2. Określmy formę

$$B_\mu[u,v] = B[u,v] + \mu < u, v >,$$

która odpowiada operatorowi $L_\mu = L + \mu\mathrm{Id}$. Jeśli $\mu \ge \gamma$ to B_μ spełnia założenia twierdzenia Laxa-Milgrama. Zatem dla $f \in L^2(\Omega)$ istnieje dokładnie jedna funkcja $u \in H_0^1(\Omega)$ spełniająca

$$B_\mu[u,v] = f[v] \quad \text{dla} \ \ v \in H_0^1(\Omega).$$

Funkcja u jest jedynym słabym rozwiązaniem (6). $\diamond$

Wniosek 1. *Jeśli*

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^n \big(a^{ij}(x)u_{x_i}\big)_{x_j} + c(x)u$$

oraz $c(x) \ge 0$ dla $x \in \Omega$, to teza Twierdzenia 3 zachodzi dla każdego $\mu \ge 0$.

Uwaga. Równanie $Lu = \lambda u + f$ posiada jednoznaczne słabe rozwiązanie z wyjątkiem co najwyżej przeliczalnego zbioru $\lambda \in \mathbb{R}$ należących do tzw. widma (spektrum) operatora L. Badaniem postaci tego widma zajmuję się analiza spektralna operatorów.

Na zakończenie przytoczymy dwa twierdzenia o regularności rozwiązań równań eliptycznych. Dowody tych twierdzeń można znaleźć w monografii L. Evansa.

Twierdzenie 4. *Załóżmy, że $a^{ij} \in C^1(\Omega), b^i, c \in L^\infty(\Omega)$. Jeśli $u \in H^1(\Omega)$ jest słabym rozwiązaniem równania $Lu = f$ dla $f \in L^2(\Omega)$, to $u \in H^2_{loc}(\Omega)$ oraz dla każdego $V \subset\subset \Omega$*

$$\|u\|_{H^2(V)} \le C\Big(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\Big).$$

Twierdzenie 5. *Niech $m \in \mathbb{N}_0$. Załóżmy, że $a^{ij}, b^i, c \in C^{m+1}(\Omega)$. Jeśli $u \in H^1(\Omega)$ jest słabym rozwiązaniem równania $Lu = f$ dla $f \in H^m(\Omega)$, to $u \in H^{m+2}_{loc}(\Omega)$ oraz dla każdego $V \subset\subset \Omega$*

$$\|u\|_{H^{m+2}(V)} \leq C\Big(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\Big).$$

Zadania

1. Znaleźć funkcję $z = z(x,y)$ spełniającą równanie

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y} = z^2$$

taką, że $z(x,x) = \frac{1}{x}$ dla $x \neq 0$.

2. Znaleźć funkcję $z = z(x,y)$ spełniającą równanie

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xy}{z},$$

która na parze prostych $\{y = \pm x\}$ przyjmuje wartość $z = 1$. Określić dziedzinę funkcji $z(x,y)$.

3. Znaleźć funkcję $z = z(x,y)$ spełniającą równanie

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = -8xy\sqrt{z},$$

przyjmującą na prostej $\{y = x\}$ wartość $z(x,x) = x^4$. Określić dziedzinę funkcji $z(x,y)$.

4. Dane jest równanie

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Znaleźć rozwiązanie ogólne, a następnie wydzielić powierzchnię całkową przechodzącą przez krzywą $\{x = 0, z = y^2, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$.

5. Dane jest równanie różniczkowe rzędu 2

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - 6\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Znaleźć charakterystyki tego równania i podać postać rozwiązania ogólnego.

6. Dane jest równanie różniczkowe rzędu 2

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 10.$$

a). Znaleźć charakterystyki tego równania.
b). Podać postać rozwiązania ogólnego.
c). Znaleźć rozwiązanie tego równania spełniające warunki $u(x,0) = 0$, $u'_y(x,0) = 0$.

7. Znaleźć funkcję $u = u(x,y)$ spełniającą zagadnienie

$$\begin{cases} 2u_{xx} - 5u_{xy} + 2u_{yy} = 0, \\ u(x,0) = 2x, \\ u_y(x,0) = 4x^2. \end{cases}$$

8. Równanie Tricomiego

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

sprowadzić do postaci kanonicznej w obszarach $\{y > 0\}$ oraz $\{y < 0\}$. Narysować charakterystyki w obszarze $\{y < 0\}$.

9. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + abu = 0.$$

(**Wsk.** Położyć $u = ve^{\alpha x + \beta y}$ dla pewnych α, β.)

10*. Przy jakich założeniach na $v(x)$ problem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \ \text{ dla } \ -1 < x < 1, \ \ 0 < y < 1; \\[2ex] u_{|y\,=\,x^2} = 0 \ \text{ dla } \ -1 < x < 1; \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y}_{|y\,=\,x^2} = v(x) \ \text{ dla } \ -1 < x < 1 \end{cases}$$

ma rozwiązanie. Znaleźć je jeśli $v(x) = |x|$.

11. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

w obszarze $\{x > 0, \ y > 0\}$.
Wsk. Można podstawić $u = \ln x, \ v = \ln y$.

12. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}$$

podstawiając $u = x - 2\sqrt{y}, v = x + 2\sqrt{y}$.

13. Operator Laplace'a $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ wyrazić we współrzędnych biegunowych $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$.

14. Operator Laplace'a $\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ wyrazić we współrzędnych sferycznych $x = r\cos\varphi\cos\theta, y = r\sin\varphi\cos\theta, z = r\sin\theta$.

15. Pokazać, że dla dowolnych funkcji harmonicznych $u, v : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ zachodzi $\Delta(uv) = 2\nabla u \cdot \nabla v$.

16. Znaleźć funkcję harmoniczną w $B = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ taką, że $u(\cos\varphi, \sin\varphi) = \cos^2\varphi$.

17. Rozwiązać zagadnienie brzegowo-początkowe dla równania ciepła

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & (t,x) \in \mathbf{R}_+ \times (0,\pi), \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, & t \geq 0, \\ u(0,x) = \sin 2x, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

18. Rozwiązać zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2e^{-t}\cos x, & t > 0,\ x \in \mathbf{R}, \\ u(0,x) = \cos x, & x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

19. Rozwiązać metodą Fouriera zagadnienie mieszane dla równania struny

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & t > 0, 0 < x < 1, \\ u(0,x) = x - x^2, & 0 < x < 1, \\ u_t(0,x) = 0, & 0 < x < 1, \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Czy otrzymane rozwiązanie jest klasyczne?

20. Znaleźć rozwiązanie zagadnienia mieszanego w $\mathbf{R}_+ \times (0, \pi)$

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \cos t \sin x, & \\ u(0,x) = \sin^2 x, & 0 \le x \le \pi, \\ u_t(0,x) = \sin^3 x, & 0 \le x \le< \pi, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, & t \ge 0. \end{cases}$$

Czy otrzymane rozwiązanie jest klasyczne?

21. Rozwiązać zagadnienie mieszane dla równania tłumionej struny

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & (t,x) \in \mathbf{R}_+ \times (0,\pi), \\ u(0,x) = \sin x, & 0 \le x \le \pi, \\ u'_t(0,x) = 0, & 0 \le x \le \pi, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, & t \ge 0. \end{cases}$$

22. Znaleźć wszystkie funkcje f, dla których

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{t}} f\Big(\frac{x}{2\sqrt{t}}\Big)$$

jest rozwiązaniem (tzw. rozwiązaniem samopodobnym) równania ciepła $u_t = u_{xx}$.
Wsk. Jednym z rozwiązań jest $f(z) = e^{-z^2}$.

23. Znaleźć rozwiązanie zagadnienia

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \text{w} \quad P = \{1 < x^2 + y^2 < 4\}, \\ u(x,y) = a & \text{dla} \ \ x^2 + y^2 = 1, \\ u(x,y) = b & \text{dla} \ \ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

24. Rozwiązać zagadnienie

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 6 & \text{w } B = \{x^2 + y^2 + z^2 < 1\}, \\ u_{|\partial B} = 1. \end{cases}$$

Wsk. Szukać rozwiązania zależnego tylko od promienia.

25. Znaleźć ograniczone rozwiązanie zagadnienia

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0, & (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : z > 0, \\ u(x,y,0) = \cos x \cos y, & (x,y) \in \mathbf{R}^2. \end{cases}$$

Wsk. Rozdzielić zmienne.

26. Dana jest funkcja $f(x) = x\ln|x|$ dla $x \in (-1,0)\cup(0,1), f(0) = 0$. Czy f jest różniczkowalna w zwykłym sensie? Policzyć jej słabą pochodną. Dla jakich $1 \le p \le \infty$, $f \in W^{1,p}\big((-1,1)\big)$.

27. Policzyć słabe pochodne następujących funkcji określonych na $\mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{|x^2-1|+1}, \qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|+1}}.$$

Dla jakich $1 \le p \le \infty$ funkcje te należą do $W^{1,p}(\mathbb{R})$.

28. Niech

$$u(x) = \frac{|x|}{1+|x|^2} \;\text{ dla }\; x \in \mathbb{R}.$$

Pokazać, że $u \in H^1(\mathbf{R})$.

29. Niech $B = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < 1\}$, $s \in \mathbf{R}$. Połóżmy

$$f(x) = (1-|x|)^s \;\text{ dla }\; x \in B.$$

Dla jakich $1 \le p \le \infty$, $f \in W^{1,p}(B)$?

30. Niech $g = \chi_{[-1/2,1/2]}$, $h = g * g$. Policzyć $h(x)$ oraz $\mathcal{F}h(\xi)$.

31. Dana jest funkcja $f(x) = e^{-|x|}$ dla $x \in \mathbf{R}$. Policzyć jej słabą pochodną oraz $\mathcal{F}f$.

32. Niech

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \;\text{ dla }\; x \in \mathbf{R}.$$

Czy $f \in L^1(\mathbf{R})$? Czy $f \in L^2(\mathbf{R})$? Policzyć $\mathcal{F}f$.

33. Dana jest funkcja

$$f(x) = x^2 e^{-x^2} \;\text{ dla }\; x \in \mathbf{R}.$$

Policzyć jej transformatę Fouriera $\mathcal{F}f(\xi)$.

34. Niech

$$f(x) = (1-x^2)\cdot\chi_{[-1,1]}(x) \quad\text{dla}\quad x \in \mathbf{R}.$$

Policzyć transformatę Fouriera $\mathcal{F}f$.

35. Dla $k \in \mathbf{N}$ niech

$$f_k(x) = \begin{cases} k & \text{dla } x \in [-1/k, 1/k], \\ 0 & \text{dla } x \notin [-1/k, 1/k]. \end{cases}$$

Policzyć $\mathcal{F}f_k$ oraz $\lim_{k\to\infty}\mathcal{F}f_k(\xi)$.

36. Niech

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0, \\ 0 & \text{dla } x < 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \geq 0, \\ 0 & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Policzyć $f * g$.

37*. Dla $\alpha > 0$ niech

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & \text{gdy } x > 0, \\ 0 & \text{gdy } x \leq 0, \end{cases}$$

gdzie Γ jest funkcją Eulera zdefiniowaną dla $\alpha > 0$ wzorem $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$.
Pokazać, że
$f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta}$ dla $\alpha, \beta > 0$;
$(f_\alpha)' = f_{\alpha-1}$ w słabym sensie dla $\alpha > 1$.
Wsk. Wykorzystać wzór

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \quad \text{dla} \quad \alpha, \beta > 0.$$

38. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ będzie obszarem ograniczonym z gładkim brzegiem oraz $f \in L^2(\Omega)$. Równanie

$$-u_{xx} - 6u_{yy} + 4u_x - 2u_y - 6u = f$$

sprowadzić do postaci dywergencyjnej.

39. Niech Ω będzie ograniczonym obszarem w $\mathbf{R}^3$ z gładkim brzegiem. Udowodnić, że istnieje jednoznaczne słabe rozwiązanie zagadnienia

$$\begin{cases} -u_{xx} - 2u_{yy} - 4u_{zz} + u_x + 2u_y + u_z + u = f, \\ \\ u_{|\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

gdzie $f \in L^2(\Omega)$. Określić do jakiej przestrzeni należy to rozwiązanie.