

Uniwersytet Jana Kochanowskiego w Kielcach  
Wydział Matematyczno-Przyrodniczy  
Instytut Matematyki

Dr hab. prof. UJK GRZEGORZ ŁYSIK

## Równania Różniczkowe

Skrypt wykładów

Kielce, 2012.

# 1. Wstęp

Równaniami różniczkowymi nazywamy równania, w których obok nieznanymi funkcji  $u_1, \dots, u_m$  jednej lub wielu zmiennych występują jej pochodne. Ogólne równanie różniczkowe można zapisać w postaci

$$(1) \quad F\left(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, \left\{ \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\}_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}}, \left\{ \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} \right\}_{i_1, i_2=1, \dots, n}, \dots\right) = 0,$$

gdzie  $F$  jest zadaną funkcją. Jeśli  $F$  jest funkcją o wartościach rzeczywistych, to mamy do czynienia z jednym równaniem różniczkowym, jeśli natomiast wartości  $F$  leżą w  $\mathbb{R}^k$ ,  $k > 1$ , to mówimy o układzie równań różniczkowych. Jeśli niewiadome funkcje  $u_1, \dots, u_m$  zależą tylko od jednej zmiennej niezależnej, to równanie (układ) (1) jest równaniem różniczkowym zwyczajnym. Jeśli niewiadome funkcje zależą od wielu zmiennych, to mamy do czynienia z równaniem różniczkowym cząstkowym. Aczkolwiek teoria równań różniczkowych cząstkowych jest bardzo bogata i ma szerokie zastosowania praktyczne nie będziemy się nią zajmować i skoncentrujemy się na równaniach zwyczajnych i ich układach. Podamy tu tylko kilka przykładów

## 1. Równania Laplace'a i Poissona

$$\Delta u = 0, \quad \Delta u = f(x) \quad \text{gdzie} \quad \Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

## 2. Równanie ciepła

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u.$$

## 3. Równanie falowe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u.$$

## 4. Układ 2 równań zwyczajnych

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dx} = f_1(x, u_1, u_2), \\ \frac{du_2}{dx} = f_2(x, u_1, u_2). \end{cases}$$

## 1.1. Podstawowe definicje.

W teorii równań różniczkowych zwyczajnych wygodnie jest interpretować zmienną niezależną jako czas, np. równanie

$$m \frac{dv(t)}{dt} = f(t)$$

wyraża zależność prędkości  $v$  w chwili  $t$  cząstki o masie  $m$  pod działaniem siły  $f$  zależnej od czasu  $t$ . Często pochodną funkcji względem czasu oznacza się kropką nad tą funkcją. Wówczas powyższe równanie przyjmuje postać

$$m\dot{v}(t) = f(t).$$

**Definicja.** *Rzędem równania różniczkowego* nazywamy liczbę naturalną będącą rzędem najwyższej pochodnej występującej w równaniu.

Ogólne równanie różniczkowe rzędu  $k$  zapisuje się w postaci

$$(2) \quad F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(k)}) = 0,$$

gdzie  $x$  jest nieznaną funkcją zmiennej  $t$ . Tradycyjny zapis równania (2) wygląda następująco

$$F\left(t, x(t), \frac{dx}{dt}(t), \frac{d^2x}{dt^2}(t), \dots, \frac{d^kx}{dt^k}(t)\right) = 0.$$

**Definicja.** *Rozwiązaniem szczególnym* równania (2) nazywamy dowolną funkcję  $x$  zmiennej  $t$  określoną na przedziale  $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ ,  $k$ -krotnie różniczkowalną taką, że po wstawieniu  $x$  i jej pochodnych do równania (2) otrzymujemy tożsamość na przedziale  $I$ . Zbiór wszystkich rozwiązań szczególnych nazywamy *rozwiązaniem ogólnym*.

**Przykład.** Rozwiązaniem szczególnym równania

$$\dot{v}(t) = f(t),$$

gdzie  $f$  jest funkcją ciągłą określoną na przedziale  $(a, b)$  jest dowolna funkcja postaci

$$v(t) = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau,$$

gdzie  $t_0$  jest ustalonym punktem przedziału  $(a, b)$ . Rozwiązaniem ogólnym tego równania jest zbiór funkcji postaci

$$v(t) = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau + C, \quad \text{gdzie } C \in \mathbb{R}.$$

Zauważmy, że ogólnie funkcja  $F$  występująca we wzorze (2) wyraża związek pomiędzy  $k+2$  zmiennymi  $(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(k)})$ . Często ostatnią zmienną, czyli  $x^{(k)}$ , daje się wyrazić jako funkcję pozostałych  $k+1$  zmiennych  $(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(k-1)})$ . Mówimy wówczas o równaniu rzędu  $k$  *rozwiązany względem najwyższej pochodnej*. Można je zapisać w postaci

$$(3) \quad x^{(k)} = f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(k-1)}).$$

W szczególności, równanie rzędu pierwszego rozwiązane względem pochodnej wygląda następująco

$$(4) \quad \dot{x} = f(t, x).$$

Przedstawimy teraz interpretację geometryczną równania (4). W tym celu założymy, że  $f$  jest funkcją określoną i ciągłą w obszarze  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Rozwiązaniem szczególnym równania (4) jest funkcja  $x = \varphi(t)$  różniczkowalna w pewnym przedziale  $I \subset \mathbb{R}$  taka, że

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = f(t, \varphi(t)) \quad \text{dla każdego } t \in I,$$

gdzie  $I$  jest otwartym odcinkiem w  $\mathbb{R}$ . Wykres funkcji  $\varphi$  tzn. zbiór  $\{(t, \varphi(t)) : t \in I\}$  nazywamy *krzywą całkową* równania (4). Zbiór wszystkich krzywych całkowych równania (4) można utożsamiać z rozwiązaniem ogólnym tego równania.

Zgodnie z tym co zaobserwowaliśmy w Przykładzie 1 rozwiązań równania (4) jest na ogół bardzo dużo. Badanie struktury przestrzeni rozwiązań będzie jednym z naszych celów. Często zachodzi potrzeba znalezienia rozwiązania, które w pewnej chwili  $t_0$  przyjmuje ustaloną wartość  $x_0$ . Mówimy, że wówczas rozwiązanie spełnia *warunek początkowy Cauchy'ego*

$$(5) \quad x(t_0) = x_0.$$

Podstawowe twierdzenie teorii równań różniczkowych powiada, że jeśli funkcja  $f$  jest ciągłą w  $\Omega$  oraz posiada ciągłą pochodną cząstkową względem zmiennej  $x$ , to dla dowolnych  $(t_0, x_0) \in \Omega$  istnieje dokładnie jedno rozwiązanie równania (4) spełniające warunek (5). Innymi słowy, przez punkt  $(t_0, x_0)$  przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa.

## 1.2 Równanie wahadła matematycznego.

Wyprowadzimy teraz równanie wahadła matematycznego (równanie huśtawki). Założymy, że w punkcie  $O = (0, 0)$  układy współrzędnych  $(x, y)$ , przy czym oś  $0Y$  jest skierowana pionowo w dół, jest zaczepiona nieważka,

sztynna nić długości  $l$ , na której końcu znajduje się cząstka o masie  $m$ . Niech  $\varphi$  oznacza kąt pomiędzy osią  $OY$  a kierunkiem nici.

Wówczas położenie cząstki w chwili  $t$  wyraża się przez

$$(1) \quad r(t) = (l \sin \varphi(t), l \cos \varphi(t)).$$

Zgodnie z drugim prawem mechaniki Newtona mamy

$$ma(t) = G + R,$$

gdzie  $a(t)$  jest przyspieszeniem cząstki,  $G = (0, mg)$  jest siłą ciężkości, a  $R$  jest siłą wyporu nici (siłą odśrodkową). Ponieważ przyspieszenie jest drugą pochodną położenia względem czasu dostajemy równanie

$$(2) \quad m\ddot{r}(t) = G + R.$$

Różniczkując dwukrotnie (1) względem czasu dostajemy

$$(3) \quad \ddot{r}(t) = \left( -l(\dot{\varphi}(t))^2 \sin \varphi(t) + l\ddot{\varphi}(t) \cos \varphi(t), -l(\dot{\varphi}(t))^2 \cos \varphi(t) - l\ddot{\varphi}(t) \sin \varphi(t) \right).$$

Mnożąc skalarnie równanie (2) przez wektor

$$e(t) = (\cos \varphi(t), -\sin \varphi(t))$$

jednostkowy i styczny do okręgu po którym porusza się cząstka korzystając z (1) i (3) oraz z faktu, że  $e \perp R$  dostajemy

$$ml\ddot{\varphi}(t) = -mg \sin \varphi(t).$$

Zatem

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{l} \sin \varphi(t).$$

Jest to równanie ruchu wahadła matematycznego. Ponieważ  $\sin \varphi \sim \varphi$  dla małych  $\varphi$  dostajemy również zlinearyzowane równanie wahadła

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{l} \varphi(t).$$

## 2. Szczególne typy równań

Zajmiemy się teraz rozwiązywaniem pewnych szczególnych typów równań.

### 2.1. Równania nie zawierające szukanej funkcji.

Jest to równanie postaci

$$(1) \quad \dot{x} = f(t),$$

gdzie  $f$  jest funkcją określoną na przedziale  $I \subset \mathbb{R}$ . Jeśli  $f$  jest funkcją ciągłą na  $I$ , to rozwiązaniem ogólnym (1) jest

$$x(t) = \int f(\tau) d\tau.$$

Natomiast rozwiązaniem problemu początkowego

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x} &= f(t), \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

jest

$$x = \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau.$$

Istotnie, funkcja  $I \ni t \mapsto \varphi(t)$  jest różniczkowalna oraz

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = f(t), \quad \varphi(t_0) = x_0$$

Warto zauważyć, że cały pas  $I \times \mathbb{R}$  jest wypełniony nie przecinającymi się krzywymi całkowymi równania (1).

### 2.2. Równania nie zawierające zmiennej niezależnej.

Jest to równanie postaci

$$(3) \quad \dot{x} = g(x),$$

gdzie  $g$  jest funkcją określoną na przedziale  $J \subset \mathbb{R}$ . Zauważmy, że jeśli  $g$  zeruje się w pewnym punkcie  $\hat{x} \in J$  tzn.  $g(\hat{x}) = 0$ , to  $x(t) = \hat{x}$  jest rozwiązaniem szczególnym równania (3). Natomiast jeśli  $g$  nie zeruje się w przedziale  $J_1$  to równanie odwrócone

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{g(x)}$$

jest równaniem, które nie zawiera szukanej funkcji  $t = t(x)$ . Zatem jeśli  $g$  jest ciągła, to jego rozwiązaniem ogólnym jest

$$t(x) = \int \frac{1}{g(y)} dy,$$

a rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego dla równania odwróconego

$$\begin{cases} \frac{dt}{dx} &= \frac{1}{g(x)}, \\ t(x_0) &= t_0 \end{cases}$$

jest funkcja

$$t(x) = t_0 + \int_{x_0}^x \frac{1}{g(y)} dy.$$

W celu otrzymania rozwiązania oryginalnego równania (3) należy wyznaczyć  $x$  jako funkcję zmiennej  $t$ . Zauważmy, że cały pas  $\mathbb{R} \times J$  jest wypełniony nie przecinającymi się krzywymi całkowymi równania (3).

### 2.3. Równania postaci $\dot{x} = h(at + bx)$ .

Stosując liniową zamianę zmiennych

$$y = at + bx, \quad \dot{y} = a + b\dot{x}$$

równanie to sprowadza się do równania nie zawierającego zmiennej niezależnej

$$\dot{y} = a + bh(y).$$

### 2.4. Równania o zmiennych rozdzielonych.

Równaniem o zmiennych rozdzielonych nazywany równanie postaci

$$(4) \quad f(t)dt + g(x)dx = 0,$$

gdzie  $f$  i  $g$  są funkcjami ciągłymi odpowiednio na przedziałach  $I$  i  $J$ . Zauważmy, że równanie to można zapisać w postaci

$$d\left(\int_{t_0}^t f(\tau)d\tau + \int_{x_0}^x g(y)dy\right) = 0,$$

z której wynika, że rozwiązanie ogólne (4) jest dane w postaci uwikłanej

$$(5) \quad \int_{t_0}^t f(\tau)d\tau + \int_{x_0}^x g(y)dy = C,$$

gdzie  $C$  jest dowolną stałą. Jeśli  $f(t_0) \neq 0$  lub  $g(x_0) \neq 0$ , to rozwiązaniem problemu Cauchy'ego

$$(4') \quad \begin{cases} \int f(t)dt + g(x)dx & = 0, \\ x(t_0) & = x_0 \end{cases}$$

jest

$$(5') \quad \int_{t_0}^t f(\tau)d\tau + \int_{x_0}^x g(y)dy = 0.$$

Istotnie położmy

$$F(t, x) = \int_{t_0}^t f(\tau)d\tau + \int_{x_0}^x g(y)dy.$$

Jeśli  $f$  i  $g$  są ciągłe w przedziałach  $\{|t - t_0| < A\}$  i  $\{|x - x_0| < B\}$ , to funkcja  $F$  jest ciągła w prostokącie  $\{|t - t_0| < A\} \times \{|x - x_0| < B\}$  oraz posiada pochodne cząstkowe  $F'_t(t, x) = f(t)$ ,  $F'_x(t, x) = g(x)$ . Ponadto  $F(t_0, x_0) = 0$  oraz  $F'_x(t_0, x_0) = g(x_0) \neq 0$  (lub  $F'_t(t_0, x_0) = f(t_0) \neq 0$ ). Zatem na podstawie twierdzenia o funkcji uwikłanej w otoczeniu punktu  $t_0$  istnieje funkcja  $x = x(t)$  spełniająca  $F(t, x(t)) = 0$ ,  $x(t_0) = x_0$  (lub otoczeniu punktu  $x_0$  istnieje funkcja  $t = t(x)$  spełniająca  $F(x, t(x)) = 0$ ,  $t(x_0) = t_0$ ).

## 2.5. Równania o zmiennych rozdzielających się.

Są to równania postaci

$$(6) \quad f_1(t)g_1(x)dt + f_2(t)g_2(x)dx = 0,$$

gdzie  $f_1, f_2$  i  $g_1, g_2$  są funkcjami ciągłymi. Zauważmy, że jeśli  $f_2(t) \neq 0$  i  $g_1(x) \neq 0$ , to dzieląc równanie (6) przez

$$f_2(t)g_1(x)$$

dostajemy równanie o zmiennych rozdzielonych

$$\frac{f_1(t)}{f_2(t)}dt + \frac{g_2(x)}{g_1(x)}dx = 0.$$

Ponadto, jeśli równania  $f_2(t) = 0$  i  $g_1(x) = 0$  posiadają rzeczywiste rozwiązania, to są one rozwiązaniami szczególnymi (6).

**Uwaga.** Równania o zmiennych rozdzielających się stanowią podstawowy typ równań całkownych za pomocą kwadratur. Całkowanie innych równań odbywa się poprzez sprowadzenie przy pomocy odpowiedniej zamiany zmiennych do równań o zmiennych rozdzielających się.



## 2.6. Równanie zupełne.

Równanie

$$(7) \quad M(t, x)dt + N(t, x)dx = 0,$$

nazywamy *zupełnym* jeśli jego lewa strona jest różniczką pewnej funkcji  $F(t, x)$  klasy  $C^1$ , tzn.

$$(8) \quad dF(t, x) = M(t, x)dt + N(t, x)dx.$$

Ponieważ druga różniczka zewnętrzna funkcji jest tożsamościowo równa zeru, więc

$$0 = d^2F(t, x) = (M'_x(t, x) - N'_t(t, x))dt \wedge dx$$

Zatem *warunkiem zupełności* równania (7) jest

$$(9) \quad M'_x(t, x) = N'_t(t, x) \quad \text{dla} \quad (t, x) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2.$$

Zauważmy, że równanie (7) może też występować w formie niesymetrycznej

$$(7') \quad M(t, x) + N(t, x)\frac{dx}{dt} = 0.$$

W celu scałkowania równania (7) należy znaleźć funkcję  $F$ , spełniającą (8). Wówczas

$$F(t, x) = C$$

jest rozwiązaniem ogólnym (7). Ponieważ

$$dF(t, x) = F'_t(t, x)dt + F'_x(t, x)dx$$

więc wobec (8) zachodzi

$$(10) \quad F'_t(t, x) = M(t, x) \quad \text{oraz} \quad F'_x(t, x) = N(t, x).$$

Całkując pierwsze równanie w (10) względem  $t$  dostajemy

$$F(t, x) = \int_{t_0}^t M(\tau, x)d\tau + C(x).$$

Następnie uwzględniając warunek zupełności (9) oraz drugie równanie w (10)

$$\begin{aligned} F'_x(t, x) &= \int_{t_0}^t M'_x(\tau, x)d\tau + C'(x) = \int_{t_0}^t N'_\tau(\tau, x)d\tau + C'(x) \\ &= N(t, x) - N(t_0, x) + C'(x) = N(t, x). \end{aligned}$$

Zatem

$$C'(x) = N(t_0, x).$$

Stąd

$$C(x) = \int_{x_0}^x N(t_0, y)dy - C$$

dla pewnego  $C \in \mathbb{R}$ . Ostatecznie funkcja  $F(t, x)$  dana wzorem

$$(11) \quad F(t, x) = \int_{t_0}^t M(\tau, x)d\tau + \int_{x_0}^x N(t_0, y)dy$$

spełnia (7) z warunkiem początkowych  $F(t_0, x_0) = 0$ .

## 2.7. Równania jednorodne.

**Definicja.** Funkcja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  nazywa się *jednorodną rzędu*  $m \in \mathbb{N}_0$  jeśli dla dowolnego  $r \in \mathbb{R}$  zachodzi

$$(12) \quad f(rx) = r^m f(x) \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}^n.$$

*Równaniem jednorodnym* nazywamy równanie postaci

$$(13) \quad M(t, x)dt + N(t, x)dx = 0,$$

przy czym funkcje  $M$  i  $N$  określone na  $\mathbb{R}^2$  są jednorodne tego samego stopnia. Przyjmując w (12)  $r = t^{-1}$  dostajemy

$$M(t, x) = t^m M\left(1, \frac{x}{t}\right) \quad \text{oraz} \quad N(t, x) = t^m N\left(1, \frac{x}{t}\right).$$

Następnie wstawiając do (13) i grupując wnioskujemy, że równanie jednorodne można zapisać w postaci

$$(14) \quad \frac{dx}{dt} = K\left(\frac{x}{t}\right), \quad \text{gdzie } K\left(\frac{x}{t}\right) = -\frac{M(1, x/t)}{N(1, x/t)}.$$

Z powyższego wzoru widzimy, że w początku układu współrzędnych równanie nie wyznacza żadnego określonego kierunku pola. Zatem przez początek układu nie przechodzi żadna krzywa całkowa. W celu scałkowania równania (14) podstawiamy  $x(t) = t \cdot y(t)$ . Wówczas  $\dot{x} = y + ty$ . Zatem (14) sprowadza się do równania o zmiennych rozdzielonych

$$ty = -y + K(y).$$

### 3. Równanie liniowe.

Równaniem liniowym rzędu 1 nazywamy równanie

$$(1) \quad \dot{x} + p(t)x = q(t),$$

gdzie  $p$  i  $q$  są funkcjami ciągłymi na przedziale  $I = (a, b)$ . Jeśli prawa strona jest równa tożsamościowo zero, to równanie (1) nazywamy *równaniem liniowym jednorodnym*, w przeciwnym przypadku *równaniem liniowym niejednorodnym*.

#### 3.1. Własności równania liniowego.

Przed przystąpieniem do całkowania równania (1) zannotujmy dwie własności równań liniowych.

**Własność 1.** Równanie liniowe pozostaje liniowe przy dowolnej zamianie zmiennej niezależnej  $t = h(\tau)$ , gdzie  $h \in C^1((\tau_1, \tau_2))$ ,  $a = h(\tau_1)$ ,  $b = h(\tau_2)$  oraz  $h'(\tau) \neq 0$  dla  $\tau \in (\tau_1, \tau_2)$ .

**Dowód.** Zauważmy, że warunek  $h'(\tau) \neq 0$  dla  $\tau \in (\tau_1, \tau_2)$  gwarantuje istnienie funkcji odwrotnej  $\tau = h^{-1}(t)$ . Ze wzorów na pochodną złożenia funkcji oraz pochodną funkcji odwrotnej mamy

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \cdot \frac{dh^{-1}(t)}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \cdot \frac{1}{\frac{dt}{d\tau}} = \frac{dx}{d\tau} \cdot \frac{1}{h'(\tau)}.$$

Zatem wstawiając  $t = h(\tau)$  do równania (1) dostajemy

$$\frac{dx}{d\tau} + p(h(\tau)) \cdot h'(\tau)x = q(h(\tau)) \cdot h'(\tau).$$

Jest to równanie liniowe przy czym nowe funkcje  $\tilde{p}(\tau) = p(h(\tau)) \cdot h'(\tau)$  i  $\tilde{q}(\tau) = q(h(\tau)) \cdot h'(\tau)$  są funkcjami ciągłymi.  $\diamond$

**Własność 2.** Równanie liniowe pozostaje liniowe przy liniowej zamianie szukanej funkcji

$$x = f(t)y + g(t),$$

gdzie  $y$  jest nową szukaną funkcją,  $f, g \in C^1((a, b))$  przy czym  $f(t) \neq 0$  w  $(a, b)$ .

**Dowód.** Różniczkując względem  $t$  mamy

$$\dot{x} = \dot{f}y + f\dot{y} + \dot{g}.$$

Zatem po wstawieniu do (1)

$$\dot{f}y + f\dot{y} + \dot{g} + p(fy + g) = q.$$

Stąd wobec założenia, że  $f(t) \neq 0$  w  $(a, b)$ ,

$$\dot{y} + \frac{\dot{f} + fp}{f}y = \frac{q - \dot{g} - pg}{f}. \quad \diamond$$

### 3.2. Równanie liniowe jednorodne.

Równaniem liniowym jednorodnym rzędu 1 nazywamy równanie

$$(2) \quad \dot{x} + p(t)x = 0,$$

gdzie  $p$  jest funkcją ciągłą na przedziale  $I = (a, b)$ . Zauważmy, że zapisując równanie (2) w postaci

$$dx + p(t)xdt = 0$$

dostajemy równanie o rozdzielających się zmiennych. Oczywiście  $x(t) \equiv 0$  jest jego rozwiązaniem szczególnym. Zakładając, że  $x(t) \neq 0$  możemy rozdzielić zmienne

$$\frac{dx}{x} = -p(t)dt.$$

Całkując

$$\ln|x| = - \int p(t)dt + C_1.$$

Stąd

$$x(t) = \pm \exp\{C_1\} \cdot \exp\{- \int p(t)dt\}.$$

Zatem uwzględniając rozwiązanie zerowe dostajemy wzór na rozwiązanie ogólne

$$(3) \quad x(t) = C \exp\{- \int p(t)dt\}, \quad \text{gdzie } C \in \mathbb{R}.$$

Z powyższego wzoru wynika, że rozwiązanie ogólne równania (1) jest przestrzenią liniową wymiaru 1 nad  $\mathbb{R}$ . Rozwiązaniem problemu Cauchy'ego

$$(2') \quad \begin{cases} \dot{x} + p(t)x & = 0, \\ x(t_0) & = x_0 \end{cases}$$

jest

$$x(t) = x_0 \exp\{- \int_{t_0}^t p(\tau)d\tau\}.$$

### 3.3. Równanie liniowe niejednorodne.

**Twierdzenie 1.** *Jeśli  $x_1 = x_1(t)$  jest rozwiązaniem szczególnym równania liniowego niejednorodnego (1), to rozwiązanie ogólne tego równania jest dane wzorem*

$$(4) \quad x = x_1 + z,$$

gdzie  $z$  jest rozwiązaniem ogólnym równania liniowego jednorodnego (2).

**Dowód.** Wstawiając (4) do (1) mamy

$$\dot{x} + p(t)x = \dot{x}_1 + \dot{z} + p(t)(x_1 + z) = \dot{x}_1 + p(t)x_1 + \dot{z} + p(t)z = q(t).$$

Zatem wzór (4) daje rozwiązanie równania (1). Z drugiej strony łatwo zauważyć, że różnica dwóch rozwiązań równania (1) jest rozwiązaniem równania (2).  $\diamond$

Podstawiając w (4) postać rozwiązania ogólnego równania jednorodnego (2) dostajemy wzór na rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego(1)

$$(5) \quad x = x_1 + C \exp\left\{-\int p(t)dt\right\}, \quad \text{gdzie } C \in \mathbb{R},$$

natomiast  $x_1$  jest rozwiązaniem szczególnym równania (1). Z twierdzenia 1 wynika, że w celu znalezienia rozwiązania ogólnego równania niejednorodnego (1) wystarczy znaleźć jedno rozwiązanie szczególne tego równania. Można to zrobić metodą Lagrange'a, która polega na uzmiennianiu stałej  $C$  we wzorze (3) na rozwiązanie ogólne równania jednorodnego. Mianowicie szukamy rozwiązania szczególnego równania (1) w postaci

$$(5) \quad x(t) = C(t) \exp\left\{-\int p(t)dt\right\}.$$

Różniczkując (5) względem  $t$  mamy

$$\dot{x}(t) = \dot{C}(t) \exp\left\{-\int p(t)dt\right\} - C(t)p(t) \exp\left\{-\int p(t)dt\right\}.$$

Po wstawieniu do (1) i skróceniu dostajemy

$$\dot{C}(t) = q(t) \exp\left\{\int p(t)dt\right\}.$$

Stąd

$$C(t) = \int q(t) \exp\left\{\int p(t)dt\right\}dt + C.$$

Podstawiając to wyrażenie do (5) dostajemy wzór na rozwiązanie ogólne równania (1)

$$(6) \quad x(t) = \exp\left\{-\int p(t)dt\right\}\left(C + \int q(t) \exp\left\{\int p(t)dt\right\}dt\right).$$

Rozwiązaniem problemu Cauchy'ego

$$(1') \quad \begin{cases} \dot{x} + p(t)x &= q(t), \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

jest

$$(7) \quad x(t) = \exp\left\{-\int_{t_0}^t p(\tau)d\tau\right\}\left(x_0 + \int_{t_0}^t q(\xi) \exp\left\{\int_{\xi}^t p(\tau)d\tau\right\}d\xi\right).$$

### 3.4. Równanie Bernoulliego.

Równaniem Bernoulliego nazywamy równanie postaci

$$(8) \quad \dot{x} + f(t)x = g(t) \cdot x^\alpha,$$

gdzie  $f$  i  $g$  są funkcjami ciągłymi, natomiast  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Jeśli  $\alpha = 0$  lub  $\alpha = 1$ , to równanie (8) jest równaniem liniowym. W przeciwnym wypadku jest to równanie nieliniowe, które łatwo sprowadza się do równania liniowego. Mianowicie dzieląc obie strony przez  $x^\alpha$

$$\frac{\dot{x}}{x^\alpha} + f(t) \cdot x^{1-\alpha} = g(t),$$

a następnie wprowadzając zmienną  $y = x^{1-\alpha}$  (wówczas  $\dot{y} = (1 - \alpha)\dot{x}/x^\alpha$ ) dostajemy równanie liniowe

$$\frac{\dot{y}}{1 - \alpha} + f(t)y = g(t).$$

Zauważmy jeszcze, że jeśli  $\alpha > 0$  to  $x \equiv 0$  jest rozwiązaniem szczególnym równania Bernoulliego (8). Jest ono osobliwe o ile  $0 < \alpha < 1$ .

#### Uwagi.

**1.** Tylko szczególne równania całkują się przez kwadratury, n.p. równanie  $\dot{x} = x^2 + t$  nie rozwiązuje się przez kwadratury.

**2.** Równania, które można rozwiązać przez kwadratury bywają użyteczne jako przykłady.

**3.** Czasami otrzymuje się skomplikowany wzór na rozwiązanie, z którego trudno wywnioskować własności rozwiązań. Własności te czasami można uzyskać stosując metody jakościowej teorii równań różniczkowych.

## 4. Twierdzenia o istnieniu rozwiązań.

### 4.1. Zasada Banacha.

Niech  $f$  będzie funkcją określoną na odcinku  $I = [a, b]$  o wartościach wektorowych w  $\mathbb{R}^k$ , tzn.  $f = (f_1, \dots, f_k)$  gdzie  $f_i : I \rightarrow \mathbb{R}$  dla  $i = 1, \dots, k$ . Całkę Riemanna funkcji  $f$  określamy wzorem

$$\int_a^b f(t)dt = \left( \int_a^b f_1(t)dt, \dots, \int_a^b f_k(t)dt \right) \in \mathbb{R}^k.$$

Normę euklidesową wektora  $w = (w_1, \dots, w_k) \in \mathbb{R}^k$  definiujemy przez

$$\|w\| = \left( \sum_{i=1}^k |w_i|^2 \right)^{1/2}.$$

**Fakt 1.** Jeśli istnieje całka Riemanna funkcji  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^k$ , to

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|dt.$$

**Fakt 2.** Jeśli  $f$  jest funkcją ciągłą na  $I$ , to jest ona całkowna w sensie Riemanna.

**Definicja.** Niech  $(X, \rho)$  będzie przestrzenią metryczną. Odwzorowanie  $A : X \rightarrow X$  nazywamy *związującym* jeśli istnieje stała  $0 < \lambda < 1$  taka, że dla dowolnych  $x, y \in X$  mamy

$$\rho(Ax, Ay) \leq \lambda \rho(x, y).$$

Łatwo zauważyć, że odwzorowanie związujące jest ciągłe.

**Definicja.** Punkt  $\hat{x} \in X$  nazywamy punktem *stałym* odwzorowania  $A : X \rightarrow X$  jeśli  $A\hat{x} = \hat{x}$ .

**Przykład.** Niech  $A : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  będzie odwzorowaniem liniowym, tzn.  $Ax = Mx$  dla pewnej macierzy  $M \in M(k \times k)$ . Wówczas punkt 0 jest punktem stałym odwzorowania  $A$ .  $A$  jest odwzorowaniem związującym wtedy i tylko wtedy, gdy moduły wartości własnych macierzy  $M$  są mniejsze od 1.

**Twierdzenie 1.** (Banacha o punkcie stałym.) *Niech  $A$  będzie odwzorowaniem związującym przestrzeni metrycznej, zupełnej  $X$  w siebie. Wówczas istnieje dokładnie jeden punkt stały odwzorowania  $A$ . Ponadto, jest wyznaczony jako granica ciągu  $\{A^n \hat{x}\}$ , gdzie  $\hat{x}$  jest dowolnym punktem przestrzeni  $X$ .*

**Dowód.** Weźmy dowolny punkt  $\dot{x} \in X$  i oznaczmy  $d = \rho(\dot{x}, A\dot{x})$ . Korzystając z definicji odwzorowania zwięzającego oraz indukcji matematycznej łatwo zauważyć, że dla  $n \in \mathbb{N}_0$  zachodzi

$$\rho(A^n \dot{x}, A^{n+1} \dot{x}) \leq \lambda^n d,$$

gdzie  $0 < \lambda < 1$ . Ponieważ szereg  $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n d$  jest zbieżny, więc ciąg  $\{A^n \dot{x}\}_{n=0}^{\infty}$  jest ciągiem Cauchy'ego w  $M$ . Wobec zupełności przestrzeni  $M$  istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n \dot{x} = x.$$

Korzystając z ciągłości odwzorowania  $A$  dostajemy

$$Ax = A \lim_{n \rightarrow \infty} A^n \dot{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} A^{n+1} \dot{x} = x.$$

Zatem  $x$  jest punktem stałym  $A$ . Jeśli  $y$  też jest punktem stałym  $A$ , to ponieważ

$$\rho(x, y) = \rho(Ax, Ay) \leq \lambda \rho(x, y)$$

oraz  $\lambda < 1$ , więc musi zachodzić  $\rho(x, y) = 0$ . Stąd  $x = y$ .  $\diamond$

## 4.2. Warunek Lipschitza.

**Definicja.** Niech  $V$  będzie otwartym podzbiorem  $\mathbb{R}^k$  oraz  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ . Mówimy, że odwzorowanie

$$f : I \times V \rightarrow \mathbb{R}^k$$

spełnia *warunek Lipschitza* ze stałą  $L < \infty$  jeśli dla dowolnych  $t \in I$  oraz  $x_1, x_2 \in V$  zachodzi

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L \cdot \|x_1 - x_2\|.$$

**Przykład 1.** Niech  $V$  będzie zbiorem wypukłym oraz  $f : I \times V \rightarrow X$  będzie ciągłą i różniczkowalną względem  $x \in V$ . Jeśli  $\|D_x f(t, x)\| \leq L$  dla  $t \in I, x \in V$ , to  $f$  spełnia warunek Lipschitza ze stałą  $L$ .

**Dowód.** Dla  $x_1 \neq x_2 \in V$  niech  $y = \frac{x_2 - x_1}{\|x_2 - x_1\|}$ . Korzystając z twierdzenia o wartości średniej mamy wobec wypukłości  $V$

$$f(t, x_2) = f(t, x_1) + \int_{x_1}^{x_2} L_y f(t, y) dy,$$

gdzie  $L_y$  oznacza pochodną kierunkowa w kierunku wektora  $y$ . Zatem

$$\|f(t, x_2) - f(t, x_1)\| \leq \int_{x_1}^{x_2} \|L_y f(t, y)\| dy \leq L \|x_2 - x_1\|. \quad \diamond$$



**Przykład 2.** Niech

$$f(t, x) = \sqrt{x} \quad \text{dla} \quad x \geq 0.$$

Wówczas  $f$  nie spełnia warunku Lipschitza na  $V = (0, \infty)$ , lecz spełnia ten warunek na dowolnym zbiorze  $V$ , którego domknięcie nie zawiera zera.

**Lemat 1.** Niech  $I = [a, b]$  będzie zwartym przedziałem, a  $X$  i  $Y$  przestrzeniami metrycznymi. Jeśli odwzorowanie  $f : I \times X \rightarrow Y$  jest ciągłe, to dla każdego  $x_0 \in X$  istnieje kula  $B = B(x_0, r)$ ,  $r > 0$  taka, że zbiór  $f(I \times B)$  jest ograniczony w  $Y$ .

**Dowód.** Ustalmy  $x_0 \in X$ . Wobec ciągłości  $f$  dla każdego  $t \in I$  istnieje kula  $B_t^1 = B(t, r_t) \subset I$  oraz kula  $B_t^2 = B(x_0, \rho_t) \subset X$  takie, że zbiór

$$f(B_t^1 \times B_t^2)$$

jest ograniczony w  $Y$ . Kule  $B_t^1$ ,  $t \in I$  pokrywają zbiór zwarty  $I$ . Zatem możemy wybrać skończoną ilość kul  $B_{t_1}^1, \dots, B_{t_n}^1$ , która też pokrywa  $I$ . Połóżmy

$$B = B(x_0, r), \quad \text{gdzie} \quad r = \min(\rho_{t_1}, \dots, \rho_{t_n}) > 0.$$

Wówczas

$$f(I \times B) \subset \bigcup_{i=1}^n f(B_{t_i}^1 \times B)$$

jest ograniczony w  $Y$ .  $\diamond$

### 4.3. Twierdzenie Picarda-Lindelöfa.

Sformułujmy teraz jedno z najważniejszych twierdzeń teorii równań różniczkowych.

**Twierdzenie 2.** (Picarda-Lindelöfa o lokalnym istnieniu i jednoznaczności rozwiązań układów równań różniczkowych.) Niech  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  oraz niech  $V$  będzie obszarem w  $\mathbb{R}^k$ . Niech  $t_0 \in (a, b)$ ,  $x_0 \in V$  oraz niech  $f : I \times V \rightarrow \mathbb{R}^k$  będzie odwzorowaniem ciągłym spełniającym warunek

**(L)** istnieje kula  $B = B(x_0, r_1) \subset V$ ,  $r_1 > 0$  taka, że  $f$  spełnia na  $I \times B$  warunek Lipschitza ze stałą  $L < \infty$  tzn.

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L \cdot \|x_1 - x_2\| \quad \text{dla} \quad t \in I, \quad x_1, x_2 \in B.$$

Wówczas istnieje  $\tau > 0$  takie, że na odcinku  $(t_0 - \tau, t_0 + \tau)$  problem Cauchy'ego

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x} &= f(t, x), \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie.

**Dowód.** Zauważmy najpierw, że problem Cauchy'ego (1) jest równoważny poszukiwaniu rozwiązania równania całkowego

$$(2) \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Istotnie jeśli  $x$  jest rozwiązaniem (1), to  $x$  jest funkcją ciągłą i całkując (1) z uwzględnieniem warunku początkowego dostajemy (2). Odwrotnie, jeśli mamy rozwiązanie (2), to ponieważ  $f(s, x(s))$  jest funkcją ciągłą możemy zróżniczkować  $x(t)$  dostając (1), a więc  $x(t)$  jest klasy  $C^1$ . Następnie zauważmy, że na mocy Lematu 1 spełniony jest warunek:

**B.** Istnieją  $r_2 > 0$  oraz  $K < \infty$  takie, że

$$\|f(t, x)\| \leq K \quad \text{dla } (t, x) \in I \times B(x_0, r_2).$$

Niech  $\tau_1 > 0$  będzie takie, że  $[t_0 - \tau_1, t_0 + \tau_1] \subset I$ . Dla  $\tau < \tau_1$  wprowadzamy przestrzeń metryczną  $(X, \rho)$ , gdzie

$$X = \{g \in C^0([t_0 - \tau, t_0 + \tau]; \mathbb{R}^k) : \|g(t) - x_0\| \leq r_2 \text{ dla } |t - t_0| \leq \tau\},$$

$$\rho(g_1, g_2) = \sup_{t \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau]} \|g_1(t) - g_2(t)\|.$$

Jest jasne, że  $(X, \rho)$  jest przestrzenią metryczną. Wykażemy, że jest to przestrzeń zupełna. Istotnie granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą. Ponadto, jeśli występujące w ciągu Cauchy'ego funkcje  $g_n$  spełniają warunek

$$\|g_n(t) - x_0\| \leq r_2 \quad \text{dla } |t - t_0| \leq \tau,$$

to również granica tego ciągu  $g = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$  spełnia ten warunek, gdyż dla dowolnego  $\varepsilon > 0$  istnieje  $m \in \mathbb{N}$  takie, że  $\|g_m - x_0\| \leq \varepsilon$ . Zatem

$$\|g - x_0\| \leq \|g - g_m\| + \|g_m - x_0\| \leq \varepsilon + r_2.$$

Na przestrzeni  $X$  definiujemy odwzorowanie

$$(3) \quad A(g)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, g(s)) ds.$$

Wykażemy, że

1°  $A : X \rightarrow X$ ;

2° Jeśli  $\tau$  jest dostatecznie małe, to  $A$  jest odwzorowaniem zwięzającym.

Ad. 1°. Niech  $g \in X$ . Wówczas dla  $g_0 = x_0$  na mocy warunku **B** mamy

$$\begin{aligned} \rho(A(g), g_0) &= \sup_{t \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau]} \left\| x_0 + \int_{t_0}^t f(s, g(s)) ds - x_0 \right\| \\ &\leq \sup_{t \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau]} \int_{t_0}^t \|f(s, g(s))\| ds \\ &\leq K \cdot \tau \quad \text{gdy } \tau < \tau_1. \end{aligned}$$

Zatem jeśli  $\tau < \min(r_1/K, r_2/K, \tau_1)$ , to spełniony jest warunek 1°.

Ad. 2°. Niech  $g_1, g_2 \in X$ . Wówczas na mocy warunku **(L)** mamy

$$\begin{aligned} & \rho(A(g_1), A(g_2)) \\ &= \sup_{|t-t_0| \leq \tau} \left\| x_0 + \int_{t_0}^t f(s, g_1(s)) ds - x_0 - \int_{t_0}^t f(s, g_2(s)) ds \right\| \\ &\leq \sup_{|t-t_0| \leq \tau} \int_{t_0}^t \|f(s, g_1(s)) - f(s, g_2(s))\| ds \\ &\leq \sup_{|t-t_0| \leq \tau} \sup_{s \in [t_0, t]} L \cdot \|g_1(s) - g_2(s)\| \cdot |t - t_0| \\ &\leq L \cdot \tau \cdot \rho(g_1, g_2). \end{aligned}$$

Zatem jeśli  $\tau < 1/L$ , to  $A$  jest odwzorowaniem zwężającym.

Ostatecznie na mocy twierdzenia Banacha o punkcie stałym jeśli

$$\tau < \min\left(\tau_1, \frac{r_1}{K}, \frac{r_2}{K}, \frac{1}{L}\right),$$

to istnieje dokładnie jedno  $g \in X$  takie, że  $Ag = g$ . Zatem funkcja  $x = g$  ciągła na  $[t_0 - \tau, t_0 + \tau]$  spełnia równanie całkowe (2). Z tego co było powiedziane na początku dowodu wynika, że  $x$  jest funkcją klasy  $C^1$  spełniającą (1).  $\diamond$

Twierdzenie Picarda-Lindelöfa mówi o istnieniu rozwiązania na pewnym odcinku czasu  $(t_0 - \tau, t_0 + \tau)$ . Jeśli weźmiemy punkt  $t_1$  leżący blisko prawego końca tego odcinka i wartość znalezionej rozwiązania w tym punkcie oznaczmy przez  $x_1 = x(t_1)$ , to możemy rozpatrywać problem

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(t, x), \\ x(t_1) &= x_1. \end{cases}$$

Jeśli dla punktu  $(t_1, x_1)$  spełnione są założenia twierdzenia Picarda-Lindelöfa, to istnieje jedyne rozwiązanie powyższego problemu na pewnym odcinku  $(t_1 - \tau_1, t_1 + \tau_1)$ , które pokrywa się z pierwotnym rozwiązaniem w otoczeniu punktu  $t_1$ . W ten sposób możemy przedłużyć rozwiązanie w prawo, i analogicznie w lewo. Tym nie mniej okazuje się, że rozwiązanie nie musi przedłużać się na cały odcinek  $I$ , gdyż  $\tau$  w dowodzie twierdzenia Picarda-Lindelöfa zależy od punktu  $(t_0, x_0)$ .

**Przykład.** Rozwiązaniem problemu

$$\begin{cases} \dot{x} &= x^2 + 1, \\ x(0) &= 0 \end{cases}$$

jest funkcja  $x(t) = \operatorname{tg} t$  określona dla  $|t| < \pi/2$ .

Twierdzenie Picarda-Lindelöfa mówi nie tylko o istnieniu rozwiązania, ale pozwala je znaleźć metodą kolejnych przybliżeń. Mianowicie rozwiązanie jest granicą ciągu  $A^n g_0$ , gdzie  $A$  jest dane przez (3) a  $g_0 = x_0$ .

**Przykład 1.** Szukamy rozwiązania problemu

$$\begin{cases} \dot{x} &= x, \\ x(0) &= 1. \end{cases}$$

Wówczas  $f(t, x) = x, t_0 = 0, x_0 = 1$ . Stosując metodę kolejnych przybliżeń dostajemy

$$\begin{aligned} g_0 &= 1, \\ g_1(t) &= 1 + \int_0^t f(s, g_0(s)) ds = 1 + \int_0^t 1 ds = 1 + t, \\ g_2(t) &= 1 + \int_0^t f(s, g_1(s)) ds = 1 + \int_0^t (1 + s) ds = 1 + t + \frac{t^2}{2}, \\ &\dots\dots\dots \\ g_n(t) &= 1 + \int_0^t g_{n-1}(s) ds = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \dots + \frac{t^n}{n!}. \end{aligned}$$

Widzimy, że ciąg  $g_n$  zbiega lokalnie jednostajnie do funkcji  $x(y) = e^t$ .

**Przykład 2.** Szukamy rozwiązania problemu

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1, \\ x_1(0) &= 0, \quad x_2(0) = 1. \end{cases}$$

Kolejne przybliżenia mają postać

$$\begin{aligned} g_0^1(t) &= 0, & g_0^2(t) &= 1, \\ g_1^1(t) &= \int_0^t g_0^2(s) ds = t, & g_1^2(t) &= 1 + \int_0^t (-g_0^1(s)) ds = 1, \\ g_2^1(t) &= \int_0^t g_1^2(s) ds = t, & g_2^2(t) &= 1 + \int_0^t (-g_1^1(s)) ds = 1 - \frac{t^2}{2}, \\ g_3^1(t) &= \int_0^t g_2^2(s) ds = t - \frac{t^3}{3!}, & g_3^2(t) &= 1 + \int_0^t (-g_2^1(s)) ds = 1 - \frac{t^2}{2}, \end{aligned}$$

itd. Ostatecznie

$$\begin{cases} x_1(t) &= \sin t, \\ x_2(t) &= \cos t. \end{cases}$$

#### 4.4. Twierdzenie Peano. Metoda łamanych Eulera.

Podamy teraz twierdzenie Peano o istnieniu rozwiązania problemu (1) przy założeniu, że prawa strona równania jest funkcją ciągłą.

**Twierdzenie 3.** (Peano o istnieniu rozwiązania.) Niech  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  oraz niech  $V$  będzie obszarem w  $\mathbb{R}^k$ . Niech  $t_0 \in (a, b)$ ,  $x_0 \in V$  oraz niech  $f : I \times V \rightarrow \mathbb{R}^k$  będzie odwzorowaniem ciągłym. Wówczas istnieje  $\tau > 0$  takie, że na odcinku  $(t_0 - \tau, t_0 + \tau)$  problem Cauchy'ego

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x} & = f(t, x), \\ x(t_0) & = x_0 \end{cases}$$

ma przynajmniej jedno rozwiązanie.

**Szkic dowodu.** Rozwiązanie na prawo od punktu  $t_0$  aproksymuje się ciągiem łamanych w następujący sposób. Ustalmy krok  $h > 0$ . Rozpatrujemy punkty odcinka  $I$

$$t_0, \quad t_1 = t_0 + h, \quad t_2 = t_0 + 2h, \dots, t_n = t_0 + nh$$

oraz punktu zbioru  $V$

$$x_0, \quad x_1 = x_0 + f(t_0, x_0)h, \quad x_2 = x_1 + f(t_1, x_1)h, \dots, x_n = x_{n-1} + f(t_{n-1}, x_{n-1})h.$$

Liczbę kroków  $n$  dobiera się tak, aby wszystkie punkty  $(t_i, x_i)$  leżały w dziedzinie funkcji  $f$ . Następnie konstruujemy łamaną

$$x_h(t) = x_i + f(t_i, x_i)(t - t_i) \quad \text{dla } t_i \leq t < t_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Dowodzi się, że ciąg łamanych Eulera  $x_h$  dla  $h \rightarrow 0$  zbiega na pewnym odcinku  $[t_0, t_0 + \tau)$  jednostajnie do rozwiązania problemu (1). Analogicznie aproksymujemy rozwiązanie na lewo od punktu  $t_0$ .  $\diamond$

**Uwaga.** W praktycznym zastosowaniu metoda łamanych Eulera jest mało użyteczna, gdyż szybkość zbieżności przybliżeń do rozwiązania jest mała. Częściej w obliczeniach numerycznych posługujemy się aproksymacją ciągiem tzw. funkcji giętych tzn. sklejonych z kawałków wielomianów ustalonego stopnia. Jedną z metod numerycznych jest metoda Runge-Kutty'ego stopnia 3, w której kolejne punkty  $x_i$  są zadane wzorami

$$x_{i+1} = x_i + \frac{u_i + 4v_i + w_i}{6}h,$$

gdzie

$$u_i = f(t_i, x_i), \quad v_i = f(t_i + h/2, x_i + u_i/2), \quad w_i = f(t_i + h, x_i + 2v_i - u_i).$$

**Przykład.** Rozważmy problem

$$\begin{cases} \dot{x} & = 2\sqrt{x}, \\ x(0) & = 0. \end{cases}$$

Wówczas rozwiązaniem jest oczywiście funkcja  $x(t) \equiv 0$ . Lecz dla dowolnego  $C \geq 0$  rozwiązaniem jest również funkcja

$$x_C(t) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } t \leq C, \\ (t - C)^2 & \text{gdy } t > C. \end{cases}$$

Tak więc nasz problem nie ma jednoznacznego rozwiązania. Zauważmy, że funkcja  $t \rightarrow \sqrt{t}$  nie spełnia warunku Lipschitza na  $[0, \infty)$ , a więc nie są spełnione założenia twierdzenia Picarda-Lindelöfa.

## 4.5. Równania z prawą stroną analityczną.

Założmy, że prawa strona równania (1) jest funkcją analityczną, tzn. przedstawia się w postaci szeregu potęgowego

$$f(t, x) = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{i,j} (t - t_0)^i (x - x_0)^j$$

zbieżnego bezwzględnie dla  $|t - t_0| \leq r_1$ ,  $|x - x_0| \leq r_2$ . Wówczas zachodzi

**Twierdzenie 4.** (Cauchy'ego.) *Zagadnienie Cauchy'ego (1) z prawą stroną analityczną w otoczeniu punktu  $(t_0, x_0)$  ma jednoznaczne rozwiązanie będące funkcją analityczną o dodatnim promieniu zbieżności.*

Zatem rozwiązania problemu (1) można szukać w postaci szeregu potęgowego

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i (t - t_0)^i.$$

Wstawiając ten szereg do równania i porównując współczynniki przy potęgach  $(t - t_0)$  kolejno obliczamy współczynniki  $b_i$ .

**Przykład.** Niech  $x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i$  będzie rozwiązaniem problemu

$$\begin{cases} \dot{x} & = x, \\ x(0) & = 1. \end{cases}$$

Wówczas  $x(0) = b_0 = 1$ . Następnie ponieważ

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} i b_i t^{i-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) b_{i+1} t^i$$

dostajemy

$$b_1 = 1, \quad 2b_2 = b_1, \quad 3b_3 = b_2, \dots, \quad (i+1)b_{i+1} = b_i, \dots$$

Zatem

$$b_i = \frac{1}{i!} \quad \text{oraz} \quad x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} t^i = e^t.$$

## 4.6. Równania różniczkowe wyższych rzędów.

**Definicja.** Równanie różniczkowym rzędu  $k$  rozwiązany względem najwyższej pochodnej nazywamy równanie

$$(4) \quad \frac{d^k x}{dt^k} = F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}}\right),$$

gdzie  $F(t, x, u_1, \dots, u_{k-1})$  jest funkcją określoną w  $I \times \Omega$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ .

**Definicja.** Rozwiązanie równania (4) nazywamy funkcję  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  klasy  $C^k$  taką, że

1°. Dla każdego  $t \in I$ ,  $(\varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), \dots, \frac{d^{k-1}\varphi}{dt^{k-1}}(t)) \in \Omega$ ;

2°. Dla każdego  $t \in I$ ,

$$\frac{d^k \varphi}{dt^k}(t) = F\left(t, \varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), \dots, \frac{d^{k-1}\varphi}{dt^{k-1}}(t)\right).$$

**Przykład.** Równanie  $\ddot{x} = -x$  jest równaniem rzędu 2. Jego rozwiązaniem jest dowolna funkcja postaci  $\varphi(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t$ , gdzie  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

**Twierdzenie 5.** Równanie różniczkowe (4) rzędu  $k$  jest równoważne układowi  $k$  równań rzędu 1:

$$(5) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dots & \dots \\ \dot{x}_k &= F(t, x_1, \dots, x_k), \end{cases}$$

w tym sensie, że jeśli funkcja  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  jest rozwiązaniem równania (4), to funkcja wektorowa  $(\varphi, \dot{\varphi}, \dots, \varphi^{(k-1)}) : I \rightarrow \mathbb{R}^k$  jest rozwiązaniem układu (5), i na odwrót jeśli  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k)$  jest rozwiązaniem (5), to  $\varphi_1$  spełnia (4).

**Dowód.** Niech  $\varphi$  będzie rozwiązaniem równania (4). Zatem  $\varphi$  jest klasy  $C^k$ . Oznaczmy  $\varphi_1 = \varphi, \varphi_2 = \dot{\varphi}, \dots, \varphi_k = \varphi^{(k-1)}$ . Wówczas funkcja wektorowa  $(\varphi_1, \dots, \varphi_k) : I \rightarrow \mathbb{R}^k$  jest klasy  $C^1$  i jest rozwiązaniem (5). Na odwrót jeśli funkcja wektorowa  $(\varphi_1, \dots, \varphi_k) : I \rightarrow \mathbb{R}^k$  jest klasy  $C^1$  i jest rozwiązaniem układu (5), to z układu tego wynika, że  $\varphi_1$  jest klasy  $C^k$  i spełnia (4).  $\diamond$

**Uwaga.** Dowolny układ równań różniczkowych rozwiązany względem najwyższych pochodnych można powyższą metodą sprowadzić do równoważnego mu układu równań rzędu 1.

Z powyższego twierdzenia oraz z twierdzenia Picarda-Lindelöfa o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań problemu Cauchy'ego dla układu równań różniczkowych dostajemy

**Twierdzenie 6.** *Niech  $t_0 \in I$ ,  $(x_0, u_1, \dots, u_{k-1}) \in \Omega$ . Jeśli  $F : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją klasy  $C^1$ , to problem początkowy*

$$\begin{cases} x^{(k)} & = F(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(k-1)}), \\ x(t_0) & = x_0, \\ \dot{x}(t_0) & = u_1, \\ \dots & \dots \\ x^{(k-1)}(t_0) & = u_{k-1} \end{cases}$$

*lokalnie posiada jednoznaczne rozwiązanie, tzn. każde dwa jego rozwiązania pokrywają się na części wspólnej przedziałów określoności.*

**Przykład.** Rozważmy problem początkowy

$$\begin{cases} \ddot{x} & = -x, \\ x(0) & = x_0, \\ \dot{x}(0) & = u_1. \end{cases}$$

Wówczas  $t_0 = 0$ . Rozwiązanie tego problemu jest  $x(t) = x_0 \cos t + u_1 \sin t$ . W szczególności jeśli  $x_0 = u_1 = 0$ , to  $x(t) \equiv 0$ . Jeśli  $x_0 = 0, u_1 = 1$ , to  $x(t) = \sin t$ . Jeśli  $x_0 = 1, u_1 = 0$ , to  $x(t) = \cos t$ .



## 5. Zależność rozwiązań od danych początkowych i parametrów.

Zajmiemy się teraz badaniem zależności rozwiązań problemu Cauchy'ego od warunków początkowych i parametrów.

### 5.1. Ciągła zależność rozwiązań od danych początkowych.

Z twierdzenia Picarda-Lindelöfa o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego wynika następujący wniosek.

**Twierdzenie T0.** Niech  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  oraz niech  $V$  będzie obszarem w  $\mathbb{R}^k$ . Niech  $t_0 \in (a, b)$ ,  $x_0 \in V$  oraz niech  $f : I \times V \rightarrow X$  będzie odwzorowaniem ciągłym spełniającym w otoczeniu punktu  $(t_0, x_0)$  warunek Lipschitza tzn.

(L) istnieje  $\tau_1 > 0$ , kula  $B = B(x_0, r_1) \subset V$ ,  $r_1 > 0$  oraz  $L < \infty$  takie, że

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L \cdot \|x_1 - x_2\| \quad \text{dla } |t - t_0| \leq \tau_1, \quad x_1, x_2 \in B.$$

Wówczas istnieje  $\tau > 0$  oraz  $r > 0$  takie, że jeśli  $y \in B(x_0, r)$ , to rozwiązanie problemu

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x} &= f(t, x), \\ x(t_0) &= y \end{cases}$$

istnieje i jest jednoznaczne dla  $|t - t_0| < \tau$ . Ponadto rozwiązanie zależy w sposób ciągły od warunku początkowego  $y$ .

**Dowód.** Na podstawie dowodu twierdzenia Picarda-Lindelöfa wiemy, że dla  $r$  dostatecznie małego oraz  $y \in B(x_0, r)$  odwzorowanie

$$A_y g(t) = y + \int_{t_0}^t f(s, g(s)) ds$$

posiada jedyny punkt stały, który oznaczymy przez  $g_y$ . Wówczas

$$g_y(t) = y + \int_{t_0}^t f(s, g_y(s)) ds$$

Stąd

$$\frac{dg_y(t)}{dt} = f(t, g_y(t)) \quad \text{oraz} \quad g_y(t_0) = y.$$

Zatem funkcja  $x(t) = g_y(t)$  spełnia (1). Pozostaje nam wykazać ciągłą zależność rozwiązania od warunku początkowego. W tym celu niech weźmy

$y_1, y_2 \in B(x_0, r)$  takie, że  $\|y_1 - y_2\| \leq \delta$ . Wówczas na mocy warunku **(L)**

$$\begin{aligned}
\rho(g_{y_1}, g_{y_2}) &= \sup_{|t-t_0| \leq \tau} \|g_{y_1}(t) - g_{y_2}(t)\| \\
&= \sup_{|t-t_0| \leq \tau} \left\| y_1 + \int_{t_0}^t f(s, g_{y_1}(s)) ds - y_2 - \int_{t_0}^t f(s, g_{y_2}(s)) ds \right\| \\
&\leq \|y_1 - y_2\| + \sup_{|t-t_0| \leq \tau} \int_{t_0}^t \|f(s, g_{y_1}(s)) - f(s, g_{y_2}(s))\| ds \\
&\leq \delta + \sup_{|t-t_0| \leq \tau} \sup_{s \in [t_0, t]} L \cdot \|g_{y_1}(s) - g_{y_2}(s)\| \cdot \|t - t_0\| \\
&\leq \delta + \tau \cdot L \cdot \rho(g_{y_1}, g_{y_2}).
\end{aligned}$$

Zatem jeśli  $\tau < 1/L$ , to mając dane dowolne  $\varepsilon > 0$  możemy znaleźć  $\delta > 0$  takie, że jeśli  $\|y_1 - y_2\| < \delta$ , to  $\rho(g_{y_1}, g_{y_2}) < \varepsilon$ .  $\diamond$

## 5.2. Gładka zależność rozwiązań od danych początkowych.

**Twierdzenie T1.** Niech  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  oraz niech  $V$  będzie obszarem w  $\mathbb{R}^k$ . Niech  $t_0 \in (a, b)$ ,  $x_0 \in V$  oraz niech  $f : I \times V \rightarrow \mathbb{R}^k$  będzie odwzorowaniem klasy  $C^2$  w pewnym otoczeniu punktu  $(t_0, x_0)$ .

Wówczas istnieje  $\tau > 0$  oraz  $r > 0$  takie, że jeśli  $y \in B(x_0, r)$ , to rozwiązanie  $g(y, t) = g_y(t)$  problemu

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x} &= f(t, x), \\ x(t_0) &= y, \end{cases}$$

jest różniczkowalne względem  $y$  w sposób ciągły dla  $|t - t_0| < \tau$ .

**Dowód.** Bez straty ogólności możemy założyć, że dla każdego  $t \in I$  odwzorowanie

$$V \ni x \mapsto f(t, x) \in \mathbb{R}^k$$

jest klasy  $C^2$  (dwukrotnie różniczkowalne w sposób ciągły). Przy ustalonym  $x \in I$  niech  $Df(t, x)$  oznacza różniczkę tego odwzorowania w punkcie  $x$ . Różniczka ta jest operatorem liniowym z  $\mathbb{R}^k$  do  $\mathbb{R}^k$ . Z równaniem  $\dot{x} = f(t, x)$  związujemy układ równań na *wariację*

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x} &= f(t, x), & x \in V, \\ \dot{y} &= Df(t, x) \cdot y, & y \in \mathbb{R}^k \end{cases}$$

oraz układ, w którym wektor  $y \in \mathbb{R}^k$  z (2) jest zamieniony na nieznanne przekształcenie  $z : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ :

$$(3) \quad \begin{cases} \dot{x} &= f(t, x), & x \in V, \\ \dot{z} &= Df(t, x) \circ z, & z \in M(\mathbb{R}^k; \mathbb{R}^k). \end{cases}$$

Do tego układu dokładamy warunki początkowe

$$x(t_0) = y, \quad z(t_0) = Id.$$

Ponieważ  $Df(t, x) \in C_x^1$ , więc układ równań na wariację (3) spełnia założenia twierdzenia Picarda-Lindelöfa. Zatem ciąg przybliżeń Picarda-Lindelöfa  $(\varphi_n, \Phi_n)$  jest jednostajnie zbieżny do rozwiązania tego układu w dostatecznie małym otoczeniu punktu  $t_0$ . Mamy

$$(4) \quad \begin{cases} \varphi_{n+1}(t, y) &= y + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_n(y(s))) ds, \\ \Phi_{n+1}(t, y) &= Id + \int_{t_0}^t Df(s, \varphi_n(y(s))) \Phi(s, y) ds. \end{cases}$$

Jest oczywiste, że

$$D_y \varphi_0 = Id = \Phi_0.$$

Jeśli indukcyjnie założymy, że  $D\varphi_n = \Phi_n$ , to wobec (4)

$$\begin{aligned} D\varphi_{n+1} &= Id + \int_{t_0}^t Df(s, \varphi_n(s)) \circ D\varphi_n(s) ds \\ &= Id + \int_{t_0}^t Df(s, \varphi_n(s)) \circ \Phi_n(s) ds = \Phi_{n+1}. \end{aligned}$$

Zatem  $\{\Psi_n\}$  jest ciągiem pochodnych ciągu  $\{\varphi_n\}$ . Na mocy twierdzenia T0 dla dostatecznie małego  $\tau > 0$  oba ciągi są jednostajnie zbieżne na  $|t - t_0| \leq \delta$ . Zatem ciąg  $\{\varphi_n\}$  jest jednostajnie zbieżny na  $|t - t_0| \leq \delta$  wraz z pochodnymi względem  $y$ . Stąd funkcja graniczna

$$g(y, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t, y)$$

jest różniczkowalna w sposób ciągły.  $\diamond$

**Wniosek.** Pochodna  $D_y g(y, t)$  rozwiązania równania (1) względem warunków początkowych  $y$  spełnia równanie na wariację (3). Zatem

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} g(y, t) &= f(t, g(y, t)), \\ \frac{\partial}{\partial t} D_y g(y, t) &= Df(t, g(y, t)) \circ Dg(y, t), \\ g(y, t_0) &= y, \\ D_y g(y, t) &= Id. \end{cases}$$

**Twierdzenie Tn.** Niech  $n \geq 1$ . Niech  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  oraz niech  $V$  będzie obszarem w  $\mathbb{R}^k$ . Niech  $t_0 \in (a, b)$ ,  $x_0 \in V$  oraz niech  $f : I \times V \rightarrow \mathbb{R}^k$  będzie odwzorowaniem klasy  $C^{n+1}$  w pewnym otoczeniu punktu  $(t_0, x_0)$ .

Wówczas istnieje  $\tau > 0$  oraz  $r > 0$  takie, że jeśli  $y \in B(x_0, r)$ , to rozwiązanie  $g(y, t) = g_y(t)$  problemu

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x} &= f(t, x), \\ x(t_0) &= y, \end{cases}$$

jest  $n$  krotnie różniczkowalne względem  $y$  w sposób ciągły dla  $|t - t_0| < \tau$ .

**Dowód.** Jeśli  $f \in C_x^{n+1}$  to  $D_x f \in C_x^n$ . Zatem układ równań na wariację spełnia założenia twierdzenia T(n-1). Ponieważ wykazaliśmy twierdzenie T1, więc na mocy indukcji dostajemy, że  $D_y g \in C^{n-1}$ . Zatem  $g \in C^n$ .  $\diamond$

Zajmiemy się teraz różniczkowalnością rozwiązania  $g(y, t)$  problemu (1) względem zespołu zmiennych  $(t, x)$ . Zaczniemy od lematu.

**Lemat.** Niech  $n \in \mathbb{N}_0$  oraz niech  $h : I \times V \rightarrow \mathbb{R}^k$  będzie funkcją ciągłą. Jeśli

$$h \in C_x^{m+1}(I \times V) \cap C^n(I \times V),$$

to funkcja

$$F(t, x) = \int_{t_0}^t h(s, x) ds, \quad t \in I, x \in V$$

należy do klasy  $C^{n+1}$  względem zespołu zmiennych  $(t, x)$ .

**Dowód.** Pochodne cząstkowe względem  $x$  rzędu  $(n + 1)$  funkcji  $F$  są ciągłe. Natomiast jeśli liczymy  $(n + 1)$ -szą pochodną cząstkową funkcji  $F$  zawierające chociaż jedno różniczkowanie względem  $t$ , to występują w niej pochodne funkcji  $h$  rzędu co najwyżej  $n$ , które z założenia są ciągłe. Zatem wszystkie pochodne cząstkowe  $F$  rzędu  $(n + 1)$  są ciągłe.  $\diamond$

**Twierdzenie T'n.** Przy założeniach twierdzenia Tn rozwiązanie  $g(y, t)$  problemu (1) jest funkcją  $n$ -krotnie różniczkowalną względem zespołu zmiennych  $(y, t)$ .

**Dowód.** Na mocy (4) mamy

$$g(y, t) = y + \int_{t_0}^t f(s, g(y, s)) ds.$$

Położmy  $h(s, y) = f(s, g(y, s))$  dla  $s$  bliskich  $t_0$ ,  $y$  bliskich  $x_0$ . Z Twierdzenia T0 mamy  $g \in C^0$ . Dla  $1 \leq m < n$  na podstawie twierdzenia Tm mamy  $g \in C^m \cap C_x^{m+1}$ . Zatem wobec lematu  $g \in C^{m+1}$ .  $\diamond$

**Wniosek.** Jeśli prawa strona równania (1) jest funkcją nieskończenie wiele razy różniczkowalną, to zależność rozwiązania o warunków początkowych też jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna.

**Uwaga.** Twierdzenia o zależności rozwiązania od warunków początkowych zostały wykazane ze stratą jednej pochodnej. Stosując subtelniejsze rozumowanie można wykazać, że zależność rozwiązania od warunków początkowych jest tyle samo razy różniczkowalna co prawa strona równania.

### 5.3. Zależność rozwiązań od parametrów.

**Twierdzenie** (O zależności rozwiązań od parametrów.) *Niech  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A$  będzie obszarem w  $\mathbb{R}^l$  oraz niech  $t_0 \in I, x_0 \in V, \alpha_0 \in A$ . Jeśli  $f : I \times V \times A \rightarrow \mathbb{R}^k$  jest funkcją klasy  $C^{n+1}$ , to rozwiązanie problemu*

$$(5) \quad \begin{cases} \dot{x} &= f(t, x, \alpha), \\ x(t_0) &= y, \end{cases}$$

*jest funkcją klasy  $C^n$  względem  $(t, y, \alpha)$  dla małych  $|t-t_0|, \|y-x_0\|, \|\alpha-\alpha_0\|$ .*

**Dowód.** Rozpatrzmy w  $I \times V \times A$  układ

$$(6) \quad \begin{cases} \dot{x} &= f(t, x, \alpha), \\ \dot{\alpha} &= 0 \end{cases}$$

Na podstawie twierdzenia T'n zastosowanego do tego układu, jego rozwiązania są  $n$ -krotnie różniczkowalne w sposób ciągły względem  $(t, y, \alpha)$  dla małych  $|t-t_0|, \|y-x_0\|, \|\alpha-\alpha_0\|$ . Rozwiązaniem układu (6) przy warunku początkowym  $(y, \alpha)$  jest  $(g(y, t), \alpha)$ , gdzie  $g(y, t)$  jest rozwiązaniem (5). Zatem  $g(y, t)$  jest  $n$ -krotnie różniczkowalna w sposób ciągły.

## 6. Twierdzenie o prostowaniu. Całki pierwsze.

### 6.1. Działanie dyfeomorfizmu na pole wektorowe.

**Definicja.** Niech  $U, V$  będą obszarami w  $\mathbb{R}^k$  oraz niech  $v$  będzie polem wektorowym na  $V$ , tzn. odwzorowaniem

$$v : V \rightarrow \mathbb{R}^k = TV$$

gdzie  $TV$  oznacza przestrzeń styczną do  $V$ . Niech  $f : V \rightarrow U$  będzie dyfeomorfizmem klasy  $C^1$ . Obrazem pola wektorowego  $v$  na  $V$  pod działaniem dyfeomorfizmu  $f$  nazywamy pole wektorowe  $f_*v$  na  $U$  zadane wzorem

$$(1) \quad (f_*v)(y) = Df(f^{-1}(y)) \cdot v(f^{-1}(y)) \quad \text{dla } y \in U.$$

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(y) = x \in V & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{f^{-1}} \end{array} & U \ni y \\ \downarrow v & & \downarrow f_*v \\ \mathbb{R}^k & & \mathbb{R}^k \end{array}$$

**Twierdzenie 1.** Niech  $f : V \rightarrow U$  będzie dyfeomorfizmem klasy  $C^1$  oraz niech  $v$  będzie polem wektorowym na  $V$ . Wówczas układ równań różniczkowych na  $V$

$$(2) \quad \dot{x} = v(x), \quad x \in V$$

jest równoważny układowi równań różniczkowych na  $U$

$$(3) \quad \dot{y} = (f_*v)(y), \quad y \in U,$$

tzn. jeśli  $\varphi : I \rightarrow V$  jest rozwiązaniem (2), to  $f \circ \varphi : I \rightarrow U$  jest rozwiązaniem (3) i na odwrót.

**Dowód.** Niech  $\varphi : I \rightarrow V$  będzie rozwiązaniem (2). Ustalmy  $t_0 \in I$  i połóżmy  $\psi(\tau) = \varphi(t_0 + \tau)$  dla małych  $\tau$ . Wówczas jeśli  $\varphi(t_0) = x_0$ , to  $f \circ \psi(0) = f(x_0) =: y_0$ ,  $\psi(0) = x_0 = f^{-1}(y_0)$ . Korzystając z definicji  $f_*v$  dostajemy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f \circ \varphi)(t)|_{t=t_0} &= \frac{d}{d\tau}(f \circ \psi)(\tau)|_{\tau=0} \\ &= Df(\psi(0)) \cdot \frac{d\psi(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \\ &= Df(f^{-1}(y_0)) \cdot v(x_0) \\ &= Df(f^{-1}(y_0)) \cdot v(f^{-1}(y_0)) = (f_*v)(y_0). \end{aligned}$$

Zatem  $f \circ \varphi$  jest rozwiązaniem (3). Zastosowanie dyfeomorfizmu odwrotnego kończy dowód.  $\diamond$

## 6.2. Działanie dyfeomorfizmu na układ nieautonomiczny.

Rozpatrzmy teraz układ nieautonomiczny

$$(4) \quad \dot{x} = f(t, x),$$

gdzie  $f$  jest funkcją klasy  $C^1$  określoną w  $I \times V \subset \mathbb{R}^{k+1}$ . Niech  $h : I \times V \rightarrow I \times U$  będzie dyfeomorfizmem klasy  $C^1$  przeprowadzającym punkt  $(t, x)$  na  $(t, y)$  (tzn.  $t$  jest zachowane). Wówczas układ (4) na  $I \times V$  jest równoważne układowi

$$(5) \quad \dot{y} = h_*(f(t, x))(y) =: Dh(t, h^{-1}(t, y)) \cdot f(t, h^{-1}(t, y))$$

na  $I \times U$ , tzn.  $\varphi : I \rightarrow V$  jest rozwiązaniem (4) wtedy i tylko wtedy gdy  $h \circ \varphi : I \rightarrow U$  jest rozwiązaniem (5).

## 6.3. Twierdzenie o prostowaniu dla układu nieautonomicznego.

**Definicja.** Niech  $L_1$  i  $L_2$  będą podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni liniowej  $L$ . Mówimy, że przestrzenie  $L_1$  i  $L_2$  są *transwersalne* jeśli  $L_1 + L_2 = L$ .

**Fakt 1.** Dla każdej  $l$ -wymiarowej podprzestrzeni liniowej w  $\mathbb{R}^k$  istnieje transwersalna do niej przestrzeń  $(k - l)$ -wymiarowa.

**Fakt 2.** Jeśli odwzorowanie liniowe  $A : L \rightarrow M$  przekształca dwie podprzestrzenie transwersalne w  $L$  na podprzestrzenie transwersalne w  $M$  to  $A$  przekształca  $L$  na całe  $M$ .

**Twierdzenie 2.** (O prostowaniu dla równania nieautonomicznego.)  
*Niech  $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$  będzie funkcją klasy  $C^{n+1}$ ,  $t_0 \in I, x_0 \in \Omega$ . Wówczas istnieją: otoczenie  $I_1$  punktu  $t_0$ , otoczenie  $V$  punktu  $x_0$ , obszar  $W \subset \mathbb{R}^k$  oraz dyfeomorfizm  $h : I_1 \times V \rightarrow I_1 \times U$ ,  $h(t, x) = (t, y)$  klasy  $C^n$  takie, że układ (4) jest równoważny układowi*

$$(6) \quad \frac{dy}{dt} = 0 \quad \text{na } I_1 \times U.$$

**Dowód.** Niech  $g(t, x)$  będzie rozwiązaniem problemu Cauchy'ego

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(t, x), \\ x(t_0) &= x_0. \end{cases}$$

Położmy

$$G(t, x) = (t, g(t, x)).$$

Na mocy twierdzenia Picarda-Lindelöfa odwzorowanie  $G$  jest określone na pewnym otoczeniu  $I_1 \times V_1$  punktu  $(t_0, x_0)$ . Wykażemy, że  $G$  jest dyfeomorfizmem prostującym na pewnym otoczeniu  $I_1 \times V$  punktu  $(t_0, x_0)$ .

1°. Na podstawie twierdzenia T'n,  $G$  jest odwzorowaniem klasy  $C^n$ .

2°. Odwzorowanie  $G$  pozostawia punkt  $t$  w miejscu, gdyż

$$G(t, x) = (t, g(t, x)) = (t, y) \quad \text{gdzie } y = g(t, x).$$

3°.  $G_*$  przeprowadza jednostkowe pole wektorowe  $e = (1, 0)$  na pole  $G_*e = (1, f(t, x))$  gdyż

$$G_* \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = DG(t, G^{-1}(t, y)) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\partial g}{\partial t}(t, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ f(t, x) \end{pmatrix}.$$

4°.  $G$  jest dyfeomorfizmem w otoczeniu  $I_1 \times V$  punktu  $(t_0, x_0)$ . Istotnie licząc obciążenia operatora  $G_*|_{(t_0, x_0)}$  do transwersalnych płaszczyzn  $\mathbb{R}_x^k$  i  $\mathbb{R}_t^1$  dostajemy

$$\begin{aligned} G_*|_{\mathbb{R}_x^k, t=t_0} &= Id, \\ G_*|_{\mathbb{R}_t, x=x_0} e &= e + f. \end{aligned}$$

Wobec Faktu 2,  $DG$  jest odwzorowaniem liniowym  $\mathbb{R}^{k+1}$  na  $\mathbb{R}^{k+1}$ , i w konsekwencji  $J(G_*)(t_0, x_0) \neq 0$ . Z twierdzenia o funkcji odwrotnej wnioskujemy, że  $G$  jest lokalnym dyfeomorfizmem.  $\diamond$

## 6.4. Całki pierwsze.

Niech będzie dany układ (4),  $k$  równań rzędu pierwszego.

**Definicja.** Funkcję

$$\mathbb{R}^{k+1} \ni (t, x) \rightarrow G(t, x) \in \mathbb{R}$$

różną od stałej, nazywamy *całką pierwszą* układu (4) jeśli jest ona stałą na krzywych całkowych układu tzn. jeśli  $t \rightarrow (\varphi_1(t), \dots, \varphi_k(t))$  jest rozwiązaniem układu, to  $G(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_k(t)) \equiv \text{const}$ . Innymi słowy, krzywe całkowe układu (4) są zawarte w poziomicach funkcji  $G$ .

**Przykład.** Całką pierwszą układu

$$\begin{cases} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= ax \end{cases}$$

jest  $G(t, x, y) = ax^2 - y^2$ . Istotnie

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t, x, y) = 2ax \cdot \dot{x} - 2y \cdot \dot{y} = 2ax \cdot y - 2y \cdot ax = 0.$$

Poziomicami  $G$  są elipsy gdy  $a < 0$  i hiperbole gdy  $a > 0$ .



**Twierdzenie 3.** Niech  $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$  będzie funkcją klasy  $C^1$ ,  $t_0 \in I, x_0 \in \Omega$ . Wówczas istnieje otoczenie  $I_1$  punktu  $t_0$  i otoczenie  $V$  punktu  $x_0$  takie, że w  $I_1 \times V$  układ (4) posiada  $k$  niezależnych całek pierwszych.

**Dowód.** Na mocy twierdzenia o prostowaniu w pewnym otoczeniu punktu  $(t_0, x_0)$  układ (4) jest równoważny układowi standardowemu (6). Dla układu (6) całkami pierwszymi są liniowo niezależne funkcje  $H_i(t, y) = y_i, i = 1, \dots, k$ . Przenosząc je przez dyfeomorfizm prostujący dostajemy  $k$  liniowo niezależnych całek pierwszych układu (4).  $\diamond$

Okazuje się, że znajomość całek pierwszych pozwala zmniejszyć rząd układu. w szczególności znajomość  $k$  całek pierwszych jest równoważna z rozwiązaniem układu (4).

**Twierdzenie 4.** Niech  $1 \leq l \leq k$ . Niech będzie danych  $l$  funkcji  $G_1, \dots, G_l$  klasy  $C^1$  w pewnym otoczeniu punktu  $(t_0, x_0)$ . Jeśli funkcje te są liniowo niezależne tzn.

$$\text{rzęd} \frac{D(G_1, \dots, G_l)}{D(x_1, \dots, x_k)}(t_0, x_0) = l,$$

to w pewnym otoczeniu punktu  $(t_0, x_0)$  układ (4) sprowadza się do układu  $(k - l)$  równań rzędu 1.

**Dowód.** Zmieniając ewentualnie nazwy zmiennych możemy założyć, że

$$\text{Det} \frac{D(G_1, \dots, G_l)}{D(x_1, \dots, x_l)}(t_0, x_0) \neq 0.$$

Stąd na podstawie twierdzenia o funkcji uwikłanej wnioskujemy, że z układu równań

$$\begin{cases} G_1(t, x) = C_1, \\ \dots \\ G_l(t, x) = C_l, \end{cases}$$

można w pewnym otoczeniu punktu  $(t_0, x_0)$  wyznaczyć  $x_1, \dots, x_l$  jako funkcje zmiennych  $x_{l+1}, \dots, x_k$  oraz parametrów  $C_1, \dots, C_l$  tzn.

$$(7) \quad x_i = h_i(t, x_{l+1}, \dots, x_k, C_1, \dots, C_l) \quad i = 1, \dots, l.$$

Zatem układ (4) sprowadza się do układu  $k - l$  równań

$$(8) \quad \frac{dx_j}{dt} = f_j(t, h_1(t, x_{l+1}, \dots, x_k), \dots, h_l(t, x_{l+1}, \dots, x_k), x_{l+1}, \dots, x_k)$$

gdzie  $j = l+1, \dots, k$ , który też spełnia założenia twierdzenia Picarda. Rozwiązując układ (8) dostajemy funkcje  $x_{l+1}, \dots, x_k$ , a następnie z (7) wyliczamy  $x_1, \dots, x_l$ .  $\diamond$

**Przykład.** Rozpatrzmy układ

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

Założmy, że  $t_0 = 0$ . Jeśli  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ , to  $x(t) = y(t) \equiv 0$ . Niech  $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ . Ponieważ całką pierwszą układu jest  $G(t, x, y) = x^2 + y^2$ , więc  $x^2 + y^2 = r^2$ , gdzie  $r^2 = x_0^2 + y_0^2$ . Stąd  $x = \pm\sqrt{r^2 - y^2}$  dla  $|y| < r$  i wstawiając do drugiego równania dostajemy równanie rzędu 1

$$\dot{y} = \mp\sqrt{r^2 - y^2}.$$

Rozwiązując to równanie dostajemy

$$y(t) = r \sin(t + \varphi), \quad x(t) = r \cos(t + \varphi), \quad \text{gdzie } r^2 = x_0^2 + y_0^2, \quad \text{tg } \varphi = y_0/x_0.$$

**Przykład.** Rozpatrzmy układ

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_3 - x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_2 - x_1. \end{cases}$$

Dodając równania układu stronami dostajemy

$$\frac{d(x_1 + x_2 + x_3)}{dt} = 0.$$

Zatem  $G_1(t, x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$  jest całką pierwszą. Następnie mnożąc równania układu odpowiednio przez  $x_1, x_2, x_3$  i dodając stronami dostajemy

$$\frac{d(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}{dt} = 0.$$

Zatem  $G_2(t, x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$  też jest całką pierwszą. Z układu równań

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= C_1, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= C_2 \end{cases}$$

wyliczamy (przy jakich założeniach?)

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} \left( C_1 - x_3 - \sqrt{2C_2 - C_1^2 + 2C_1x_3 - 3x_3^2} \right), \\ x_2 &= \frac{1}{2} \left( C_1 - x_3 + \sqrt{2C_2 - C_1^2 + 2C_1x_3 - 3x_3^2} \right). \end{aligned}$$

Zatem nasz układ sprowadza się do równania

$$\frac{dx_3}{dt} = \sqrt{2C_2 - C_1^2 + 2C_1x_3 - 3x_3^2},$$

które daje się zcałkować

$$\arcsin \frac{3x_3 - C_1}{\sqrt{6C_2 - 2C_1^2}} - \sqrt{3}t = C_3, \quad x_3 = \frac{1}{3} \sqrt{6C_2 - 2C_1^2} \sin(\sqrt{3}t + C_3) + \frac{C_1}{3}.$$

## 7. Układy równań liniowych.

Niech  $A : I \rightarrow L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ ,  $b : I \rightarrow \mathbb{R}^k$  będą odwzorowaniami ciągłymi. W bazie standardowej przestrzeni  $\mathbb{R}^k$  odwzorowania te są zadane przez macierz  $A = \{a_{i,j}\}_{i,j=1}^k$  i wektor pionowy  $b = (b_1, \dots, b_k)^{tr}$ .

**Definicja.** *Liniowym układem równań różniczkowych* nazywamy układ

$$(1) \quad \dot{x} = A(t)x + b(t), \quad \text{gdzie } x : I \rightarrow \mathbb{R}^k.$$

Jeśli  $b \equiv 0$ , to mówimy o układzie *liniowym jednorodnym*, w przeciwnym przypadku *niejednorodnym*.

### 7.1. Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności dla układów liniowych.

Podstawowe twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań dla układów równań liniowych brzmi następująco.

**Twierdzenie 1.** *Jeśli odwzorowania  $A : I \rightarrow L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ ,  $b : I \rightarrow \mathbb{R}^k$  są ciągłe, to dla każdego  $t_0 \in I$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^k$  zagadnienie początkowe Cauchy'ego*

$$(1') \quad \begin{cases} \dot{x} &= A(t)x + b(t), \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

*posiada dokładnie jedno rozwiązanie określone na całym odcinku  $I$ .*

**Dowód.** Niech  $I \subset \mathbb{R}$  będzie odcinkiem zwartym,  $t_0 \in \text{int}I$ . Sprawdzamy założenia twierdzenia Picarda-Lindelöfa. Po pierwsze funkcja  $I \times \mathbb{R}^k \ni (t, x) \mapsto A(t)x + b(t) \in \mathbb{R}^k$  jest ciągła. Wystarczy zatem sprawdzić warunek Lipschitza. Wobec ciągłości odwzorowań  $I \ni t \mapsto A(t) \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$  oraz  $I \ni t \mapsto b(t) \in \mathbb{R}^k$  istnieją stałe  $L < \infty$  i  $R < \infty$  takie, że

$$L = \sup_{t \in I} \|A(t)\|_{L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)} = \sup_{t \in I} \sup_{0 \neq y \in \mathbb{R}^k} \frac{\|A(t)y\|_{\mathbb{R}^k}}{\|y\|_{\mathbb{R}^k}},$$

$$R = \sup_{t \in I} \|b(t)\|_{\mathbb{R}^k}.$$

Zatem dla  $t \in I$

$$\|A(t)x + b(t)\|_{\mathbb{R}^k} \leq \|A(t)\|_{L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)} \cdot \|x\|_{\mathbb{R}^k} + \|b(t)\|_{\mathbb{R}^k} \leq L \cdot \|x\|_{\mathbb{R}^k} + R.$$

Zauważmy, że jeśli  $x \in B(x_0, r)$  gdzie  $r = R + \|x_0\|$ , to

$$\|x\| \leq \|x_0\| + r \leq R + 2\|x_0\|.$$

Stąd dla  $t \in I$ ,  $x \in B(x_0, r)$  dostajemy

$$\|A(t)x + b(t)\|_{\mathbb{R}^k} \leq L \cdot \|x\|_{\mathbb{R}^k} + R \leq L \cdot (R + 2\|x_0\|) + R =: M.$$

Ponadto, dla  $t \in I$ ,  $x_1, x_2 \in B(x_0, r)$  mamy

$$\|A(t)x_1 + b(t) - (A(t)x_2 + b(t))\|_{\mathbb{R}^k} \leq \|A(t)(x_1 - x_2)\|_{\mathbb{R}^k} \leq L \cdot \|x_1 - x_2\|_{\mathbb{R}^k}.$$

Zatem na mocy twierdzenia Picarda-Lindelöfa na odcinku  $I \cap (t_0 - \tau, t_0 + \tau)$ , gdzie

$$\begin{aligned} \tau &= \min\left(\frac{r}{M}, \frac{1}{L}\right) = \min\left(\frac{R + \|x_0\|}{LR + 2L\|x_0\| + R}, \frac{1}{L}\right) \\ &\geq \min\left(\frac{R + \|x_0\|}{2L(R + \|x_0\|) + R + \|x_0\|}, \frac{1}{L}\right) = \frac{1}{2L + 1}. \end{aligned}$$

istnieje jednoznaczne rozwiązanie problemu Cauchy'ego (1'). Ponieważ  $\tau$  nie zależy od wyboru punktu  $(t_0, x_0)$  rozwiązanie można przedłużyć na cały odcinek  $I$ . Jeśli odcinek  $I$  jest nieograniczony, to stosując powyższe rozumowanie do dowolnego zwartego odcinka zawartego w  $I$  również wnioskujemy, że rozwiązanie istnieje na całym  $I$ .  $\diamond$

## 7.2. Jednorodny układ równań liniowych.

Zajmiemy się teraz badaniem struktury rozwiązań jednorodnego układu równań liniowych

$$(2) \quad \dot{x} = A(t)x, \quad \text{gdzie } x : I \rightarrow \mathbb{R}^k$$

oraz rozwiązaniem problemu Cauchy'ego dla (2)

$$(2') \quad \begin{cases} \dot{x} &= A(t)x, \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

Zakładamy, że odwzorowanie  $I \ni t \mapsto A(t) \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$  jest ciągle. Wówczas rozwiązaniem zagadnienia (2') jest funkcja  $g(t)$  klasy  $C^1$ , którą oznaczymy przez

$$I \ni t \mapsto g(t, t_0, x_0) \in \mathbb{R}^k.$$

**Twierdzenie 2.** (O strukturze rozwiązań układów liniowych, jednorodnych). *Przy powyższych założeniach:*

- 1°. Rozwiązanie ogólne układu równań (2) jest liniową podprzestrzenią  $J \subset C(I; \mathbb{R}^k)$ ;
- 2°. Dla każdych  $t \in I, t_0 \in I$  odwzorowanie

$$\mathbb{R}^k \ni x_0 \mapsto g(t, t_0, x_0) \in \mathbb{R}^k$$

jest odwzorowaniem liniowym. Innymi słowy, istnieje operator liniowy  $R(t, t_0) \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ , zwany rezolwentą równania (2) taki, że

$$g(t, t_0, x_0) = R(t, t_0) \cdot x_0;$$

3°. Funkcja o wartościach operatorowych

$$I \ni t \mapsto R(t, t_0) \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$$

spełnia równanie macierzowe

$$\begin{cases} \frac{dR(t, t_0)}{dt} = A(t) \circ R(t, t_0), \\ R(t_0, t_0) = Id; \end{cases}$$

4°. Dla dowolnych  $t, s, t_0 \in I$  zachodzi

$$R(t, s) \circ R(s, t_0) = R(t, t_0).$$

Zatem  $R(t_0, t) = (R(t, t_0))^{-1}$  oraz  $R(t, t_0)$  jest izomorfizmem przestrzeni  $\mathbb{R}^k$ ;

5°. Odwzorowanie

$$\mathbb{R}^k \ni x \mapsto g(\cdot, t_0, x) \in J$$

jest izomorfizmem przestrzeni  $\mathbb{R}^k$  na przestrzeń rozwiązań  $J$  układu (2).  
Zatem  $J$  jest  $k$ -wymiarową podprzestrzenią liniową w  $C(I, \mathbb{R}^k)$ .

**Dowód.** 1°. Niech  $t \mapsto x_1(t), t \mapsto x_2(t)$  będą dwoma rozwiązaniami układu (2) oraz  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ . Wówczas

$$\begin{aligned} \frac{d(\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t))}{dt} &= \lambda_1 \frac{dx_1(t)}{dt} + \lambda_2 \frac{dx_2(t)}{dt} = \lambda_1 A(t)x_1(t) + \lambda_2 A(t)x_2(t) \\ &= A(t)(\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t)). \end{aligned}$$

2°. Wobec punktu 1° funkcja

$$t \mapsto \lambda_1 g(t, t_0, x_1^0) + \lambda_2 g(t, t_0, x_2^0)$$

jest rozwiązaniem (2). Rozwiązanie to w chwili  $t_0$  przybiera wartość  $\lambda_1 x_1^0 + \lambda_2 x_2^0$ . Wobec jednoznaczności rozwiązania zagadnienia początkowego mamy dla  $t \in I$

$$g(t, t_0, \lambda_1 x_1^0 + \lambda_2 x_2^0) \equiv \lambda_1 g(t, t_0, x_1^0) + \lambda_2 g(t, t_0, x_2^0).$$

Zatem odwzorowanie  $x^0 \mapsto g(t, t_0, x^0)$  jest liniowe, czyli  $g(t, t_0, x^0) = R(t, t_0) \cdot x^0$  dla pewnego  $R(t, t_0) \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ .

3°. Niech  $I \ni t \mapsto V(t) \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$  spełnia równanie macierzowe

$$\begin{cases} \frac{dV(t)}{dt} &= A(t) \circ V(t), \\ V(t_0) &= Id. \end{cases}$$

Ponieważ dla dowolnego  $x_0 \in \mathbb{R}^k$  mamy

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} x_0 &= A(t) \circ V(t) x_0 = A(t)(V(t)x_0), \\ V(t_0)x_0 &= Id(x_0) = x_0, \end{aligned}$$

więc funkcja  $t \mapsto V(t)x_0$  spełnia (2') i wobec twierdzenia o jednoznaczności rozwiązań  $g(t, t_0, x_0) = R(t, t_0)x_0 = V(t)x_0$ . Zatem  $R(t, t_0) = V(t)$ .

4°. Funkcja  $t \mapsto R(t, t_0)x_0$  spełnia (2') i przybiera w punkcie  $s \in I$  wartość  $R(s, t_0)x_0$ . Z drugiej strony funkcja

$$t \mapsto R(t, s)R(s, t_0)x_0$$

spełnia (2) z warunkiem  $x(s) = R(s, s)R(s, t_0)x_0 = R(s, t_0)x_0$ . Z twierdzenia o jednoznaczności dostajemy dla  $t \in I$   $R(t, t_0)x_0 = R(t, s)R(s, t_0)x_0$ . Zatem wobec dowolności  $x_0 \in \mathbb{R}^k$  mamy  $R(t, s) \circ R(s, t_0) = R(t, t_0)$ .

5°. Liniowość odwzorowania  $\mathbb{R}^k \ni x \mapsto g(t, t_0, x)$  wykazaliśmy w punkcie 2°. Natomiast z punktu 4° wynika odwracalność operatora  $R(t, t_0)$ .  $\diamond$

### 7.3. Fundamentalny układ rozwiązań.

Rozważmy jednorodny, liniowy układ równań

$$(2') \quad \begin{cases} \dot{x} &= A(t)x, \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

Niech  $e_1, \dots, e_k$  będzie bazą przestrzeni  $\mathbb{R}^k$ . W bazie tej funkcję  $t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^k$  można jednoznacznie zapisać w postaci

$$x(t) = \sum_{i=1}^k x_i(t)e_i.$$

Zatem układ (2) w tej bazie zapisuje się w postaci

$$(3) \quad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^k a_{i,j}x_j, \quad i = 1, \dots, k$$

z warunkami początkowymi

$$(3') \quad x_i(t_0) = x_i^0, \quad i = 1, \dots, k,$$

gdzie  $x_0 = \sum_{i=1}^k x_i^0 e_i$ .

Niech  $R(t, t_0)$  będzie rezolwentą układu (2'), tzn.  $R(t, t_0) \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$  oraz  $x(t) = R(t, t_0)x_0$  jest rozwiązaniem (2'). Połóżmy

$$(4) \quad u_i(t) = R(t, t_0)e_i, \quad i = 1, \dots, k.$$

Wówczas mamy

$$x(t) = R(t, t_0)x_0 = R(t, t_0) \sum_{i=1}^k x_i^0 e_i = \sum_{i=1}^k x_i^0 u_i(t).$$

Zatem funkcje  $u_i : I \rightarrow \mathbb{R}^k$  tworzą bazę przestrzeni  $J$  rozwiązań układu (2), nazywaną *układem fundamentalnym rozwiązań*.

## 7.4. Wyznacznik Wrońskiego.

Zauważmy, że wartości funkcji  $u_i, i = 1, \dots, k$  tworzących układ fundamentalny rozwiązań należą do przestrzeni  $\mathbb{R}^k$ . Zatem można je przedstawić w bazie  $e_1, \dots, e_k$ :

$$(5) \quad u_i(t) = \sum_{j=1}^k u_{i,j}(t)e_j, \quad i = 1, \dots, k.$$

Otrzymaliśmy  $k^2$  funkcji skalarnych  $u_{i,j}, i, j = 1, \dots, k$ , spełniających układ

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{du_{i,j}}{dt} &= \sum_{l=1}^k a_{i,l} u_{l,j}, \\ u_{i,j}(t_0) &= \delta_{i,j} \end{cases}$$

Korzystając z (4) i (5) dostajemy

$$u_i(t) = R(t, t_0)e_i = \sum_{j=1}^k u_{i,j}(t)e_j, \quad i = 1, \dots, k.$$

Zatem macierz  $\{u_{i,j}\}_{i,j=1}^k$  jest macierzą operatora rezolwenty  $R(t, t_0)$  w bazie  $e_1, \dots, e_k$ .

**Definicja.** *Wyznacznikiem Wrońskiego lub wrońskianem* układu (2) nazywamy wyznacznik macierzy operatora rezolwenty w ustalonej bazie przestrzeni,

$$W(t) = \det \left( \{u_{i,j}\}_{i,j=1}^k \right).$$

## 7.5. Twierdzenie Liouville'a.

Ponieważ rozwiązanie układu (2) jest funkcją klasy  $C^1$ , więc również funkcje  $u_{i,j}$ ,  $i, j = 1, \dots, k$ , są klasy  $C^1$ . Zatem również wyznacznik Wronskiego  $W(t)$  jest klasy  $C^1$  i możemy policzyć jego pochodną  $\frac{dW}{dt}$ . W tym celu potraktujemy  $W(t)$  jako złożenie funkcji

$$\left(u_{i,j}\right)_{i,j=1}^k \mapsto W\left(\left(u_{i,j}\right)_{i,j=1}^k\right)$$

z funkcjami  $t \mapsto u_{i,j}(t)$ ,  $i, j = 1, \dots, k$ . Korzystając ze wzoru na pochodną złożenia funkcji dostajemy

$$(7) \quad \frac{dW(t)}{dt} = \sum_{i,j=1}^k \frac{\partial W}{\partial u_{i,j}} \cdot \frac{du_{i,j}(t)}{dt}.$$

Następnie rozwijając  $W(t)$  względem  $i$ -tej kolumny zauważamy, że

$$\frac{\partial W}{\partial u_{i,j}} = (-1)^{i+j} Du_{i,j}, \quad i, j = 1, \dots, k,$$

gdzie  $Du_{i,j}$  oznacza dopełnienie algebraiczne elementu  $u_{i,j}$ ,  $i, j = 1, \dots, k$ . Wstawiając powyższe do (7) i korzystając z (6) dostajemy

$$\begin{aligned} \frac{dW(t)}{dt} &= \sum_{i,j=1}^k (-1)^{i+j} Du_{i,j} \left( \sum_{l=1}^k a_{i,l} u_{l,j} \right) \\ &= \sum_{i,l=1}^k \left( \sum_{j=1}^k (-1)^{i+j} Du_{i,j} u_{l,j} \right) a_{i,l}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że jeśli  $i = l$ , to

$$\sum_{j=1}^k (-1)^{i+j} Du_{i,j} u_{l,j} = \det \left( u_{i,j} \right) = W;$$

natomiast jeśli  $i \neq l$ , to

$$\sum_{j=1}^k (-1)^{i+j} Du_{i,j} u_{l,j} = 0.$$

Zatem

$$\frac{dW(t)}{dt} = \sum_{i,l=1}^k \delta_{i,l} W(t) \cdot a_{i,l} = W(t) \sum_{i=1}^k a_{i,i}.$$



Czyli

$$\frac{dW(t)}{dt} = W(t) \cdot \text{Tr}A,$$

gdzie  $\text{Tr}A = \sum_{i=1}^k a_{i,i}$  jest śladem operatora  $A$ . Całkując powyższe skalarne równanie dostajemy wzory Liouville'a

$$(8) \quad W(t) = W(t_0) \exp \left\{ \int_{t_0}^t \text{Tr}A(\tau) d\tau \right\}$$

oraz ponieważ  $W(t_0) = \det R(t_0, t_0) = 1$ ,

$$(8') \quad W(t) = \exp \left\{ \int_{t_0}^t \text{Tr}A(\tau) d\tau \right\}$$

Wzory Liouville'a pokazują, że wyznacznik Wrońskiego układu funkcji  $(u_{i,j})_{i,j=1}^k$  spełniających układ równań (6) nie znika w żadnym punkcie o ile nie znika on w punkcie  $t_0$ . Znaczy to, że wektory utworzone przez kolumny macierzy  $\{u_{i,j}(t)\}_{i,j=1}^k$  są liniowo niezależne, o ile są one liniowo niezależne w chwili  $t_0$ . Wykazaliśmy zatem

**Twierdzenie 3.** (Liouville'a.) *Układ  $k$  funkcji o wartościach wektorowych*

$$I \ni t \mapsto u_i(t) \in \mathbb{R}^k, \quad i = 1, \dots, k$$

*będących rozwiązaniami układu (2) tworzy bazę przestrzeni rozwiązań tego układu wtedy i tylko wtedy, gdy wektory  $u_1(t_0), \dots, u_k(t_0)$  są liniowo niezależne. Wówczas dla każdego  $t \in I$  wektory  $u_1(t), \dots, u_k(t)$  są również liniowo niezależne.*

## 7.6. Niejednorodny układ równań liniowych.

Zajmiemy się teraz znalezieniem rozwiązania układu liniowego niejednorodnego

$$(1') \quad \begin{cases} \dot{x} &= A(t)x + b(t), \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

Zastosujemy metodę uzmienniana stałej tzn. rozwiązania będziemy szukać w postaci

$$(9) \quad x(t) = R(t, t_0) \cdot C(t),$$

gdzie  $R(t, t_0)$  jest rezolwentą układu jednorodnego (2'), a  $C(t)$  jest funkcją o wartościach w  $\mathbb{R}^k$  spełniającą warunek

$$(9') \quad C(t_0) = x_0.$$

Różniczkując  $x(t)$  względem  $t$  i korzystając z (1) mamy

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{dR(t, t_0)}{dt} \cdot C(t) + R(t, t_0) \cdot \frac{dC(t)}{dt} \stackrel{(1)}{=} A(t) \circ R(t, t_0) \cdot C(t) + b(t).$$

Wobec punktu 3° Twierdzenia 3 mamy

$$\frac{dR(t, t_0)}{dt} = A(t) \circ R(t, t_0).$$

Zatem

$$R(t, t_0) \cdot \frac{dC(t)}{dt} = b(t).$$

Stąd

$$\frac{dC(t)}{dt} = (R(t, t_0))^{-1} \cdot b(t) = R(t_0, t) \cdot b(t).$$

Całkując obie strony z uwzględnieniem warunku (9') dostajemy

$$C(t) = x_0 + \int_{t_0}^t R(t_0, s) \cdot b(s) ds.$$

Ostatecznie wstawiając  $C(t)$  do (9) i korzystając z punktu 4° Twierdzenia 2 dostajemy rozwiązanie problemu (1')

$$\begin{aligned} x(t) &= R(t, t_0) \cdot x_0 + R(t, t_0) \int_{t_0}^t R(t_0, s) \cdot b(s) ds \\ (10) \quad &= R(t, t_0) \cdot x_0 + \int_{t_0}^t R(t, s) \cdot b(s) ds. \end{aligned}$$

Zauważmy, że rozwiązanie problemu (1') składa się z dwóch składników. Pierwszy  $R(t, t_0) \cdot x_0$  jest rozwiązaniem układu jednorodnego (2'), natomiast drugi  $\int_{t_0}^t R(t, s) \cdot b(s) ds$  jest rozwiązaniem szczególnym układu niejednorodnego (1) spełniającym warunek  $x(t_0) = 0$ .

Zapiszmy teraz układ (1) w bazie  $e_1, \dots, e_k$

$$(11) \quad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^k a_{i,j} x_j + b_i(t), \quad i = 1, \dots, k$$

z warunkami początkowymi

$$(11') \quad x_i(t_0) = x_i^0, \quad i = 1, \dots, k,$$

gdzie  $x_0 = \sum_{i=1}^k x_i^0 e_i$ .

Niech

$$(4) \quad u_i(t) = R(t, t_0)e_i, \quad i = 1, \dots, k.$$

będzie układem fundamentalnym rozwiązań układu jednorodnego. Ponieważ

$$(5) \quad u_i(t) = \sum_{j=1}^k u_{i,j}(t)e_j, \quad i = 1, \dots, k.$$

oraz

$$R(t, t_0) = \left( u_{i,j}(t) \right)_{i,j=1}^k$$

ze wzoru (10) dostajemy

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^k u_{i,j}(t)x_j^0 + \sum_{j=1}^k u_{i,j}(t) \cdot \int_{t_0}^t \sum_{l=1}^k \frac{(-1)^{j+l} Du_{j,l}(s)}{W(s)} b_l(s) ds.$$

## 7.7. Równanie liniowe rzędu $k$ .

Rozpatrzmy równanie liniowe niejednorodne rzędu  $k$

$$(12) \quad \frac{d^k x}{dt^k} = \sum_{i=0}^{k-1} a_i(t) \frac{d^i x}{dt^i} + b(t)$$

z warunkami początkowymi

$$x(t_0) = x_0^0, \quad \frac{dx}{dt}(t_0) = x_1^0, \quad \dots, \quad \frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}} = x_{k-1}^0.$$

Podstawiając

$$x_1(t) = x(t), \quad x_2(t) = \frac{dx}{dt}(t), \quad \dots, \quad x_k = \frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}}(t)$$

dostajemy układ  $k$  równań rzędu pierwszego

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = x_2, \\ \dot{x}_2 & = x_3, \\ \vdots & \vdots \\ \dot{x}_{k-1} & = x_k, \\ \dot{x}_k & = \sum_{i=0}^{k-1} a_i(t)x_{i+1} + b(t), \end{cases}$$

z warunkami początkowymi  $x_i(t_0) = x_{i-1}^0$ ,  $i = 1, \dots, k$ .

Układ ten zapisuje się w postaci wektorowej

$$(13) \quad \dot{y} = A(t)y + B(t),$$

gdzie  $y(t) = (x_1(t), \dots, x_k(t))^{tr}$ ,  $B(t) = (0, \dots, b_k(t))^{tr}$  oraz

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & a_2(t) & \dots & a_{k-1}(t) \end{pmatrix}.$$

Zauważmy, że śladem macierze  $A$  jest  $Tr(A) = a_{k-1}(t)$ . Niech  $\{u_{i,j}\}_{i,j=1}^k$  będzie układem fundamentalnym dla  $\dot{y} = A(t)y$ . Wówczas funkcje  $v_j$ ,  $j = 1, \dots, k$  spełniające

$$\begin{cases} v_j^{(i-1)}(t) &= u_{i,j}(t), \\ v_j^{(i-1)}(t_0) &= \delta_{i,j} \end{cases}$$

stanowią bazę przestrzeni rozwiązań równania jednorodnego

$$(14) \quad \frac{d^k x}{dt^k} = \sum_{i=0}^{k-1} a_i(t) \frac{d^i x}{dt^i}.$$

Wrońskianem układu jednorodnego jest

$$W(t) = \det \left( \{u_{i,j}(t)\}_{i,j=1}^k \right) = \det \left( \{v_j^{(i-1)}(t)\}_{i,j=1}^k \right).$$

Zatem na mocy wzoru Liouville'a

$$W(t) = W(t_0) \exp \left\{ \int_{t_0}^t a_{k-1}(s) ds \right\}.$$

**Wniosek.** Aby układ funkcji  $v_j(t)$ ,  $j = 1, \dots, k$  spełniających równanie jednorodne (14) był bazą przestrzeni rozwiązań tego równania potrzeba i wystarczy aby  $W(t_0) \neq 0$ .

Mając dany układ fundamentalny rozwiązań równania jednorodnego (14) spełniający warunek

$$v_j^{(i-1)}(t_0) = \delta_{i,j} \quad i, j = 1, \dots, k$$

rozwiązanie problemu (12) wyraża się przez

$$(15) \quad x(t) = \sum_{i=1}^k v_i(t) x_{i-1}^0 + \sum_{i=1}^k v_i(t) \int_{t_0}^t \frac{(-1)^{i+k-1} Dv_i^{k-1}(s)}{W(s)} b(s) ds.$$

## 8. Układy równań liniowych o stałych współczynnikach.

### 8.1. Układ jednorodny równań liniowych o stałych współczynnikach.

Zajmiemy się teraz konstrukcją rozwiązania układu równań liniowych o stałych współczynnikach

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x} &= Ax, \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases}$$

gdzie  $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,k}$  jest macierzą o stałych współczynnikach. Jeśli  $k = 1$ , to rozwiązanie problemu (1) wyraża się wzorem

$$(2) \quad x(t) = \exp\{A(t - t_0)\} \cdot x_0,$$

czyli rezolwentą jest  $R(t, t_0) = \exp\{A(t - t_0)\}$ . Okazuje się, że analogicznym wzorem wyraża się rozwiązanie (1) dla dowolnego  $k \in \mathbb{N}$ . Należy tylko zdefiniować operację

$$M(k \times k) \ni A \mapsto \exp\{A\} \in M(k \times k).$$

**Definicja.** Niech  $A \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$  będzie odwzorowaniem liniowym. Definiujemy

$$(3) \quad \exp\{A\} = e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!},$$

gdzie  $A^0 = Id$ .

**Lemat.** Niech  $A \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ . Wówczas szereg (3) jest zbieżny w przestrzeni  $L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k) \simeq \mathbb{R}^{k^2}$ .

**Dowód.** Przypomnijmy, że normą operatora  $A \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$  jest

$$\|A\|_{L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_{\mathbb{R}^k}}{\|x\|_{\mathbb{R}^k}} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|_{\mathbb{R}^k}.$$

Wobec zupełności przestrzeni  $L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$  wystarczy wykazać, że ciąg sum częściowych w (3) jest ciągiem Cauchy'ego. W tym celu weźmy dowolne  $\varepsilon > 0$ . Szukamy  $N \in \mathbb{N}$  takiego, aby dla dowolnych  $i > j \geq N$  zachodziło

$$\|S_i - S_j\|_{L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)} < \varepsilon,$$

gdzie  $S_i$  oznacza  $i$ -tą sumę częściową. Ponieważ wiemy, że szereg liczbowy  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|^n}{n!} = e^{\|A\|}$  jest zbieżny, więc wobec zupełności  $\mathbb{R}$  istnieje  $N \in \mathbb{N}$  takie, że  $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{\|A\|^n}{n!} < \varepsilon$ . Wówczas dla  $i > j \geq N$  mamy

$$\begin{aligned} \|S_i - S_j\| &= \left\| \sum_{n=0}^i \frac{A^n}{n!} - \sum_{n=0}^j \frac{A^n}{n!} \right\| = \left\| \sum_{n=j+1}^i \frac{A^n}{n!} \right\| \\ &\leq \sum_{n=j+1}^i \frac{\|A^n\|}{n!} \leq \sum_{n=N}^i \frac{\|A^n\|}{n!} < \varepsilon. \quad \diamond \end{aligned}$$

**Twierdzenie 1.** Niech  $A \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ . Wówczas funkcja o wartościach operatorowych

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto X(t) = \exp\{t \cdot A\} \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$$

jest jedynym rozwiązaniem problemu

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{dX}{dt} &= AX, \\ X(0) &= Id. \end{cases}$$

**Dowód.** Jest jasne, że  $\exp\{0 \cdot A\} = Id$ . Zatem wystarczy wykazać, że

$$\frac{d}{dt} \exp\{t \cdot A\} = A \circ \exp\{t \cdot A\}.$$

Korzystając z definicji  $\exp\{t \cdot A\}$  liczymy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \exp\{t \cdot A\} &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t \cdot A)^n}{n!} \right) \stackrel{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{d}{dt} (t^n \cdot A^n)}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nt^{n-1} \cdot A^n}{n!} = A \circ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1} \cdot A^{n-1}}{(n-1)!} = A \circ \exp\{t \cdot A\}. \end{aligned}$$

Należy jeszcze uzasadnić równość ze znakiem zapytania czyli wykazać możliwość różniczkowania szeregu wyraz po wyrazie. Istotnie tak jest gdyż pochodna ciągu sum częściowych

$$\frac{d}{dt} S_i(t) = A \circ \sum_{n=0}^{i-1} \frac{(t \cdot A)^n}{n!}$$

jest zbieżna niemal jednostajnie względem  $t \in \mathbb{R}$  do  $A \circ \exp\{t \cdot A\}$ .  $\diamond$

**Wniosek 1.** Rozwiązanie zagadnienia (1) jest postaci

$$(5) \quad \mathbb{R} \ni t \mapsto \exp\{(t - t_0) \cdot A\}x_0.$$

Zatem  $R(t, t_0) = \exp\{(t - t_0) \cdot A\}$

**Dowód.** Niech  $x(t) = \exp\{(t - t_0) \cdot A\}x_0$ . Wówczas

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= \frac{d}{dt} \exp\{(t - t_0) \cdot A\}x_0 = A \circ \exp\{(t - t_0) \cdot A\}x_0 = Ax(t), \\ x(t_0) &= \exp\{(t - t_0) \cdot A\}x_0|_{t=t_0} = Id x_0 = x_0. \quad \diamond \end{aligned}$$

**Lemat 1.** Jeśli operatory  $A, B \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$  są przemiennie, to

$$\exp\{A + B\} = \exp\{A\} \circ \exp\{B\}$$

**Dowód.** Korzystając z iloczynu szeregów i przemienności operatorów  $A, B$  liczymy

$$\begin{aligned} \exp\{A\} \circ \exp\{B\} &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!} \circ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B^j}{j!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} \binom{n}{i} \frac{A^i \circ B^j}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A + B)^n}{n!} = \exp\{A + B\}. \quad \diamond \end{aligned}$$

**Wniosek 2.** Niech  $A \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ . Wówczas dla  $t, s \in \mathbb{R}$  zachodzi

$$\exp\{(t + s)A\} = \exp\{tA\} \circ \exp\{sA\}.$$

W szczególności operator  $\exp\{A\}$  jest odwracalny i

$$(\exp\{A\})^{-1} = \exp\{-A\}.$$

Otrzymane rozwiązanie zagadnienia (1) w postaci szeregu (5) jest niewygodne w praktycznych rachunkach. Pokażemy teraz w jaki sposób praktycznie można policzyć funkcję wykładniczą  $\exp\{A\}$ . W tym celu szukamy liczb zespolonych  $\lambda \in \mathbb{C}$  takich, że

$$(6) \quad Ax = \lambda x, \quad \text{dla pewnego } x \neq 0.$$

Liczby te nazywają się *wartościami własnymi* macierzy  $A$ , a odpowiadające im niezerowe wektory  $x$  - *wektorami własnymi*. Zauważmy, że równanie (6) można zapisać w postaci

$$(A - \lambda Id)x = 0.$$

Równanie to ma niezerowe rozwiązania wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(7) \quad \det(A - \lambda Id) = 0.$$

Wielomian zmiennej  $\lambda$ ,  $\det(A - \lambda Id)$  nazywa się *wielomianem charakterystycznym*, a jego pierwiastki *liczbami charakterystycznymi* lub *wartościami własnymi* macierzy  $A$ .

Niech  $\lambda_1, \dots, \lambda_l$  będą wartościami własnymi macierzy  $A$  o krotnościach odpowiednio  $n_1, \dots, n_l$ . Oczywiście na mocy podstawowego twierdzenia algebry  $n_1 + \dots + n_l = k$ . Przypomnijmy twierdzenie Jordana z algebry linowej.

**Twierdzenie** (Jordana). *Niech  $A \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ . Wówczas w  $\mathbb{C}^k$  istnieje  $l$  podprzestrzeni liniowych  $X_i \subset \mathbb{C}^k$ ,  $i = 1, \dots, l$ , gdzie  $l$  jest liczbą różnych wartości własnych  $A$  spełniających warunki:*

- 1°.  $AX_i \subset X_i$ ,  $i = 1, \dots, l$ ;
- 2°.  $X_i \cap X_j = \{0\}$  dla  $i, j = 1, \dots, l, i \neq j$ ;
- 3°.  $\bigoplus_{i=1}^l X_i = \mathbb{C}^k$ ;
- 4°.  $\dim X_i = n_i$  dla  $i = 1, \dots, l$ ;
- 5°.  $X_i = \{x \in \mathbb{C}^k : (A - \lambda_i Id)^{n_i} x = 0\}$  dla  $i = 1, \dots, l$ .

Zatem, wobec punktów 2° i 3°, dla dowolnego  $x \in \mathbb{C}^k$  istnieje jednoznaczny rozkład  $x = \sum_{i=1}^l x_i$ , gdzie  $x_i \in X_i$  dla  $i = 1, \dots, l$ .

Wiemy, że rozwiązanie problemu (1) wyraża się wzorem

$$(2) \quad x(t) = \exp\{A(t - t_0)\} \cdot x_0.$$

Przedstawmy  $x_0$  jako sumę wektorów należących do przestrzeni własnych macierzy  $A$  tzn.

$$x_0 = \sum_{i=1}^l x_i^0, \quad \text{gdzie } x_i^0 \in X_i, \quad i = 1, \dots, l.$$

Korzystając z tożsamości

$$\exp\{(t - t_0)A\} = \exp\{(t - t_0)\lambda_i Id\} \circ \exp\{(t - t_0)(A - \lambda_i Id)\}$$

zapiszmy (2) w postaci

$$\begin{aligned} x(t) &= \exp\{(t - t_0)A\} \sum_{i=1}^l x_i^0 \\ &= \sum_{i=1}^l \exp\{(t - t_0)\lambda_i Id\} \circ \exp\{(t - t_0)(A - \lambda_i Id)\} x_i^0 \\ &= \sum_{i=1}^l \exp\{(t - t_0)\lambda_i Id\} \circ \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t - t_0)^n}{n!} (A - \lambda_i Id)^n x_i^0 \right). \end{aligned}$$



Wobec punktu 5° twierdzenia Jordana mamy  $(A - \lambda_i Id)^n x_i^0$  dla  $n \geq n_i$ .  
Zatem dostajemy wzór na rozwiązanie (1) w postaci skończonej sumy

$$(8) \quad x(t) = \sum_{i=1}^l \exp\{(t - t_0)\lambda_i Id\} \circ \left( \sum_{n=0}^{n_i-1} \frac{(t - t_0)^n}{n!} (A - \lambda_i Id)^n x_i^0 \right).$$

## 8.2. Algorytm liczenia macierzy $\exp\{tA\}$ .

Rozważmy najpierw przypadek, gdy wartości własne  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  są parami różne. Wówczas podprzestrzenie własne są jednowymiarowe i są rozpięte przez wektory własne  $v_{\lambda_1}, \dots, v_{\lambda_k} \in \mathbb{C}^k$ , gdzie

$$(A - \lambda_i Id)v_{\lambda_i} = 0 \quad \text{dla } i = 1, \dots, k.$$

Ponadto, ponieważ macierz  $A$  jest rzeczywista dla każdej pary sprzężonych wartości własnych można dobrać parę sprzężonych wektorów własnych. Tworzymy macierz  $B = (v_{\lambda_1}, \dots, v_{\lambda_k})$ . Macierz  $B$  jest macierzą przejścia z bazy standardowej  $(e_1, \dots, e_k)$  do bazy złożonej z wektorów własnych  $(v_{\lambda_1}, \dots, v_{\lambda_k})$ , w której to bazie macierzą przekształcenia  $A$  jest macierz diagonalna tzn.

$$B^{-1} \circ A \circ B = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k).$$

Oczywiście

$$\exp\{t \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)\} = \text{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_k}).$$

Zatem w bazie standardowej

$$\exp\{tA\} = B \circ \text{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_k}) \circ B^{-1}.$$

Przejdźmy teraz do rozważenia sytuacji wielokrotnych wartości własnych. Jeśli  $\lambda$  jest  $n$ -krotną wartością własną i odpowiadająca jej klatka Jordana jest postaci

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix},$$

to istnieje  $n$  liniowo niezależnych wektorów własnych odpowiadających wartości własnej  $\lambda$ . Zatem sytuacja nie różni się od przypadku jednokrotnych wartości własnych. Czyli

$$\exp\{tA_\lambda\} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{t\lambda} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{t\lambda} \end{pmatrix}.$$

Jeśli  $\lambda$  jest  $n$ -krotną wartością własną i odpowiadająca jej klatka Jordana jest postaci

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

to  $\lambda$  odpowiada tylko jeden wektor własny i trzeba go uzupełnić  $(n - 1)$  liniowo niezależnymi wektorami w taki sposób, aby wszystkie one rozpięły podprzestrzeń niezmienniczą dla  $\lambda$ . Wówczas

$$\exp\{tA_\lambda\} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & te^{t\lambda} & \frac{t^2}{2}e^{t\lambda} & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}e^{t\lambda} & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{t\lambda} \\ 0 & e^{t\lambda} & te^{t\lambda} & \dots & \frac{t^{n-3}}{(n-3)!}e^{t\lambda} & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}e^{t\lambda} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{t\lambda} & te^{t\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e^{t\lambda} \end{pmatrix},$$

**Uwagi.**

**1.** Macierze zawierające klatki Jordana odpowiadające różnym wartościom własnym komutują między sobą. Zatem

$$\exp\{t(A_{\lambda_1} + A_{\lambda_2})\} = \exp\{tA_{\lambda_1}\} \circ \exp\{tA_{\lambda_2}\}.$$

**2.** Rozwiązanie ogólne równania (1) można zapisać w postaci

$$x(t) = \exp\{tA\}C, \quad \text{gdzie } C = (C_1, \dots, C_k)^{tr}.$$

**3.** Układem fundamentalnym lub bazą rozwiązań układu (1) jest układ funkcji  $\{\exp\{tA\}e_i, i = 1, \dots, k\}$ .

### 8.3. Układ niejednorodny równań liniowych o stałych współczynnikach.

Zajmiemy się teraz rozwiązywaniem układu niejednorodnego

$$(9) \quad \dot{x} = Ax + f(t),$$

gdzie  $A \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$  jest odwzorowaniem liniowym, a  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^k$  jest funkcją ciągłą o wartościach w  $\mathbb{R}^k$ . W tym celu zastosujemy metodę uzmienniania stałych. Mianowicie szukamy rozwiązania (9) w postaci

$$(10) \quad x(t) = \exp\{tA\}C(t).$$

Wówczas

$$\dot{x}(t) = A \circ \exp\{tA\}C(t) + \exp\{tA\}\dot{C}(t).$$

Zatem wstawiając do (9)

$$A \circ \exp\{tA\}C(t) + \exp\{tA\}\dot{C}(t) = A \circ \exp\{tA\}C(t) + f(t).$$

Stąd

$$\dot{C}(t) = \exp\{-tA\}f(t).$$

Po wyliczeniu  $C_1(t), \dots, C_k(t)$  wstawiamy do (10).

## 8.4. Układ dwóch równań liniowych o stałych współczynnikach.

Niech

$$\dot{x} = Ax, \quad \text{gdzie } A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

będzie układem równań liniowych na płaszczyźnie. Jeśli równanie charakterystyczne  $\det(A - \lambda Id) = 0$  ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste  $\lambda_1 < \lambda_2$ , to w bazie własnej układ rozkłada się na dwa równania jednowymiarowe  $\dot{y}_1 = \lambda_1 y_1, \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2$ .

Stąd  $y_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}, y_2(t) = C_2 e^{\lambda_2 t}$ , a zatem  $y_2 = C y_1^{\lambda_2/\lambda_1}$ .

Krzywe fazowe układu wyglądają następująco

$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ . Węzeł stabilny.

$0 < \lambda_1 < \lambda_2$ . Węzeł niestabilny.

$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ . Siodło.

$0 = \lambda_1 < \lambda_2$ .

Jeśli równanie charakterystyczne ma podwójny pierwiastek rzeczywisty  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ , to możliwe są dwie sytuacje.

1. Jeśli istnieją dwa liniowo niezależne wektory własne, to  $y_2 = Cy_1$ .

$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ . Węzeł stabilny.                       $0 < \lambda_1 = \lambda_2$ . Węzeł niestabilny.

2. Jeśli istnieje tylko jeden wektor własny, to układ sprowadza się do układu

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= \lambda y_1 + y_2, \\ \dot{y}_2 &= \lambda y_2. \end{cases}$$

Jego rozwiązaniem jest

$$\begin{aligned} y_1 &= (C_1 + C_2 t)e^{\lambda t}, \\ y_2 &= C_2 e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

Krzywe fazowe tworzą węzeł zdegenerowany, stabilny jeśli  $\lambda < 0$  i niestabilny jeśli  $\lambda > 0$ .

$\lambda < 0$ . Węzeł zdeg. stabilny.                       $\lambda > 0$ . Węzeł zdeg. niestabilny.

Ostatecznie jeśli równanie charakterystyczne ma dwa pierwiastki zespolone  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega$ ,  $\omega \neq 0$ , to krzywe fazowe tworzą środek jeśli  $\alpha = 0$ , ognisko stabilne jeśli  $\alpha < 0$  i ognisko niestabilne jeśli  $\alpha > 0$ .

$\alpha = 0$ . Środek.

$\alpha > 0$ . Ognisko niestabilne.

## 8.5. Równanie wahadła z tarciem.

Zastosujmy powyższą analizę do zbadania równania wahadła z tarciem

$$\ddot{x} = -x - k\dot{x}, \quad k > 0,$$

które jest równoważne układowi równań

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - kx_2. \end{cases}$$

Równaniem charakterystycznym jest

$$\lambda^2 + k\lambda + 1 = 0.$$

Jeśli  $k > 2$  (duże tarcie), to ma ono dwa rzeczywiste ujemne pierwiastki

$$\lambda_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2}.$$

Zatem krzywe fazowe tworzą węzeł stabilny. Zauważmy, że wahadło co najwyżej raz zmieni kierunek ruchu.

Krzywe fazowe w bazie własnej.

Faktyczne krzywe fazowe.

Rozpatrzmy teraz sytuację, gdy tarcie jest małe  $0 < k < 2$ . Wówczas równanie charakterystyczne ma pierwiastki zespolone

$$\lambda_{1,2} = -\frac{k}{2} \pm i \frac{\sqrt{4 - k^2}}{2} =: \alpha \pm i\omega.$$

Ponieważ  $\alpha = -k/2 < 0$  położenie równowagi  $x_1 = x_2 = 0$  jest ogniskiem stabilnym, które przechodzi w środek, gdy  $k \rightarrow 0$ . Rozwiązaniem ogólnym jest

$$\begin{aligned} x(t) = x_1(t) &= e^{\alpha t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \\ &= r e^{\alpha t} \sin(\omega t + \varphi). \end{aligned}$$

Drgania wahadła zanikają wykładniczo, a ich częstość wynosi  $\omega = \sqrt{1 - k^2/4}$

$0 < k < 2$ . Ognisko stabilne.

## 8.6. Równanie liniowe jednorodne rzędu $k$ o stałych współczynnikach.

Rozpatrzmy równanie

$$(11) \quad \frac{d^k x}{dt^k} + \sum_{i=0}^{k-1} a_i \frac{d^i x}{dt^i} = f(t).$$

Zgodnie z ogólną teorią równań liniowych najpierw znajdziemy rozwiązanie równania jednorodnego tzn. równania

$$(12) \quad \frac{d^k x}{dt^k} + \sum_{i=0}^{k-1} a_i \frac{d^i x}{dt^i} = 0.$$

Korzystając z pomysłu Eulera szukamy rozwiązania w postaci

$$x(t) = e^{\lambda t}.$$

Wstawiając powyższą funkcję do równania (12) dostajemy

$$\left(\lambda^k + \sum_{i=0}^{k-1} a_i \lambda^i\right) e^{\lambda t} = 0.$$

Ponieważ  $e^{\lambda t} \neq 0$  wnioskujemy stąd, że funkcja  $x(t) = e^{\lambda t}$  jest rozwiązaniem równania jednorodnego wtedy i tylko wtedy, gdy  $\lambda$  jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego

$$(13) \quad P(\lambda) = \lambda^k + \sum_{i=0}^{k-1} a_i \lambda^i.$$

**1.** Jeśli wielomian charakterystyczny (13) ma  $k$  parami różnych pierwiastków rzeczywistych  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ , to każda z funkcji  $e^{\lambda_i t}$  jest rozwiązaniem równania (12). Ponadto, funkcje te są liniowo niezależne. Zatem rozwiązaniem ogólnym równania (12) jest

$$x(t) = \sum_{i=1}^k C_i e^{\lambda_i t}.$$

**2.** Jeśli pierwiastki równania charakterystycznego są parami różne, lecz są wśród nich pierwiastki zespolone, to również każda z funkcji  $e^{\lambda_i t}$  jest rozwiązaniem równania (12). Tym nie mniej funkcje te przyjmują teraz wartości zespolone. Aby wyznaczyć rozwiązanie rzeczywiste stosujemy następującą procedurę. Niech  $\lambda = \alpha + i\beta$  będzie pierwiastkiem równania charakterystycznego, przy czym  $\beta \neq 0$ . Wówczas liczba sprzężona  $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$  też jest pierwiastkiem równania charakterystycznego. Zatem dla dowolnych  $a, b \in \mathbb{C}$  funkcja zespolona

$$ae^{(\alpha+i\beta)t} + be^{(\alpha-i\beta)t}$$

jest rozwiązaniem równania (12). Kładąc

$$a = \frac{C_1 - iC_2}{2}, \quad b = \frac{C_1 + iC_2}{2} \quad \text{dla } C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

i stosując wzór Eulera  $e^{(\alpha \pm i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t \pm i \sin \beta t)$  wnioskujemy, że funkcja rzeczywista

$$C_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + C_2 e^{\alpha t} \sin \beta t$$

jest rozwiązaniem (12). Procedurę tę przeprowadzamy dla każdej pary sprzężonych pierwiastków wielomianu charakterystycznego.

**3.** Załóżmy, że  $\lambda_1$  jest  $n$ -krotnym pierwiastkiem równania charakterystycznego, gdzie  $2 \leq n \leq k$ . Wówczas

$$P(\lambda_1) = P'(\lambda_1) = \dots = P^{(n-1)}(\lambda_1) = 0, \quad P^{(n)}(\lambda_1) \neq 0.$$

W celu znalezienia rozwiązań równania (12) innych niż  $e^{\lambda_1 t}$  zróżniczkujemy wyrażenie  $P(\lambda)e^{\lambda t}$ ,  $l$ -krotnie względem zmiennej  $\lambda$ ,  $l = 0, 1, \dots, n-1$ . Korzystając ze wzoru Leibniza

$$(u \cdot v)^{(l)} = \sum_{i=0}^l \binom{l}{i} u^{(i)} \cdot v^{(l-i)}$$

dostajemy

$$(P(\lambda) \cdot e^{\lambda t})_{\lambda}^{(l)} = \sum_{i=0}^l \binom{l}{i} P^{(i)} \cdot t^{l-i} e^{\lambda t}.$$

Wstawiając  $\lambda = \lambda_1$  wnioskujemy, że funkcje

$$e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \dots, t^{n-1} e^{\lambda_1 t}$$

są rozwiązaniami równania (12). Funkcje te są liniowo niezależne i rzeczywiste i ile  $\lambda_1$  jest rzeczywiste.

Jeśli  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ,  $\beta \neq 0$  jest  $n$ -krotnym pierwiastkiem zespolonym równania charakterystycznego, to również  $\bar{\lambda}_1 = \alpha - i\beta$  jest  $n$ -krotnym pierwiastkiem zespolonym równania charakterystycznego. Para tych pierwiastków wyznacza  $2n$  liniowo niezależnych, rzeczywistych rozwiązań równania (12)

$$\begin{aligned} e^{\alpha t} \sin \beta t, \quad te^{\alpha t} \sin \beta t, \quad \dots, \quad t^{n-1} e^{\alpha t} \sin \beta t, \\ e^{\alpha t} \cos \beta t, \quad te^{\alpha t} \cos \beta t, \quad \dots, \quad t^{n-1} e^{\alpha t} \cos \beta t. \end{aligned}$$

## 8.7. Równanie liniowe niejednorodne rzędu $k$ o stałych współczynnikach. Metoda uzmienniania stałych.

Powróćmy teraz do równania liniowego niejednorodnego rzędu  $k$

$$(11) \quad \frac{d^k x}{dt^k} + \sum_{i=0}^{k-1} a_i \frac{d^i x}{dt^i} = f(t), \quad \text{gdzie } f \in C^0(I; \mathbb{R}).$$

Zgodnie z ogólną teorią równań liniowych rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego (11) jest sumą rozwiązania ogólnego równania jednorodnego (12) i rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego (11). W ogólnym przypadku w celu znalezienia rozwiązania szczególnego równania (11) stosujemy metodę uzmienniania stałych. Mianowicie jeśli  $x_1, \dots, x_k$  są liniowo niezależnymi rozwiązaniami równania jednorodnego (12), to szukamy rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego w postaci

$$x_{sz} = \sum_{i=1}^k C_i(t) x_i.$$



Aby znaleźć  $x_{sz}$  liczymy pochodne tej funkcji do rzędu  $k$ .

$$\dot{x}_{sz} = \sum_{i=1}^k \dot{C}_i(t)x_i + \sum_{i=1}^k C_i(t)\dot{x}_i = \sum_{i=1}^k C_i(t)\dot{x}_i \quad \text{pod warunkiem, że}$$

$$(R1) \quad \sum_{i=1}^k \dot{C}_i(t)x_i = 0.$$

$$\ddot{x}_{sz} = \sum_{i=1}^k \dot{C}_i(t)\dot{x}_i + \sum_{i=1}^k C_i(t)\ddot{x}_i = \sum_{i=1}^k C_i(t)\ddot{x}_i \quad \text{pod warunkiem, że}$$

$$(R2) \quad \sum_{i=1}^k \dot{C}_i(t)\dot{x}_i = 0.$$

⋮

$$x_{sz}^{(k-1)} = \sum_{i=1}^k \dot{C}_i(t)x_i^{(k-2)} + \sum_{i=1}^k C_i(t)x_i^{(k-1)} = \sum_{i=1}^k C_i(t)x_i^{(k-1)} \quad \text{pod warunkiem,}$$

$$(R(k-1)) \quad \sum_{i=1}^k \dot{C}_i(t)x_i^{(k-2)} = 0.$$

$$x_{sz}^{(k)} = \sum_{i=1}^k \dot{C}_i(t)x_i^{(k-1)} + \sum_{i=1}^k C_i(t)x_i^{(k)}.$$

Wstawiając do równania (11) dostajemy

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^k \dot{C}_i(t)x_i^{(k-1)} + \sum_{i=1}^k C_i(t)x_i^{(k)} + \sum_{j=0}^{k-1} a_j \sum_{i=1}^k C_i(t)x_i^{(j)} \\ &= \sum_{i=1}^k \dot{C}_i(t)x_i^{(k-1)} + \sum_{i=1}^k C_i(t) \left[ x_i^{(k)} + \sum_{j=0}^{k-1} a_j x_i^{(j)} \right] \\ &= \sum_{i=1}^k \dot{C}_i(t)x_i^{(k-1)} = f(t). \end{aligned}$$

Zatem ponieważ zakładaliśmy warunki (R1),..., (R(k-1)) funkcje  $C_1(t), \dots, C_k(t)$  spełniają układ równań

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^k \dot{C}_i(t)x_i & = 0, \\ \sum_{i=1}^k \dot{C}_i(t)\dot{x}_i & = 0, \\ \vdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^k \dot{C}_i(t)x_i^{(k-2)} & = 0, \\ \sum_{i=1}^k \dot{C}_i(t)x_i^{(k-1)} & = f(t), \end{cases}$$

który można zapisać w postaci macierzowej

$$W\vec{C} = \vec{f},$$

gdzie

$$W = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \dots & \dot{x}_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(k-1)} & x_2^{(k-1)} & \dots & x_k^{(k-1)} \end{pmatrix}, \quad \vec{C}(t) = \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \\ \vdots \\ C_k(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

Stąd

$$\vec{C}(t) = W^{-1}\vec{f}(t)$$

oraz

$$\vec{C}(t) = \int_{t_0}^t W^{-1}\vec{f}(s)ds, \quad C_i(t) = \int_{t_0}^t \frac{W_{ni}(s)f(s)}{W(s)}ds, \quad i = 1, \dots, k.$$

## 8.8. Równanie liniowe niejednorodne rzędu $k$ o stałych współczynnikach. Metoda współczynników nieoznaczonych.

Założmy, że prawa strona równania (11) jest wielomianem wykładniczym

$$f(t) = \sum_{i=1}^N P_i(t)e^{a_i t}, \quad \text{gdzie } P_i, i = 1, \dots, N \text{ są wielomianami}$$

lub wielomianem trygonometryczno-wykładniczym

$$f(t) = \sum_{i=1}^N e^{a_i t} (P_i(t) \cos b_i t + Q_i(t) \sin b_i t), \quad \text{gdzie } P_i, Q_i \text{ są wielomianami.}$$

Wówczas rozwiązanie szczególne można poszukiwać stosując metodę współczynników nieoznaczonych. Korzystamy przy tym z następującego Lematu

**Lemat 1.** *Jeśli  $f(t) = \sum_{i=1}^N f_i(t)$ , to rozwiązanie szczególne równania  $Lu = f$ , gdzie  $L$  jest operatorem liniowym, jest sumą rozwiązań szczególnych równań  $Lu = f_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ .*

Zauważmy również, że wielomian wykładniczy jest szczególnym przypadkiem wielomianu wykładniczo-trygonometrycznego. Zatem wystarczy rozważyć sytuację, gdy

$$f(t) = e^{at}(P(t) \cos bt + Q(t) \sin bt),$$

gdzie  $a, b \in \mathbb{R}$  oraz  $P$  i  $Q$  są wielomianami stopnia  $\leq m$ .

1. Jeśli  $a + bi$  nie jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego, to rozwiązania szczególnego szukamy w postaci

$$x_{sz} = e^{at}(R(t) \cos bt + S(t) \sin bt),$$

gdzie  $R$  i  $S$  są wielomianami stopnia  $m$ . Wstawiając  $x_{sz}$  do (11), a następnie porównując współczynniki przy wyrazach

$$t^i e^{at} \cos bt, \quad t^i e^{at} \sin bt, \quad i = 0, \dots, m$$

dostajemy układ  $2m + 2$  równań na współczynniki wielomianów  $R$  i  $S$ .

**Uwaga.** Jeśli  $b = 0$ , to postać wielomianu  $S$  jest nieistotna. W tym przypadku mamy układ  $m + 1$  równań na współczynniki wielomianu  $R$ .

2. Jeśli  $a + bi$  jest pierwiastkiem  $l$ -krotnym,  $l \geq 1$ , wielomianu charakterystycznego, to rozwiązania szczególnego szukamy w postaci

$$x_{sz} = t^l e^{at}(R(t) \cos bt + S(t) \sin bt),$$

gdzie  $R$  i  $S$  są wielomianami stopnia  $m$  o współczynnikach nieoznaczonych. Wstawiając  $x_{sz}$  do (11), a następnie porównując współczynniki przy wyrazach

$$t^i e^{at} \cos bt, \quad t^i e^{at} \sin bt, \quad i = 0, \dots, m$$

dostajemy układ  $2m + 2$  ( $m + 1$  równań, gdy  $b = 0$ ) równań na współczynniki wielomianów  $R$  i  $S$ .

**Przykład.** Niech

$$\ddot{x} + x = \cos t.$$

Wówczas wielomianem charakterystycznym jest  $\lambda^2 + 1$ , jego pierwiastkami są  $\pm i$ . Rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego jest  $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t$ . Rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego szukamy w postaci  $x_{sz} = t(r \cos t + s \sin t)$ .

Zatem  $\ddot{x}_{sz} = 2(-r \cos t + s \sin t) + t(-r \cos t - s \sin t)$ .

Wstawiając do równania  $\ddot{x}_{sz} + x_{sz} = -2r \sin t + 2s \cos t = \cos t$

dostajemy układ równań  $-2r = 0, 2s = 1$ . Stąd  $r = 0, s = 1/2$ . Czyli  $x_{sz} = \frac{1}{2} t \sin t$ .

## 8.9. Ciąg Fibonacciego.

Ciąg Fibonacciego jest zdefiniowany wzorem rekurencyjnym

$$f_{n+1} = f_{n-1} + f_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

przy czym  $f_0 = f_1 = 1$ . W celu wyprowadzenia wzoru na  $n$ -ty wyraz ciągu zauważmy, że wzór rekurencyjny można zapisać w postaci macierzowej

$$\begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Oznaczmy

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Wówczas} \quad \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Aby policzyć  $A^n$  sprowadzamy macierz  $A$  do postaci kanonicznej. W tym celu najpierw znajdujemy jej wielomian charakterystyczny

$$\det(A - \lambda \text{Id}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1.$$

Jego pierwiastkami są liczby  $\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ,  $\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . Następnie szukamy wektorów własnych macierzy  $A$  tzn. wektorów  $v_i \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  takich, że  $(A - \lambda_i \text{Id})v_i = 0$ ,  $i = 1, 2$ . Jeśli  $v_i = (v_{i,1}, v_{i,2})^{\text{tr}}$ , to  $-\lambda_i v_{i,1} + v_{i,2} = 0$ ,  $i = 1, 2$ . Zatem  $v_i = (1, \lambda_i)^{\text{tr}}$ ,  $i = 1, 2$ . Wówczas w bazie własnej złożonej z wektorów  $v_1, v_2$  macierz  $A$  jest macierzą kanoniczną,

tzn. jeśli  $B = (v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ , to

$$\begin{aligned} B^{-1} \circ A \circ B &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & -1 \\ -\lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 + \lambda_1 & 1 + \lambda_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 - 1 & \lambda_2^2 - \lambda_2 - 1 \\ -\lambda_1^2 - \lambda_1 - 1 & -\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

gdyż  $\lambda_i^2 = \lambda_i + 1$ ,  $i = 1, 2$ . Zatem

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \lambda_1^n \lambda_2 & -\lambda_1^n \\ -\lambda_1 \lambda_2^n & \lambda_2^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_1^n \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2^n & -\lambda_1^n + \lambda_2^n \\ \lambda_1^{n+1} \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2^{n+1} & -\lambda_1^{n+1} + \lambda_2^{n+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Stąd} \quad f_n &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_1^n \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2^n - \lambda_1^n + \lambda_2^n) \\ &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_1^n (\lambda_2 - 1) + \lambda_2^n (1 - \lambda_1)) = \frac{1}{\sqrt{5}} (\lambda_2^{n+1} - \lambda_1^{n+1}). \end{aligned}$$

## 9. Równania autonomiczne.

Równaniem autonomicznym nazywamy układ równań postaci

$$(1) \quad \dot{x} = v(x),$$

gdzie  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$  jest gładkim polem wektorowym określonym na obszarze  $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ . Zauważmy, że prawa strona (1) nie zależy od czasu. Punkt  $x_0$  nazywa się punktem osobliwym pola wektorowego  $v$  jeśli  $v(x_0) = 0$ . Wówczas  $x(t) = x_0$  jest rozwiązaniem szczególnym (1) nie zależnym od czasu. Rozwiązanie takie nazywamy rozwiązaniem stacjonarnym.

Twierdzenie o prostowaniu dla układu autonomicznego brzmi następująco.

**Twierdzenie 1.** (O prostowaniu.) *Jeśli  $x_0$  jest punktem nieosobliwym pola wektorowego  $v$  na  $\Omega$  klasy  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , to istnieje otoczenie  $V$  punktu  $x_0$ , obszar  $W \subset \mathbb{R}^k$  oraz dyfeomorfizm  $f : V \rightarrow W$  klasy  $C^r$  takie, że  $f_*v = e_1$  gdzie  $e_1$  jest wersorem pierwszej współrzędnej w  $\mathbb{R}^k$ .*

(Przypomnijmy, że  $(f_*v)(y) = Df(f^{-1}(y)) \cdot v(f^{-1}(y))$ .)

*Innymi słowy w otoczeniu punktu nieosobliwego równanie (1) jest równoważne równaniu*

$$(2) \quad \dot{y} = e_1.$$

**Przykład.** W otoczeniu zera nie da się wyprostować pola  $v(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ .

**Wniosek 1.** *Dla dowolnego  $x_0 \in \Omega$  istnieje rozwiązanie równania autonomicznego (1) spełniające warunek  $x(t_0) = x_0$ .*

**Dowód.** Jeśli  $x_0$  jest punktem osobliwym pola  $v$ , to  $x(t) = x_0$  jest rozwiązaniem. W przeciwnym przypadku  $x_0$  jest punktem nieosobliwym pola  $v$  i na mocy twierdzenia o prostowaniu równanie (1) jest równoważne równaniu (2). Rozwiązaniem równania (2) spełniającym warunek  $y(t_0) = y^0 := f(x_0)$  ( $f$  jest dyfeomorfizmem prostującym) jest funkcja  $y(t) = (t - t_0 + y_1^0, y_2^0, \dots, y_k^0)$ . Zatem rozwiązaniem (1) spełniającym  $x(t_0) = x_0$  jest  $x(t) = f^{-1}(y(t))$ .  $\diamond$

**Wniosek 2.** (Twierdzenie o lokalnej jednoznaczności.) *Jeśli  $\varphi_1 : I_1 \rightarrow \Omega$ ,  $\varphi_2 : I_2 \rightarrow \Omega$  są dwoma rozwiązaniami (1) z warunkiem  $x(t_0) = x_0$ , to  $\varphi_1 \equiv \varphi_2$  na części wspólnej przedziałów  $I_1 \cap I_2$ .*

**Dowód.** Jeśli  $v(x_0) = 0$ , to  $\varphi_1 \equiv x_0$  i  $\varphi_2 \equiv x_0$ . Jeśli  $v(x_0) \neq 0$ , to w małym otoczeniu punktu  $x_0$  równanie (1) jest równoważne równaniu (2), dla którego wniosek jest oczywisty.  $\diamond$

**Definicja.** *Lokalnym strumieniem fazowym lub potokiem* określonym przez pole wektorowe  $v$  w otoczeniu punktu  $x_0$  nazywamy trójkę  $(I, V, g)$ , gdzie  $I = \{t \in \mathbb{R} : |t| < \varepsilon\}$ ,  $V$  jest otoczeniem punktu  $x_0$ ,  $g$  odwzorowaniem  $g : I \times V \rightarrow \Omega$  spełniającym warunki:

- 1°. Dla każdego  $t \in I$  odwzorowanie  $g^t : V \rightarrow \Omega$ ,  $g^t(x) := g(t, x)$  jest dyfeomorfizmem;
- 2°. Dla każdego  $x \in V$  odwzorowanie  $\varphi : I \rightarrow \Omega$ ,  $\varphi(t) := g^t(x)$  jest rozwiązaniem (1);
- 3°. Odwzorowania  $g^t$  mają własność grupową tzn.  $g^{t+s}(x) = g^t(g^s(x))$  dla  $x \in V$  oraz  $t, s \in I$  takich, że  $t + s \in I$ .

**Twierdzenie 2.** *W otoczeniu punktu nieosobliwego  $x_0 \in \Omega$  pole wektorowe  $v$  określa lokalny strumień fazowy.*

**Dowód.** Niech  $f$  będzie dyfeomorfizmem prostującym otoczenia  $V$  punktu  $x_0$  na  $W$ ,  $f(x_0) =: y^0$ ,  $\dot{y} = e_1$ . Weźmy  $\varepsilon > 0$  takie, że kostka

$$\{y \in \mathbb{R}^k : |y_i - y_i^0| < 2\varepsilon \text{ dla } i = 1, \dots, k\} \subset W.$$

Położmy

$$W_0 = \{y \in \mathbb{R}^k : |y_i - y_i^0| < \varepsilon \text{ dla } i = 1, \dots, k\}, \quad I = \{t \in \mathbb{R} : |t| < \varepsilon\}.$$

Wówczas odwzorowanie

$$h(t, y) = y + te_1$$

określone na  $I \times W_0$  spełnia warunki lokalnego strumienia fazowego dla pola  $e_1$ . Istotnie

- 1°.  $h^t(y) : W_0 \rightarrow W$ ,  $h^t(y) = h(t, y) = y + te_1$  jest dyfeomorfizmem;
- 2°. Dla  $y \in W_0$  odwzorowanie  $\varphi(t) = h^t(y) = y + te_1$  spełnia (2) i  $\varphi(0) = y$ ;
- 3°. Dla  $y \in W_0$ ,  $t, s \in I$  takich, że  $t + s \in I$  zachodzi  $h^{t+s}(y) = y + (t+s)e_1 = h^t(h^s(y))$ .

Niech  $V = f^{-1}(W_0)$ ,  $g^t = f^{-1} \circ h^t \circ f$ . Wówczas trójka  $(I, V, g)$  jest lokalnym strumieniem fazowym dla pola  $v$ .  $\diamond$

**Twierdzenie 3.** Niech  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$  będzie rozwiązaniem równania autonomicznego (1) oraz niech  $h^s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h^s(t) = t + s$  będzie przesunięciem. Wówczas dla dowolnego  $s \in \mathbb{R}$  odwzorowanie  $\varphi \circ h^s$  jest rozwiązaniem (1).

**Dowód.** Liczymy

$$\begin{aligned} \frac{d(\varphi \circ h^s)(t)}{dt} \Big|_{t=t_0} &= \frac{d\varphi(t+s)}{dt} \Big|_{t=t_0} = \frac{d\varphi(t)}{dt} \Big|_{t=t_0+s} \\ &\stackrel{(1)}{=} v(\varphi(t_0+s)) = v \circ h^s(t) \Big|_{t=t_0}. \quad \diamond \end{aligned}$$

**Wniosek.** Przez każdy punkt przestrzeni fazowej równania autonomicznego (1) przechodzi dokładnie jedna maksymalna krzywa fazowa.

**Dowód.** Załóżmy dodatkowo, że rozwiązania (1) można przedłużyć na  $I = \mathbb{R}$ . Niech  $\varphi_i : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ ,  $i = 1, 2$ , będą rozwiązaniami (1) oraz  $\varphi_1(t_1) = \varphi_2(t_2) = x$  dla pewnych  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \Omega$ . Połóżmy  $\varphi_3 = \varphi_1 \circ h^{t_1-t_2}$ . Wówczas  $\varphi_3$  jest rozwiązaniem (1) oraz

$$\varphi_3(t_2) = \varphi_1 \circ h^{t_1-t_2}(t_2) = \varphi_1(t_1) = x = \varphi_2(t_2).$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozwiązań dla każdego  $t \in \mathbb{R}$  zachodzi

$$\varphi_2(t) = \varphi_3(t) = \varphi_1 \circ h^{t_1-t_2}(t) = \varphi_1(t_1 - t_2 + t).$$

Wobec faktu, że odwzorowanie  $h^s$  jest wzajemnie jednoznaczne wnioskujemy, że odwzorowania  $\varphi_2$  i  $\varphi_2 \circ h^s$  mają jednakowe obrazy. Zatem  $\varphi_2(\mathbb{R}) = \varphi_1(\mathbb{R})$ .

Przypadek gdy rozwiązania (1) nie można przedłużyć na  $\mathbb{R}$  pozostawiamy jako ćwiczenie.  $\diamond$

**Uwaga.** Krzywe fazowe układu nieautonomicznego mogą się przecinać. Dlatego rysujemy wówczas krzywe całkowe.

## 10. Układ zachowawczy z jednym stopniem swobody.

**Definicja.** *Układem zachowawczym z jednym stopniem swobody nazywamy układ opisany równaniem Newtona*

$$(1) \quad \ddot{x} = F(x),$$

gdzie  $F$  jest funkcją określoną na przedziale  $J \subset \mathbb{R}$ . Równanie (1) jest równoważne układowi równań

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = F(x_1), \end{cases} \quad (x_1, x_2) \in J \times \mathbb{R}.$$

W mechanice przyjęto następującą terminologię:

$J$  – przestrzeń konfiguracji;

$x_1 = x$  – położenie;

$x_2 = \dot{x}$  – pęd lub prędkość;

$\ddot{x}$  – przyspieszenie;

$F(x)$  – pole sił.

Wprowadzamy także pojęcia energii:

$T(\dot{x}) = \frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{x_2^2}{2}$  – energia kinetyczna;

$U(x) = -\int_{x_0}^x F(y)dy$  – energia potencjalna;

$E(x, \dot{x}) = T(\dot{x}) + U(x)$  – całkowita energia.

**Przykład.** Dla równania wahadła  $\ddot{x} = -\sin x$  mamy

$$F(x) = -\sin x, \quad U(x) = U(x_1) = -\cos x_1,$$

$$E(x, \dot{x}) = E(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{2} - \cos x_1.$$

Dla zlinearyzowanego równania wahadła  $\ddot{x} = -x$  mamy

$$U(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2, \quad E(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_1^2}{2}.$$

Równanie Newtona pomimo, że w ogólności jest równaniem nieliniowym daje się rozwiązać, gdyż znana jest jego jedna całka pierwsza.

**Twierdzenie 1.** *Energia całkowita  $E(x_1, x_2)$  jest całką pierwszą układu (2).*

**Dowód.** Trzeba wykazać, że funkcja  $E(t) = E(x_1(t), x_2(t))$  jest stała na trajektoriach układu (2). Istotnie tak jest, gdyż

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{(x_2(t))^2}{2} + U(x_1(t)) \right] \\ &= x_2(t) \cdot \dot{x}_2(t) + U'(x_1(t)) \cdot \dot{x}_1(t) \\ &\stackrel{(2)}{=} x_2(t) \cdot F(x_1(t)) - F(x_1(t)) \cdot x_2(t) = 0. \quad \diamond \end{aligned}$$



**Przykład.** Dla równania wahadła  $\ddot{x} = -\sin x$  z warunkami początkowymi  $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$  mamy

$$\frac{\dot{x}^2}{2} - \cos x = E(0) = \frac{v_0^2}{2} - \cos x_0.$$

Stąd dostajemy równanie rzędu 1 o zmiennych rozdzielających się

$$\dot{x} = \pm \sqrt{2E(0) + 2 \cos x}.$$

**Twierdzenie 2.** *W otoczeniu każdego punktu z wyjątkiem położenia równowagi (to jest  $F(x_1) = 0, x_2 = 0$ ) poziomice energii układu (2) są krzywymi gładkimi.*

**Dowód.** Ustalmy punkt  $(x_1^0, x_2^0) \in J \times \mathbb{R}$  nie będący położeniem równowagi układu (2). Niech  $\{(x_1, x_2) : \frac{x_2^2}{2} + U(x_1) = E\}$  będzie poziomica energii przechodzącą przez  $(x_1^0, x_2^0)$ . Wówczas

$$\left. \frac{\partial E(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right|_{\substack{x_1=x_1^0 \\ x_2=x_2^0}} = \left. \frac{dU(x_1)}{dx_1} \right|_{x_1=x_1^0} = -F(x_1^0), \quad \left. \frac{\partial E(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right|_{\substack{x_1=x_1^0 \\ x_2=x_2^0}} = x_2^0.$$

Jeśli  $F(x_1^0) \neq 0$ , to na podstawie twierdzenia o funkcji uwikłanej w otoczeniu punktu  $x_2^0$  poziomica energii  $E$  jest wykresem funkcji różniczkowalnej  $x_1 = x_1(x_2)$ . Analogicznie jeśli  $x_2^0 \neq 0$ , to otoczeniu punktu  $x_1^0$  poziomica energii  $E$  jest wykresem funkcji różniczkowalnej  $x_2 = x_2(x_1)$ .  $\diamond$

Przed przystąpieniem do szkicowania poziomicy energii warto zapamiętać kilka uwag.

1. Ponieważ energia kinetyczna jest nieujemna, więc  $U(x_1) \leq E$ .
2. Prędkość wzrasta, gdy energia potencjalna maleje i odwrotnie, gdyż  $|x_2| = \sqrt{2(E - U(x_1))}$ .
3. Poziomice energii są symetryczne względem osi  $x_1$ .

**Przykład.** Niech  $U(x_1) = \frac{k}{2}x_1^2, k \neq 0$ . Wówczas poziomice energii są krzywymi stopnia drugiego  $\{kx_1^2 + x_2^2 = 2E\}$ .

$k > 0$  – poziomice są elipsami.       $k < 0$  – poziomice są hiperbolami.

Okazuje się, że powyższy przykład jest ogólny w tym sensie, że w otoczeniu tzw. niezwyrodniałego punktu krytycznego potencjału  $U(x)$  można dokonać zmiany zmiennej  $x$  na  $y$  tak, aby  $U(y) = ky^2$ .

**Definicja.** Niech  $U$  będzie funkcja klasy  $C^2$  w otoczeniu zera. Zero nazywamy *punktem krytycznym* funkcji  $U$  jeśli  $U'(0) = 0$ . Zero jest punktem krytycznym *niezwyrodniałym* jeśli  $U''(0) \neq 0$ .

**Lemat** (Hadamarda.) *Jeśli  $f$  jest funkcją zdefiniowaną w otoczeniu zera, klasy  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , oraz  $f(0) = 0$ , to istnieje funkcja  $g$  klasy  $C^{r-1}$  taka, że  $g(0) = f'(0)$  oraz  $f(x) = xg(x)$  dla  $x$  z otoczenia zera.*

**Dowód.** Ponieważ zachodzi

$$f(x) = \int_0^x f'(\tau) d\tau \stackrel{\tau=tx, d\tau=xdt}{=} x \int_0^1 f'(tx) dt,$$

więc funkcja  $g(x) = \int_0^1 f'(tx) dt$  spełnia tezę lematu.  $\diamond$

**Lemat** (Morse'a.) *Jeśli zero jest niezwyrodniałym punktem krytycznym funkcji  $U$  klasy  $C^2$  takiej, że  $U(0) = 0$ , to tak można dobrać współrzędną  $y$ , aby  $U(y) = ky^2$ , gdzie  $k = \text{sgn}(U''(0))$ .*

**Dowód.** Stosując dwukrotnie lemat Hadamarda wnioskujemy, że  $U(x) = x^2 h(x)$  dla pewnej funkcji ciągłej  $h$ , przy czym  $h(x) > 0$  w otoczeniu zera jeśli  $U''(0) > 0$  oraz  $h(x) < 0$  w otoczeniu zera jeśli  $U''(0) < 0$ . Połóżmy

$$y = \text{sgn}(U''(0)) \cdot x \cdot \sqrt{|h(x)|}.$$

Wówczas

$$U(x) = x^2 h(x) = \text{sgn}(U''(0)) \cdot (x \sqrt{|h(x)|})^2 = \text{sgn}(U''(0)) \cdot y^2.$$

Zauważmy, że funkcja  $\sqrt{|h(x)|}$  jest ciągła i dodatnia w otoczeniu zera. Zatem odwzorowanie  $x \rightarrow y = \text{sgn}(U''(0)) \cdot x \cdot \sqrt{|h(x)|}$  jest ciągle i ściśle monotoniczne w otoczeniu zera. Wynika stąd, że jest ono homeomorfizmem w otoczeniu zera.  $\diamond$

**Uwaga.** Ponieważ równanie Newtona sprowadza się do równania rzędu 1 można wykazać, że niekrytyczne poziomice energii składają się z co najwyżej przeliczalnej ilości krzywych homeomorficznych z okręgami lub prostymi. Krytyczne poziomice energii mogą zawierać punkty, otwarte łuki lub krzywe zamknięte.

**Przykład.**

Dla równania wahadła  $\ddot{x} = -\sin x$  mamy  $U(x) = -\cos x$ ,  $U'(x) = \sin x$ .

Punktami krytycznymi potencjału są punkty  $X_k = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Poziomicami energii są zbiory  $\{x_2^2 = 2E + 2\cos x_1\}$ .

Jeśli  $E = -1$ , to poziomicie energii redukują się do punktów  $A_k = (2k\pi, 0)$  dla  $k \in \mathbb{Z}$ .

Jeśli  $-1 < E < 1$ , to poziomicie energii są krzywymi homeomorficznymi z elipsą.

Jeśli  $E = 1$ , to poziomiami energii są punkty  $B_k = ((2k + 1)\pi, 0)$  dla  $k \in \mathbb{Z}$  oraz łuki łączące dwa sąsiednie punkty  $B_k$ .

Jeśli  $E > 1$ , to poziomicie energii są krzywymi nieograniczonymi.

Krzywe fazowe równania wahadła – poziomicie energii.

# 11. Stabilność położeń równowagi.

Rozpatrzmy równanie autonomiczne

$$(1) \quad \dot{x} = v(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^k.$$

Założmy, że pole wektorowe  $v$  posiada punkt osobliwy  $x_0$  tzn.  $v(x_0) = 0$ . Wówczas  $\varphi(t) = x_0$  jest rozwiązaniem *stacjonarnym* problemu Cauchy'ego

$$\dot{x} = v(x), \quad x(0) = x_0.$$

Dlatego punkty osobliwe pola wektorowego nazywane są także *położeniami równowagi*.

Interesuje nas zachowanie się rozwiązań dla zaburzonych danych początkowych. Oczywiście z twierdzenia o ciągłej zależności rozwiązania od danych początkowych wynika, że dla małych  $t$  rozwiązanie problemu zaburzonego jest bliskie rozwiązaniu stacjonarnemu. Dlatego teraz będziemy badać co się dzieje z rozwiązaniem problemu zaburzonego dla czasu  $t$  dążącego do  $\infty$ .

**Definicja.** Położenie równowagi  $x_0$  pola wektorowego  $v$  nazywamy *stabilnym* (w sensie Lapunowa) jeśli dla dowolnego  $\varepsilon > 0$  istnieje  $\delta > 0$  taka, że dla  $\|y - x_0\| < \delta$  rozwiązanie  $x = \varphi(t)$  problemu

$$(1') \quad \begin{cases} \dot{x} &= v(x), \\ x(0) &= y. \end{cases}$$

istnieje dla  $0 < t < \infty$  oraz  $\|\varphi(t) - x_0\| \leq \varepsilon$  dla każdego  $0 < t < \infty$ .

Zauważmy, że stabilność położenia równowagi faktycznie oznacza globalną ciągłość rozwiązania względem danych początkowych.

Rozwiązanie startujące z danych  $\|y - x_0\| < \delta$  pozostaje w rurze o promieniu  $\varepsilon$ .

**Definicja.** Położenie równowagi  $x_0$  pola wektorowego  $v$  nazywamy *asymptotycznie stabilnym* jeśli jest ono stabilne oraz rozwiązanie  $x = \varphi(t)$  problemu (1') spełnia  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = x_0$  o ile  $\|y - x_0\| < \delta$  dla małych  $\delta > 0$ .

Przypomnijmy jeszcze definicję pochodnej funkcji w kierunku pola wektorowego.

**Definicja.** Niech  $v$  będzie polem wektorowym na  $\Omega \subset \mathbb{R}^k$  oraz niech  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją klasy  $C^1$ . Pochodną funkcji  $f$  względem pola  $v$  nazywamy funkcję  $L_v f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  określoną wzorem

$$L_v f(x) = \sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) v_i(x), \quad x \in \Omega,$$

gdzie  $v_i, i = 1, \dots, k$  są składowymi pola  $v$ .

W celu uproszczenia wzorów będziemy w dalszym ciągu zakładać, że  $x_0 = 0$  tzn., że zero jest położeniem równowagi pola wektorowego  $v$ .

**Definicja.** Funkcją Lapunowa pola wektorowego  $v$  w otoczeniu punktu stacjonarnego  $x_0 = 0$  nazywamy dodatnio określoną formę kwadratową  $r^2$  na  $\mathbb{R}^k$  taką, że dla pewnego  $\gamma > 0$  zachodzi

$$(2) \quad L_v r^2(x) \leq -\gamma r^2(x) \quad \text{dla } \|x\| \text{ dostatecznie małych.}$$

Innymi słowy poziomice funkcji  $r^2$  są współśrodkowymi elipsoidami takimi, że w każdym punkcie  $x$  z sąsiedztwa zera wektor  $v(x)$  jest skierowany do ich wnętrza.

**Twierdzenie 1.** *Jeśli istnieje funkcja Lapunowa  $r^2$  dla zerowego położenia równowagi pola wektorowego  $v$  klasy  $C^1$ , to zero jest asymptotycznie stabilnym położeniem równowagi.*

**Dowód.** Niech  $x = \varphi(t)$  będzie rozwiązaniem problemu (1'), gdzie  $y \neq 0, \|y\|$  jest dostatecznie małe. Załóżmy, że rozwiązanie to jest określone na  $\overline{\mathbb{R}}_+$ . Określmy funkcję  $\rho : \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  wzorem

$$\rho(t) = \ln r^2(\varphi(t)).$$

Z twierdzenia Picarda-Lindelöfa o jednoznaczności rozwiązania problemu Cauchy'ego wynika, że  $r^2(\varphi(t)) \neq 0$  dla  $t \geq 0$ . Zatem funkcja  $\rho$  jest dobrze określona i różniczkowalna. Policzmy jej pochodną. Korzystając z (2) dostajemy

$$\frac{d\rho}{dt}(t) = \frac{1}{r^2(\varphi(t))} \cdot \sum_{i=1}^k \frac{\partial r^2(\varphi_i(t))}{\partial \varphi_i(t)} \cdot \frac{d\varphi_i(t)}{dt} = \frac{L_v r^2(\varphi(t))}{r^2(\varphi(t))} \leq -\gamma.$$

Zatem

$$\rho(t) \leq \rho(0) - \gamma t, \quad \text{dla } t > 0.$$

Ponieważ  $\rho(0) = \ln r^2(y)$  wnioskujemy stąd, że

$$r^2(\varphi(t)) \leq \exp\{\varphi(0) - \gamma t\} = r^2(y)e^{-\gamma t} \rightarrow 0 \quad \text{gdy } t \rightarrow \infty.$$

Pozostaje jeszcze wykazać, że rozwiązanie  $\varphi$  problemu (1') jest określone na całej półprostej  $\overline{\mathbb{R}}_+$ . W tym celu dobierzmy  $\delta > 0$  takie, że dla  $\|x\| < \delta$  spełniona jest nierówność (2) oraz dla  $T > 0$  zdefiniujmy zbiór („walec”)

$$F_T = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k : -1 \leq t \leq T, r^2(x) \leq \delta\}.$$

Jeśli  $r^2(y) < \delta$ , to zgodnie z twierdzeniem o przedłużaniu rozwiązań, rozwiązanie problemu (1') można przedłużyć do przodu do granicy „walca”  $F_T$ . Ponieważ jednak pochodna funkcji  $r^2(\varphi(t))$  jest ujemna dopóki  $(t, \varphi(t)) \in F_T$ , więc rozwiązanie nie może wejść na powierzchnię boczną „walca”  $F_T$ . Zatem daje się ono przedłużyć do czasu  $t = T$ . Ponieważ  $T$  było dowolne wnioskujemy, że rozwiązanie daje się przedłużyć nieograniczenie do przodu.  $\diamond$

**Uwaga.** Zauważmy, że w Twierdzeniu 1 wykazaliśmy, że szybkość zbieżności rozwiązania problemu zaburzonego do rozwiązania stacjonarnego jest jednostajna względem warunków początkowych i wykładnicza w czasie.

Analizując dowód Twierdzenia 1 dostajemy również

**Wniosek 1.** Jeśli dodatnio określona forma kwadratowa  $r^2$  spełnia nierówność  $L_v r^2(x) \leq 0$  dla  $x$  z otoczenia zera, to zero jest stabilnym położeniem równowagi.

Zajmiemy się teraz konstrukcją funkcji Lapunowa. Zaczniemy od przypadku liniowego.

**Twierdzenie 2.** Niech  $A : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  będzie operatorem liniowym, którego wszystkie wartości własne mają ujemne części rzeczywiste. Wówczas istnieje funkcja Lapunowa dla pola wektorowego  $v(x) = Ax$ .

**Dowód.** Dowód przeprowadzimy przy dodatkowym założeniu, gdy operator  $A$  posiada bazę własną.

Potraktujmy  $A$  jako przekształcenie liniowe  $A : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^k$ . Niech  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$  będą wartościami własnymi, a  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{C}^k$  odpowiadającymi im wektorami własnymi, przy czym jeśli  $\lambda_i = \overline{\lambda_j}$ , to  $v_i = \overline{v_j}$ . Układ wektorów  $v_1, \dots, v_k$  stanowi bazę przestrzeni  $\mathbb{C}^k$ . Zatem dla dowolnego  $z \in \mathbb{C}^k$  istnieją  $z_i \in \mathbb{C}$ ,  $i = 1, \dots, k$  takie, że

$$z = \sum_{i=1}^k z_i v_i.$$

Położmy

$$r^2(z, \bar{z}) = \sum_{i=1}^k z_i \bar{z}_i \in \mathbb{R}, \quad r^2(x) = r^2(x, x) \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}^k.$$

Wówczas  $r^2$  jest dodatnio określoną formą kwadratową, gdyż  $z_i \bar{z}_i \geq 0$  dla  $i = 1, \dots, k$  oraz istnieje  $i \in \{1, \dots, k\}$  takie, że  $z_i \bar{z}_i > 0$ . Policzmy pochodną funkcji  $r^2(z, \bar{z})$  w kierunku zespolonego pola wektorowego  $Az$ .

$$\begin{aligned} L_{Az} r^2(z, \bar{z}) &= L_{Az} \sum_{i=1}^k z_i \bar{z}_i = \sum_{j=1}^k \frac{\partial}{\partial z_j} \left( \sum_{i=1}^k z_i \bar{z}_i \right) (Az)_j \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{\partial}{\partial z_i} (z_i \bar{z}_i) (Az)_i = \sum_{i=1}^k \bar{z}_i (Az)_i + \sum_{i=1}^k z_i \overline{(Az)_i} \\ &= 2\operatorname{Re} \sum_{i=1}^k (Az)_i \bar{z}_i \stackrel{Az_i = \lambda_i z}{=} 2 \sum_{i=1}^k \operatorname{Re} \lambda_i z_i \bar{z}_i \\ &= 2 \sum_{i=1}^k \operatorname{Re} \lambda_i |z_i|^2. \end{aligned}$$

Niech  $\gamma = -\max_{i=1, \dots, k} \operatorname{Re} \lambda_i$ . Z założenia mamy  $\gamma > 0$ . Zatem dla  $x \in \mathbb{R}^k$  dostajemy

$$L_{Ax} r^2(x) = 2 \sum_{i=1}^k \operatorname{Re} \lambda_i |z_i|^2 \leq -2\gamma \sum_{i=1}^k |z_i|^2 = -2\gamma r^2(x),$$

co kończy dowód twierdzenia przy założeniu istnienia bazy własnej operatora  $A$ .

W ogólnym przypadku wykazuje się istnienie tzw.  $\varepsilon$ -bazy, tzn. bazy, w której macierz operatora  $A$  jest sumą macierzy diagonalnej  $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  i macierzy trójkątnej górnej o wyrazach  $< \varepsilon$ . Jako funkcję Lapunowa bierze się sumę kwadratów modułów współrzędnych w  $\varepsilon$ -bazie dla dostatecznie małego  $\varepsilon$ .  $\diamond$

Z Twierdzeń 1 i 2 wynika

**Wniosek 2.** Jeśli wszystkie wartości własne macierzy  $A$  mają ujemne części rzeczywiste, to zerowe położenie równowagi układu

$$\dot{x} = Ax$$

jest asymptotycznie stabilne.

**Uwaga.** Jeśli wszystkie części rzeczywiste wartości własnych macierzy  $A$  są niedodatnie i macierz  $A$  nie ma wielokrotnych wartości własnych o zerowych częściach rzeczywistych, to zero jest stabilnym położeniem równowagi układu  $\dot{x} = Ax$ .

Podamy jeszcze twierdzenie o stabilności zerowego położenia równowagi ogólnego układu autonomicznego (1).

**Twierdzenie 3** (Lapunowa.) *Niech*

$$(3) \quad v(x) = Ax + v_2(x),$$

gdzie  $A$  jest operatorem liniowym, natomiast  $v_2$  jest polem wektorowym spełniającym  $\|v_2(x)\| \leq C\|x\|^2$  dla pewnej stałej  $C < \infty$  i  $\|x\|$  dostatecznie małych.

Jeśli wszystkie wartości własne macierzy  $A$  mają ujemne części rzeczywiste, to zero jest asymptotycznie stabilnym położeniem równowagi układu (1).

**Dowód.** Na podstawie Twierdzenia 1 wystarczy wykazać, że istnieje funkcja Lapunowa dla pola  $v$ . W dowodzie Twierdzenia 2 skonstruowaliśmy funkcję Lapunowa  $r^2$  spełniającą przy pewnym  $\gamma > 0$  oszacowanie

$$L_{Ax}r^2(x) \leq -2\gamma r^2(x).$$

Ponieważ

$$L_v r^2(x) = L_{Ax}r^2(x) + L_{v_2}r^2(x),$$

więc wystarczy wykazać, że

$$|L_{v_2}r^2(x)| \leq \gamma r^2(x) \quad \text{dla } \|x\| \text{ dostatecznie małych.}$$

Mamy

$$L_{v_2}r^2(x) = \sum_{i=1}^k \frac{\partial r^2(x)}{x_i} \cdot v_{2,i}(x).$$

Z założenia wiemy, że  $|v_{2,i}(x)| \leq C\|x\|^2$  dla  $\|x\|$  dostatecznie małych. Ponadto,

$$\left| \frac{\partial r^2(x)}{x_i} \right| \leq C\|x\| \quad \text{dla } i = 1, \dots, k, \quad x \in \mathbb{R}^k.$$

Zatem

$$|L_{v_2}r^2(x)| \leq C^2 k \|x\|^3 \quad \text{dla } \|x\| \text{ dostatecznie małych.}$$

Ostatecznie dla  $\|x\|$  dostatecznie małych znajdziemy  $c > 0$  takie, że

$$|L_{v_2}r^2(x)| \leq C^2 k \|x\|^3 \leq c \|x\|^2 \leq \gamma r^2(x). \quad \diamond$$

**Uwaga.** Jeśli macierz  $A$  posiada wartość własną o dodatniej części rzeczywistej, to zero jest niestabilnym położeniem równowagi układu (3).



## 12. Równania różniczkowe cząstkowe rzędu 1

Ogólne równanie różniczkowe cząstkowe rzędu 1 można zapisać w postaci

$$F(x, u, \nabla u) = 0,$$

gdzie  $x \in \Omega$ ,  $\Omega$  jest otwartym podzbiorem  $\mathbb{R}^n$ ,  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\nabla u = (\partial_{x_1} u, \dots, \partial_{x_n} u)$  jest gradientem funkcji  $u$ , natomiast  $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją gładką (różniczkowalną w sposób ciągły). Równania takie pojawiają się m.in. w mechanice klasycznej (przekształcenia kanoniczne), mechanice ośrodków ciągłych (prawa zachowania) oraz w optyce (rozchodzenie się fal).

### 12.1. Równanie transportu

Jednym z najprostszych równań różniczkowych cząstkowych jest równanie transportu

$$(1) \quad u_t + b \cdot \nabla u = 0,$$

gdzie  $u = u(t, x)$  jest funkcją określoną na  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$ ,  $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n})$  jest gradientem funkcji  $u$ , a  $\cdot$  oznacza iloczyn skalarny. W celu rozwiązania równania (1) zauważmy, że równanie to oznacza, że pochodna kierunkowa funkcji  $u$  w kierunku wektora  $v = (1, b) \in \mathbb{R}^{n+1}$  znika. Zatem ustalając dowolny punkt  $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$  i kładąc dla  $s \in \mathbb{R}$

$$z(s) = u(t + s, x + sb)$$

dostajemy

$$\frac{dz(s)}{ds} = u_t(t + s, x + sb) + \nabla_x u(t + s, x + sb) \cdot b = 0.$$

Zatem  $z(s)$  jest funkcją stałą. Ustalając wartość rozwiązania na każdej prostej równoległej do wektora  $(1, b)$  dostajemy rozwiązanie równania (1).

### 12.2. Zagadnienie początkowe

Dla ustalenia uwagi założymy, że w chwili  $t = 0$  zadana jest wartość funkcji  $u(0, x)$ . Wówczas zagadnienie początkowe

$$(2) \quad \begin{cases} u_t + b \cdot \nabla u = 0 & \text{dla } t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = g(x) & \text{dla } x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

ma rozwiązanie

$$(3) \quad u(t, x) = g(x - tb) \quad \text{dla } t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n.$$

Zatem zachodzi

**Twierdzenie 1.** *Jeśli funkcja  $g$  jest klasy  $C^1$ , to rozwiązanie (3) równania (2) jest rozwiązaniem klasycznym tzn. klasy  $C^1$  oraz jest ono jednoznaczne.*

**Uwaga.** Jeśli  $g$  nie jest klasy  $C^1$ , to (2) nie posiada rozwiązania klasycznego. Tym nie mniej (3) definiuje funkcję, która jest jedyną kandydatką na rozwiązanie uogólnione (2).

### 12.3. Zagadnienie niejednorodne

W celu rozwiązania zagadnienia niejednorodnego

$$(5) \quad \begin{cases} u_t + b \cdot \nabla u = f & \text{dla } t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = g(x) & \text{dla } x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

położmy  $z(s) = u(t + s, x + bs)$ . Wówczas

$$\frac{dz}{ds}(s) = u_t(t + s, x + bs) + \nabla u(t + s, x + bs) \cdot b = f(t + s, x + bs).$$

Zatem

$$\begin{aligned} u(t, x) - g(x - tb) &= z(0) - z(-t) = \int_{-t}^0 \frac{dz}{ds}(s) ds \\ &= \int_{-t}^0 f(t + s, x + sb) ds \\ &= \int_0^t f(s, x + (s - t)b) ds. \end{aligned}$$

Czyli

$$u(t, x) = g(x - tb) + \int_0^t f(s, x + (s - t)b) ds$$

jest rozwiązaniem zagadnienia (5).  $\diamond$

### 12.4. Metoda charakterystyk

Zauważmy, że w celu rozwiązania problemów (2) i (5) przekształciliśmy równania cząstkowe w równania zwyczajne. Jest to typowa procedura

rozwiązywania równań cząstkowych rzędu pierwszego nazywana *metodą charakterystyk*.

Spróbujmy mianowicie rozwiązać zagadnienie brzegowe (Cauchy'ego)

$$(6) \quad F(x, u, \nabla u) = 0 \quad \text{w obszarze } \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

$$(7) \quad u = g \quad \text{na powierzchni } \Gamma \subset \partial\Omega.$$

Zakładamy, że funkcje  $F$  i  $g$  oraz powierzchnia  $\Gamma$  są dostatecznie gładkie.

Nasz plan postępowania jest następujący: będziemy się starali połączyć punkt  $x \in \Omega$  z pewnym punktem  $x_0 \in \Gamma$  pewną krzywą  $\gamma$  w taki sposób, aby można było policzyć wartości rozwiązania  $u$  wzdłuż tej krzywej.

Założmy więc, że  $\gamma = \{x(s), s \in I \subset \mathbb{R}\}$  jest parametryzacją naszej krzywej. Połóżmy

$$(8) \quad z(s) = u(x(s)), \quad p(s) = \nabla u(x(s)).$$

Chcemy dobrać krzywą  $x(s)$  tak, aby można było policzyć  $z(s)$  i  $p(s)$ . W tym celu policzmy  $\dot{p}(s) := \frac{dp(s)}{ds}$ :

$$(9) \quad \dot{p}^i(s) = \sum_{j=1}^n u_{ij}(x(s)) \cdot \dot{x}^j(s) \quad \text{dla } i = 1, \dots, n \quad \text{gdzie } u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Z drugiej strony różniczkując (6) względem  $x_i$  dostajemy

$$(10) \quad \frac{\partial F}{\partial x_i}(x, u, \nabla u) + \frac{\partial F}{\partial z}(x, u, \nabla u)u_{x_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_j}(x, u, \nabla u)u_{ij} = 0 \quad \text{dla } i = 1, \dots, n.$$

Założmy, że

$$(11) \quad \dot{x}^j(s) = \frac{\partial F}{\partial p_j}(x(s), z(s), p(s)) \quad \text{dla } j = 1, \dots, n.$$

Wówczas wobec (10) równanie (9) przyjmuje postać

$$(12) \quad \dot{p}^i(s) = -\frac{\partial F}{\partial x_i}(x(s), z(s), p(s)) - \frac{\partial F}{\partial z}(x(s), z(s), p(s))p^i(s) \quad \text{dla } i = 1, \dots, n.$$

Ostatecznie różniczkując obie strony (8) po  $s$  i uwzględniając (11) dostajemy

$$(13) \quad \dot{z}(s) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j}(x(s))\dot{x}^j(s) = \sum_{j=1}^n p^j(s) \frac{\partial F}{\partial p_j}(x(s), z(s), p(s)).$$

Równania (11), (12) i (13) możemy zapisać w postaci wektorowej

$$\begin{aligned} (*1) \quad \dot{p}(s) &= -\nabla_x F(x(s), z(s), p(s)) - \nabla_z F(x(s), z(s), p(s)) \cdot p(s), \\ (*2) \quad \dot{z}(s) &= \nabla_p F(x(s), z(s), p(s)) \cdot p(s), \\ (*3) \quad \dot{x}(s) &= \nabla_p F(x(s), z(s), p(s)). \end{aligned}$$

Otrzymany układ  $(2n + 1)$  równań różniczkowych zwyczajnych nazywa się *układem charakterystyk* równania (6); jego krzywe fazowe  $(x(\cdot), z(\cdot), p(\cdot)) \subset \mathbb{R}^{2n+1}$  *charakterystykami*, natomiast krzywą  $x(\cdot) \subset \mathbb{R}^n$  - *zrzuconą charakterystyką*. Wykazaliśmy

**Twierdzenie 3.** *Jeśli  $u \in C^2(\Omega)$  jest rozwiązaniem równania (9) oraz  $x(\cdot)$  spełnia (\*3), to  $p(\cdot)$  spełnia (\*1), a  $z(\cdot)$  spełnia (\*2).*

Aby skorzystać w praktyce z tego twierdzenia należy jeszcze uwzględnić warunki brzegowe (7).

**A. F liniowa.** Załóżmy, że równanie (6) jest liniowe tzn.

$$(14) \quad F(x, u, \nabla u) = b(x) \cdot \nabla u(x) + c(x)u(x) = 0,$$

gdzie  $b$  jest funkcją o wartościach w  $\mathbb{R}^n$ , a  $c$  jest funkcją skalarną. Wówczas

$$F(x, z, p) = b(x) \cdot p + c(x)z, \quad \nabla_p F = b(x)$$

i równania (\*) przyjmują postać

$$\begin{aligned} \dot{x}(s) &= b(x(s)), \\ \dot{z}(s) &= b(x(s)) \cdot p(s) = -c(x(s))z(s), \\ \dot{p}(s) &= -\nabla_x b \cdot p - \nabla_x c \cdot z - c(x)p. \end{aligned}$$

(Faktycznie ostatnie z tych równań nie jest potrzebne.)

**Przykład.** Rozpatrzmy układ

$$\begin{cases} -x_2 u_{x_1} + x_1 u_{x_2} = u & \text{w } \Omega = \{x_1 > 0, x_2 > 0\}, \\ u(x_1, x_2) = g(x_1) & \text{na } \Gamma = \{x_1 > 0, x_2 = 0\}. \end{cases}$$

Wówczas  $b(x) = (-x_2, x_1)$ ,  $c(x) = -1$ , a równania charakterystyk mają postać

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1, \\ \dot{z} &= z, \end{aligned}$$

lub w postaci symetrycznej

$$\frac{dx_1}{-x_2} = \frac{dx_2}{x_1} = \frac{dz}{z} = ds.$$

Zatem charakterystykami są łuki okręgów  $x_1^2 + x_2^2 = C$ . Rozwiązując ten układ równań z uwzględnieniem warunku brzegowego dostajemy

$$x_1(s) = x_0 \cos s, \quad x_2(s) = x_0 \sin s, \quad z(s) = g(x_0)e^s, \quad x_0 > 0, 0 \leq s < \pi/2.$$

Ostatecznie rugując parametr  $s$  dostajemy rozwiązanie

$$u(x_1, x_2) = g\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) \exp\left\{\arctg \frac{x_2}{x_1}\right\}, \quad x_1 > 0, x_2 > 0. \quad \diamond$$

**B. F quasiliniowa.** Załóżmy, że równanie (6) jest quasiliniowe tzn.

$$(15) \quad F(x, u, \nabla u) = b(x, u) \cdot \nabla u(x) + c(x, u) = 0,$$

gdzie  $b$  jest funkcją o wartościach w  $\mathbb{R}^n$ , a  $c$  jest funkcją skalarną. Wówczas

$$F(x, z, p) = b(x, z) \cdot p + c(x, z), \quad \nabla_p F = b(x, z)$$

i równania (\*) przyjmują postać

$$(16) \quad \begin{aligned} \dot{x}(s) &= b(x(s), z(s)), \\ \dot{z}(s) &= b(x(s), z(s)) \cdot p(s) = -c(x(s), z(s)), \end{aligned}$$

(pominęliśmy ostatnie równanie). Na ogół równania te nie dają się rozwiązać w sposób jawny, tym nie mniej w wielu przypadkach jest to możliwe.

**Przykład.** Rozpatrzmy układ

$$\begin{cases} u_{x_1} + u_{x_2} = u^2 & \text{w } \Omega = \{x_1 \in \mathbb{R}, x_2 > 0\}, \\ u(x_1, x_2) = g(x_1) & \text{na } \Gamma = \{x_2 = 0\}. \end{cases}$$

Wówczas równania charakterystyk mają postać

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 1, \\ \dot{x}_2 &= 1, \\ \dot{z} &= z^2, \end{aligned}$$

lub w postaci symetrycznej

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2}{1} = \frac{dz}{z^2} = ds.$$

Charakterystykami są prostymi  $x_1 - x_2 = C$ . Rozwiązując ten układ równań z uwzględnieniem warunku brzegowego dostajemy

$$x_1(s) = x_0 + s, \quad x_2(s) = s, \quad z(s) = \frac{z_0}{1 - sz_0} = \frac{g(x_0)}{1 - sg(x_0)}.$$

Zatem

$$u(x_1, x_2) = z(s) = \frac{g(x_0)}{1 - sg(x_0)} = \frac{g(x_1 - x_2)}{1 - x_2g(x_1 - x_2)}. \quad \diamond$$

Powróćmy jeszcze do równania quasiliniowego (15). Jak już wiemy równania charakterystyk przybierają wówczas postać układu (16). Układ ten można zapisać w postaci symetrycznej

$$\frac{dx_1}{b_1} = \frac{dx_2}{b_2} = \dots = \frac{dx_n}{b_n} = \frac{dz}{-c}.$$

Jak wiadomo z ogólnej teorii równań różniczkowych zwyczajnych jeśli wektor  $(b(x), c(x))$  nigdzie nie znika, to układ ten posiada  $n$  liniowo niezależnych całek pierwszych

$$\varphi_1(x, z) = C_1, \dots, \varphi_n(x, z) = C_n.$$

Rozwiązanie ogólne (6) przedstawia się w postaci uwikłanej przez

$$\Phi(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = 0,$$

gdzie  $\Phi$  jest dowolną funkcją klasy  $C^1$ .

**Przykład.** Dla równania Eulera

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = \lambda u$$

równaniem charakterystyk w postaci symetrycznej jest

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = \frac{du}{\lambda u}.$$

Mamy 3 całki pierwsze

$$\varphi_1 = \frac{y}{x}, \quad \varphi_2 = \frac{z}{x}, \quad \varphi_3 = \frac{u}{x^\lambda}.$$

Rozwiązanie ogólne w postaci uwikłanej wyraża się przez

$$\Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \frac{u}{x^\lambda}\right) = 0.$$

Rozwikłując względem trzeciej zmiennej dostajemy

$$u(x, y, z) = x^\lambda f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$$

gdzie  $f$  jest dowolną funkcją klasy  $C^1$ . Zatem  $u$  jest funkcją jednorodną stopnia  $\lambda$  tzn.

$$u(tx, ty, tz) = t^\lambda u(x, y, z) \quad \text{dla } t > 0.$$

Charakterystykami są półproste wychodzące z zera.  $\diamond$

**C. F całkowiec nieliniowa.** Wówczas trzeba całkować pełny układ, co jest możliwe w sposób jawny tylko w wyjątkowych przypadkach.

## 12.5. Zagadnienie Cauchy'ego.

Dla zadanej powierzchni  $\Gamma \subset \partial\Omega$  i funkcji  $g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  znaleźć rozwiązanie równania (6), którego wartość na  $\Gamma$  pokrywa się z  $g$  tzn.

$$(7) \quad u|_\Gamma = g.$$

Zakładamy, że  $\Gamma$  i  $g$  są klasy  $C^1$ .

Geometrycznie zagadnienie to oznacza znalezienie  $n$ -wymiarowej powierzchni całkowej równania (6) przechodzącej przez  $(n-1)$ -wymiarową powierzchnię  $\{(x, g(x)) : x \in \Gamma\}$ . Powierzchnia całkowca jest utkana z charakterystyk przechodzących przez punkty  $(x, g(x)) : x \in \Gamma$ . Okazuje się, że jeśli  $\Gamma$  nie zawiera kierunków charakterystycznych, to rozwiązanie problemu Cauchy'ego istnieje lokalnie w pobliżu  $\Gamma$ . Dokładne sformułowanie odpowiedniego twierdzenia i jego dowód można znaleźć w monografii L. Evansa, §3.2. Tutaj ograniczymy się do podania algorytmu rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego dla równania quasi-liniowego w dwóch wymiarach.

**Problem.** Niech będzie dane równanie quasi-liniowe

$$P(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + Q(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = R(x, y, u),$$

gdzie  $P, Q$  i  $R$  są funkcjami klasy  $C^1(\Omega \times \mathbb{R})$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Znaleźć rozwiązanie spełniające warunek początkowy

$$u|_\Gamma = g,$$

gdzie  $\Gamma$  jest krzywą  $\Gamma = \{(a(s), b(s)), s \in (s_1, s_2) \subset \mathbb{R}\}$ , a  $g$  jest zadaną funkcją.

**Algorytm rozwiązania.**

1. Piszemy równania charakterystyk

$$\frac{dx}{P(x, y, u)} = \frac{dy}{Q(x, y, u)} = \frac{du}{R(x, y, u)}.$$

2. Znajdujemy całki pierwsze  $\varphi_1(x, y, u), \varphi_2(x, y, u)$ , a następnie z układu

$$\begin{cases} \varphi_1(a(s), b(s), g(a(s), b(s))) = C_1, \\ \varphi_2(a(s), b(s), g(a(s), b(s))) = C_2 \end{cases}$$

rugując parametr  $s$  wyznaczamy zależność

$$\Phi(C_1, C_2) = 0.$$

3. Rozwiązanie  $u(x, y)$  jest dane w postaci uwikłanej

$$\Phi(\varphi_1(x, y, u), \varphi_2(x, y, u)) = 0.$$

**Przykład.** Wyznaczyć powierzchnię całkową równania

$$2y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 2xye^z$$

przechodzącą przez krzywą  $\{x = s, y = 0, z = \ln(1 + s^2)\}$ .

1. Równania charakterystyk mają postać

$$\frac{dx}{2y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{2xye^z}.$$

2. Całkami pierwszymi są  $x^2 - 2y^2 = C_1, y^2 + e^{-z} = C_2$ . Z układu

$$\begin{cases} x = s, \\ y = 0, \\ z = \ln(1 + s^2), \\ x^2 - 2y^2 = C_1, \\ y^2 + e^{-z} = C_2 \end{cases}$$

rugując parametr  $s$  wyznaczamy zależność

$$C_2 = \frac{1}{1 + C_1}.$$

3. Rozwiązanie  $z = z(x, y)$  spełnia równanie uwikłane

$$y^2 + e^{-z} = \frac{1}{1 + x^2 - 2y^2},$$

z którego wyliczamy

$$z(x, y) = -\ln\left(\frac{1}{1 + x^2 - 2y^2} - y^2\right). \quad \diamond$$



**Przykład.** Znaleźć rozwiązanie równania

$$(1+x^2)\frac{\partial z}{\partial y} = z$$

spełniające warunek  $z(x, 0) = 1 + x^2$ .

1. Równania charakterystyk mają postać

$$\frac{dx}{0} = \frac{dy}{1+x^2} = \frac{dz}{z}.$$

2. Całkami pierwszymi są  $x = C_1$ ,  $ze^{-y/(1+x^2)} = C_2$ . Z układu

$$\left\{ \begin{array}{l} x = s, \\ y = 0, \\ z = 1 + s^2, \\ x = C_1, \\ ze^{-y/(1+x^2)} = C_2 \end{array} \right.$$

rugując parametr  $s$  wyznaczamy zależność

$$C_2 = 1 + C_1^2.$$

3. Rozwiązanie  $z = z(x, y)$  spełnia równanie uwikłane

$$ze^{-y/(1+x^2)} = 1 + x^2,$$

z którego wyliczamy

$$z(x, y) = (1 + x^2)e^{y/(1+x^2)}. \quad \diamond$$