Typowe zadania egzaminacyjne z równań różniczkowych

1. Dla danej rodziny krzywych wyznaczyć rodzinę krzywych ortogonalnych, naszkicować te rodziny krzywych.

(A) $y = Cx^2,\ C \in \mathbb{R}$.

(B) $y = \ln|x| + C, x \neq 0,$ gdzie $C \in \mathbb{R}$ uzupełniona prostą $x = 0$.

(C) $y = Ce^x,$ gdzie $C \in \mathbb{R}$.

(D) $xy = C,$ gdzie $C \in \mathbb{R}$.

(E) $x^2 - y^2 = C,$ gdzie $C \in \mathbb{R}$.

(F) $x^3 - 3xy^2 = C,$ gdzie $C \in \mathbb{R}$.

(G) $e^x \cos y = C,$ gdzie $C \in \mathbb{R}$.

$(H)^*$ $x + y = Ce^{y-x},$ gdzie $C \in \mathbb{R}$.

2. Znaleźć krzywe, dla których odcinek OA odcinany przez styczną na osi OY jest równy kwadratowi rzędnej (odciętej) punktu styczności.

3. Znaleźć rozwiązania ogólne równań

(A) $$\frac{dy}{dx} = xy + xe^{x^2};$$

(B) $$y' + 2y = y^2 e^x;$$

(C) $$xy' = \lambda y, \quad \lambda \in \mathbb{R};$$

(D) $$xy' - y = y^2, \quad \text{policzyć granicę} \quad \lim_{x\to\infty} y(x);$$

(E) $$y' - y = xy^2, \quad \text{policzyć granicę} \quad \lim_{x\to\infty} x \cdot y(x);$$

4. Znaleźć rozwiązania ogólne równań

(A) $$y' + 2xy = 4xy^2;$$

(B) $$y' + xy = 2xy^3.$$

5. Znaleźć rozwiązania ogólne równań oraz rozwiązania spełniające podany warunek

(A) $$xy' + y = 2x, \quad y(1) = 0;$$

(B) $$y' + 2xy = x, \quad y(0) = 1;$$

(C) $$2xy + (x^2 + 2y) \cdot y' = 0, \quad y(0) = 2;$$

(D) $$y' = 4xy^2 - 2y, \quad y(0) = 1;$$

$(E)^*$ $$y' = y^3 - 8x^3 + 2, \quad y(0) = 0;$$

(F) $$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + xy + 2y^2}{x^2 + 2xy}, \quad y(1) = 2.$$

6. Znaleźć rozwiązanie problemów

$$(A)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t-2}{x+1}, \\ x(0) = \sqrt{3} - 1; \end{cases}$$

$$(B)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t-3}{x+2}, \\ x(0) = -1; \end{cases}$$

$$(C)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2+6x+1}{2y-4}, \\ y(0) = 2 + \sqrt{3}; \end{cases}$$

$$(D)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y^2+2xy+x^2}{2xy+2x^2}, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

oraz określić maksymalny przedział istnienia rozwiązania (dziedzinę rozwiązania).

7. Wyznaczyć drugie przybliżenia Picarda rozwiązań problemów

$$(A)\qquad \begin{cases} \dot{x} = x^2 + tx + t^2, \\ x(0) = 1; \end{cases}$$

$$(B)\qquad \begin{cases} \dot{x} &= t + x^2, \\ x(0) &= 1. \end{cases}$$

8. Stosując metodę łamanych Eulera z krokiem $h = 0,2$ oszacować wartość $y(1)$ rozwiązań problemów

$$(A)\qquad \begin{cases} y' &= y^2 + 2x - x^4, \\ y(0) &= 0; \end{cases}$$

$$(B)\qquad \begin{cases} y' &= y^3 - 8x^3 + 2, \\ y(0) &= 0; \end{cases}$$

$$(C)\qquad \begin{cases} y' &= 4xy^2 - 2y, \\ y(0) &= 1; \end{cases}$$

$$(D)\qquad \begin{cases} y' &= -2xy^2, \\ y(0) &= 1. \end{cases}$$

i porównać otrzymany wynik z rozwiązaniem dokładnym.

9. Znaleźć rozwiązanie problemu

$$\begin{cases} y' &= e^y - e^{x^2} + 2x, \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

w postaci szeregu potęgowego $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

10. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

(A) $$\ddot{x} - 2\dot{x} - 3x = e^{-t} + \cos 3t;$$

(B) $$\ddot{x} + \dot{x} - 2x = 2e^{t} + \sin 2t;$$

(C) $$y''' - 2y'' = x + 2e^{2x};$$

(D) $$y''' - 4y'' + 5y' - 2y = \sin x + e^{2x};$$

(E^*) $$y'' + y' = \frac{x}{(1+x)^2}.$$

11. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania znając rozwiązanie szczególne y_1

(A) $$y'' + y' + e^{-2x}y = 0, \quad y_1 = \sin(e^{-x}); \quad (y_2 = \cos(e^{-x}))$$

(B) $$x^2y'' - (x^2+x)y' + (1+x)y = 0, \quad y_1 = x; \quad (y_2 = x\int_1^x e^y/y dy)$$

(C) $$(x-1)y'' - xy' + y = 0, \quad y_1 = x; \quad (y_2 = e^x)$$

12. Znaleźć rozwiązanie ogólne niejednorodnego równania Eulera

(A) $$x^2y'' - 3xy' + 3y = x^2;$$

(B) $$x^2y'' - xy' + y = x;$$

(C) $$x^2y'' - 3xy' + 5y = x^2.$$

13. Dany jest układ równań

$$(A)\ \begin{cases} \dot{x} &= 4x + 2y, \\ \dot{y} &= x + 5y; \end{cases} \qquad (B)\ \begin{cases} \dot{x} &= x + 4y, \\ \dot{y} &= 4x + 2y; \end{cases}$$

$$(C)\ \begin{cases} \dot{x} &= x + 3y + \sin t, \\ \dot{y} &= 4x - 3y + e^{-t}; \end{cases} \quad (D)\ \begin{cases} \dot{x} &= 4x - 2y + e^{2t}, \\ \dot{y} &= 5x - 3y + t. \end{cases}$$

(a) Wyznaczyć przestrzenie własne układu jednorodnego.
(b) Określić typ położenia równowagi układu jednorodnego.
(c) Znaleźć rozwiązanie ogólne układu niejednorodnego.

14. Znaleźć rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x - 2y + \sin t + \cos t, \\ \dot{y} &= x + y - \cos t, \\ x(0) &= -2, \quad y(0) = 1. \end{cases}$$

15. Znaleźć rozwiązanie ogólne układu równań

$$(A)\ \begin{cases} \dot{x} &= 4x - 13y + z, \\ \dot{y} &= 2x - 7y + 3z, \\ \dot{z} &= 2z; \end{cases} \quad (B)\ \begin{cases} \dot{x} &= x - 3y + 4z, \\ \dot{y} &= 4x - 7y + 8z, \\ \dot{z} &= 6x - 7y + 7z; \end{cases} \quad (C^*)\ \begin{cases} \dot{x} &= 4x - 5y + 2z, \\ \dot{y} &= 5x - 7y + 3z, \\ \dot{z} &= 6x - 9y + 4z. \end{cases}$$

16. Rozwiązać problem początkowy dla równania Newtona

(A) $$\begin{cases} \ddot{x} &= 8x^3 + 24x^2 + 24x + 8, \\ x(0) &= 0, \quad \dot{x}(0) = \sqrt{2}; \quad (\textbf{Wsk.}\ (1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4.) \end{cases}$$

(B) $$\begin{cases} \ddot{x} &= 4x + 6x^2, \\ x(0) &= 1, \quad \dot{x}(0) = 2\sqrt{2}; \quad (\textbf{Wsk.}\ \text{Podstawić } y = \sqrt{1+x}.) \end{cases}$$

(C) $$\begin{cases} \ddot{x} &= (1+x)^{-3}, \\ x(0) &= 0, \quad \dot{x}(0) = 0; \end{cases}$$

$(D)^*$ $$\begin{cases} \ddot{x} &= (1+x)^{-2}, \\ x(0) &= 0, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

17. Znaleźć położenia równowagi układu równań, określić ich typ i zbadać stabilność:

(A) $$\begin{cases} \dot{x} &= x^2 + 4y^2 - 4, \\ \dot{y} &= x - y^2 + 1; \end{cases}$$

(B) $$\begin{cases} \dot{x} &= x^2 - 4y^2 + 4, \\ \dot{y} &= x + |y| - 1; \end{cases}$$

(C) $$\begin{cases} \dot{x} &= x^2 - 3y^2 - 1, \\ \dot{y} &= x - 2; \end{cases}$$

(D) $$\begin{cases} \dot{x} &= x^2 + 4y^2 - 16, \\ \dot{y} &= e^{x+2y-4} - 1. \end{cases}$$

18. Znaleźć funkcję $z = z(x, y)$ spełniającą równanie

(A) $$yz\frac{\partial z}{\partial x} - xz\frac{\partial z}{\partial y} = xy,$$

(B) $$4y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = xz^2,$$

(C) $$yz\frac{\partial z}{\partial x} - 2x^3 z\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy,$$

która odpowiednio na zbiorze
(A) $\{y = \pm x\}$; (B) $\{y = x^2 + 1\}$; (C) $\{y^2 + x^4 - 2x^2 = 0\}$
przyjmuje wartość $z = 1$. Określić dziedzinę funkcji $z(x, y)$.

19. Znaleźć rozwiązanie $z = z(x, y)$ równania

$$2y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = 2xye^z,$$

które znika na prostej $\{x = y\}$ oraz określić jego dziedzinę.

20. Dane jest równanie

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Znaleźć rozwiązanie ogólne, a następnie wydzielić powierzchnię całkową przechodzącą przez krzywą $\{x = 0, z = y^2, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$.