Zadania z Analizy Matematycznej II.

Seria 1

1. Obliczyć całki

(A) $\int_{-1}^{2} x^2 dx$ (z definicji); (B) $\int_0^2 xe^x dx$; (C) $\int_0^e 2xe^{-x^2} dx$.

2. Obliczyć pole obszaru

(A) $\{(x,y) : 0 < x < 3, 0 < y < x^2+1\}$; (B) $\{(x,y) : 6x-x^2 < y < x^2-6x+10\}$.

3. Znaleźć długość krzywej $l = \{y = \sqrt{x},\ \ 0 \le x \le 1\}$.

4. Obliczyć objętość bryły powstałej w wyniku obrotu dookoła osi OX krzywej

(A) $\{y = \sin x, 0 \le x \le \pi\}$; (B) $\{y^2 = 2px, 0 \le x \le 1\}$; (C) $\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$.

5. Obliczyć pole powierzchni powstałej w wyniku obrotu dookoła osi OX krzywej $\{y = x\sqrt{x}, 0 \le x \le 1\}$.

6. Obliczyć całki niewłaściwe

(A) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$; (B) $\int_0^1 \ln x dx$; (C) $\int_0^\infty xe^{-x} dx$; (D) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

7. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \ln^p n}$ w zależności od parametru $p > 0$.

8. Obliczyć sumy szeregów

(A) $\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$; (B) $\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$; (C) $\sum_{n=1}^\infty nx^n$; (D) $\sum_{n=1}^\infty n^2 x^n$.

9. Znaleźć $F'(\alpha)$ jeśli

(A) $$F(\alpha) = \int_{a+1/\alpha}^{b+1/\alpha} \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx;$$

(B) $$F(\alpha) = \int_0^\alpha f(\alpha - x, x - \alpha) dx.$$

10. Korzystając ze wzoru $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ pokazać, że dla $n, m \in \mathbb{Z}$ zachodzi

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} e^{imx} dx = \begin{cases} 0 & \text{gdy} \ \ n \neq m, \\ 2\pi & \text{gdy} \ \ n = m. \end{cases}$$

Zadania z Analizy Matematycznej II.

Seria 2

1. Zbadać istnienie granicy w zerze i granic iterowanych następujących funkcji

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \quad g(x,y) = |x|^y, \quad h(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, \quad k(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}.$$

2. Zbadać istnienie granic iterowanych w zerze następujących funkcji

$$f(x,y) = \frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}, \quad g(x,y) = \frac{x\sin\frac{1}{x}+y}{x+y}, \quad h(x,y) = x\sin\frac{1}{y}.$$

3. Wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\cos^m(2\pi n!x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{dla} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

4. Określić dziedzinę funkcji

$$f(x,y) = \frac{1}{ax^2+bxy+cy^2-1}, \quad g(x,y,z) = \frac{1}{xy-z}, \quad h(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2-z^2}.$$

5. Pokazać, że dla funkcji

$$f(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

nie istnieją granice iterowane w zerze, ale istnieje granica tej funkcji w zerze.

6. Znaleźć granicę funkcji

$$f(x,y) = x^2 e^{-(x^2-y)}$$

wzdłuż promienia $l(t) = (t\cos\alpha, t\sin\alpha)$ przy $t \to \infty$. Czy istnieje $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} f(x,y)$?

7. Zbadać jednostajną ciągłość na $\mathbb{R}^2$ funkcji

$$f(x,y) = ax+by, \quad g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, \quad h(x,y) = (x^2+y^2)^\alpha, \alpha > 0.$$

8. Zbadać jednostajną ciągłość funkcji

$$f(x,y) = \sin\frac{\pi}{1-x^2-y^2}$$

w kole $\{x^2+y^2 < 1\}$.

9. Zbadać ciągłość funkcji

$$f(x,y) = \arcsin\frac{x}{y}$$

w jej dziedzinie.

10. Wykazać, że zbiór punktów nieciągłości funkcji

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

nie jest zbiorem domkniętym.

Zadania z Analizy Matematycznej II.

Seria 3

1. Dla $0 < x < 1$ policzyć całkę
$$\int_0^\infty x^\alpha d\alpha$$

2. Wykazać, że funkcja
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{-\ln x} & \text{dla} \quad 0 < x < 1, \\ 0 & \text{dla} \quad x \leq 0. \end{cases}$$
jest ciągła w zerze lecz nie jest hölderowsko ciągła.

3. Wykazać, że funkcja
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
jest ciągła na $\mathbb{R}^2$ i ma pochodne cząstkowe f'_x i f'_y, które nie są ciągłe w zerze.

4. Policzyć pochodne cząstkowe funkcji
$$f(x,y) = x^y, \quad g(x,y) = \arctan\frac{y}{x}, \quad h(x,y,z) = xy - z\sqrt{x^2+y^2-z^2}.$$

5. Niech $f(t)$ będzie funkcją różniczkowalną jednej zmiennej. Połóżmy $z(x,y) = yf(x^2-y^2)$. Wykazać, że wówczas zachodzi
$$\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

6. Niech $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ będzie macierzą kwadratową, a $\mathrm{Det}A$ jej wyznacznikiem. Policzyć
$$\frac{\partial \mathrm{Det}A}{\partial a_{ij}}.$$

7. Policzyć pochodną kierunkową funkcji
$$f(x,y,z) = e^{z/x}\sin y$$
w punkcie $\mathring{x} = (3,0,-1)$ w kierunku wektora $v = [2,-5,7]$.

8. Wykazać, że pochodna kierunkowa funkcji
$$f(x_1,x_2,...,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ . & . & \cdots & . \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$
w dowolnym punkcie $\mathring{x} \in \mathbb{R}^n$ w kierunku wektora $v = [1,1,...,1]$ jest równa zeru.

Zadania z Analizy Matematycznej II.

Seria 4

1. Zbadać różniczkowalność w zerze funkcji

(A) $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0); \end{cases}$$

(B) $$g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0); \end{cases}$$

(C) $$h(x,y) = \sqrt{x^4+y^4};$$

(D) $$h(x,y) = \sqrt[3]{x^6+y^6}.$$

2. Znaleźć różniczki funkcji

(A) $f(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y}$; (B) $g(x,y,z) = \dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$

dwoma metodami: a) licząc pochodne cząstkowe; b) korzystając z niezmienniczości różniczki.

3 Wykazać, że funkcja f klasy $C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ spełniająca tożsamość Eulera

$$x \cdot \operatorname{grad} f(x) = \lambda f(x) \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

jest jednorodna stopnia λ. **Wsk.** Rozważyć funkcję $F(t) = t^{-\lambda} f(tx)$ i policzyć $F'(1)$.

4. Zbadać, w jakich punktach różniczkowalna jest funkcja f oraz znaleźć df i $\operatorname{grad} f$:

(A) $$f(x) = |x|^\alpha \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha > 0;$$

(B) $$f(x,y) = \sqrt{|xy|} \quad \text{dla} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2;$$

(C) $$f(x,y) = |x-y| \quad \text{dla} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2;$$

(D) $$f(x,y) = \frac{xy}{1+|x|+|y|} \quad \text{dla} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2;$$

(E) $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^6}{x^2+y^4} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

5. Zbadać, czy funkcja $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ jest klasy C^1

(A) $f(x,y) = x \sin \sqrt{x^2+y^2}$; (B) $f(x,y) = x \cos \sqrt{x^2+y^2}$.

6. Znaleźć różniczki funkcji

(A) $f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$; (B) $g(x,y) = (e^{2x} y, x e^{-y}, \sin(xy))$;

(C) $h(x,y,z) = (\sqrt{x^2+y^2+z^2}, xyz)$; (D) $k(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}\right)$.

Zadania z Analizy Matematycznej II.

Seria 5

1. Niech $u(x,y) = x^2 + xy + y^2$ gdzie $x(t) = \sin t$, $y(t) = e^t$. Policzyć $\frac{du}{dt}\big(x(t), y(t)\big)$.

2. Policzyć $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ jeśli

$$\text{(A)} \quad z(x,y) = (x^2+y^2)e^{(x^2+y^2)/xy}; \qquad \text{(B)} \quad z(x,y) = \frac{ax+by}{cx+dy}.$$

3. Niech $\varphi : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^1 oraz $z(x,y) = \varphi(x^2+y^2)$. Wykazać, że

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

4. W jakiej postaci można przewidzieć rozwiązania równania

$$y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

5. Wykazać, że jeśli funkcje $f, g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ są różniczkowalne, to $\text{grad}(fg) = f\text{grad}(g) + g\text{grad}(f)$.

6. Wyznaczyć równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 3xy^2$ w punkcie $(1,2)$.

7. Obliczyć przybliżone wartości wyrażeń oraz błąd względny

(A) $(2,01)^2 + 3 \times (2,98)^2$; (B) $\sqrt{(3,01)^2 + (3,98)^2}$; (C) $0,98 \times (4,01)^{2,02}$.

8. Wyrazić we współrzędnych biegunowych (r,φ), gdzie $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ wyrażenie

$$w = y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y}.$$

9. Niech $\Phi_2 : \mathbb{R}_+ \times (0, 2\pi) \mapsto \mathbb{R}^2$,

$$\Phi_2(r,\varphi) = \big(r\cos\varphi, r\sin\varphi\big).$$

Wyznaczyć macierz różniczki oraz jakobian odwzorowania Φ_2.

10. Niech $\Phi_3 : \mathbb{R}_+ \times (0, 2\pi) \times \big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big) \mapsto \mathbb{R}^3$,

$$\Phi_3(r,\varphi,\psi) = \big(r\cos\varphi\cos\psi, r\sin\varphi\cos\psi, r\sin\psi\big).$$

Wyznaczyć macierz różniczki oraz jakobian odwzorowania Φ_3.

Zadania z Analizy Matematycznej II.

Seria 6

1. Policzyć macierz pochodnych cząstkowych drugiego rzędu (hesjan) funkcji

(A) $f(x,y) = e^x \cos y$;

(B) $g(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{1-xy}$;

(C) $h(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$;

(D) $k(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$;

(E) $l(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$.

2. Zbadać istnienie pochodnej mieszanej $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(0,0)$ funkcji

$$u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

3. Znaleźć drugie różniczki d^2u funkcji

(A) $u(x,y) = \ln \sqrt{x^2+y^2}$;

(B) $u(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{1+xy}$;

(C) $u(x,y) = e^{xy}$;

(D) $u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$;

(E) $u(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$.

4. Wykazać, że jeśli $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna, to $g(t) = f(\cos t, \sin t)$ dla $t \in \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna i znaleźć jej drugą pochodną.

5. Wykazać, że jeśli $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna, to funkcja $g(x,y) = f(ax+by, cx+dy)$ dla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ jest dwukrotnie różniczkowalna i znaleźć jej drugie pochodne cząstkowe.

6. Znaleźć funkcje $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ dwukrotnie różniczkowalna, dla których pochodna mieszana $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$ dla każdego $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

7. Znaleźć funkcje $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ dwukrotnie różniczkowalna, dla których $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ dla każdego $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Zadania z Analizy Matematycznej II.

Seria 7

1. Znaleźć rozwinięcie Taylora funkcji f w punkcie A, gdzie

(A) $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2, \qquad A = (1,2);$
(B) $f(x,y) = e^{ax} \sin by, \qquad A = (0,0);$
(C) $f(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3, \qquad A = (-2,3).$

2. Wykazać, że jeśli brzeg zbioru zwartego $F \subset \mathbb{R}^2$ jest sumą skończonej ilości odcinków, to funkcja $f(x,y) = ax + by + c$ określona na F przyjmuje kresy w końcach tych odcinków. Uogólnić to stwierdzenie dla funkcji trzech zmiennych.

3. Znaleźć kresy funkcji f na zbiorze F, gdzie

(A) $f(x,y) = 2x + 3y, \qquad F = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0, 5x + 2y \leq 10\};$
(B) $f(x,y) = xe^{-xy}, \qquad F = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0\};$
(C) $f(x,y,z) = 2x + 3y - z, \qquad F = \{(x,y,z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\};$
(D) $f(x,y) = (x+y)e^{-x-2y}, \qquad F = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0\};$
(E) $f(x,y,z) = xyz, \qquad F = \{(x,y,z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\};$
(F) $f(x,y) = \sin x + \sin y, \qquad F = \{(x,y) : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}.$

4. Znaleźć lokalne ekstrema oraz punkty siodłowe funkcji f

(A) $f(x,y) = (ax + by)e^{cx+dy};$
(B) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy;$
(C) $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey;$
(D) $f(x,y) = x^2 + x \ln y; \quad y > 0$
(E) $f(x,y) = x^2 + e^{-y^2};$
(F) $f(x,y) = xy + e^{a(x^2+y^2)}.$

5. Dane są punkty $P_i = (x_i, y_i)$ dla $i = 1, ..., n$. Znaleźć prostą $y = ax + b$, dla której wyrażenie $E(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$ osiąga minimum.

6. Znaleźć punkt (a,b), w którym funkcji $E(a,b)$ osiąga absolutne minimum

(A) $E(a,b) = (a + b - 2)^2 + (2a + b - 2)^2 + (3a + b - 4)^2;$
(B) $E(a,b) = (b + 1)^2 + (2a + b)^2 + (a + b - 1)^2 + (a + b + 2)^2.$

7. Wśród trójkątów o danym obwodzie p znaleźć trójkąt o największym polu.

8. Znaleźć wymiary prostopadłościennej skrzyni bez pokrywy o objętości V, której powierzchnia ścian i dna jest najmniejsza.

Zadania z Analizy Matematycznej II.

Seria 8

1. Niech $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie odwzorowaniem

$$T(x_1, x_2) = \big(\tfrac{1}{2}\sin x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + 2, \tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{1}{3}\cos x_2 + \tfrac{5}{3}\big).$$

Wykazać, że T jest kontrakcją w metryce $\rho(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 + y_2|$. Co wynika z tezy twierdzenia Banacha? **Wsk.** Zachodzi nierówność $|\sin\alpha - \sin\beta| \leq |\alpha - \beta|$.

2. Niech $f : (-2\pi, 1) \mapsto \mathbb{R}^2$ będzie określone wzorem

$$f(t) = \begin{cases} (\cos t, \sin t) & \text{dla} \quad -2\pi < t < 0, \\ (1, t) & \text{dla} \quad 0 \leq t < 1. \end{cases}$$

Narysować przeciwdziedzinę f. Wykazać że f jest klasy C^1, jest nieosobliwe i różnowartościowe, lecz f^{-1} nie jest ciągłe.

3. Niech $f(x, y) = (e^{x+y} + e^{x-y}, e^{x+y} - e^{x-y})$ dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Znaleźć obraz $f(\mathbb{R}^2)$ oraz zbadać czy f jest dyffeomorfizmem.

4. Znaleźć przeciwobraz koła $\{(x, y) : x^2 + y^2 - x < 0\}$ przy dyfeomorfiźmie biegunowym.

5. Znaleźć dyfeomorfizm pewnego przedziału otwartego $P \subset \mathbb{R}^2$ na dany obszar $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, gdzie

(A) $\Omega = \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 < 4, \ \ 0 < x < y < 2x\}$;

(B) $\Omega = \{(x, y) : y^2 < x < 2y^2, \ \ 2x^2 < y < 3x^2\}$;

(C) $\Omega = \{(x, y) : 0 < x, \ \ 0 < y < x^2\}$;

(D) $\Omega = \{(x, y) : b^2x^2 + a^2y^2 < a^2b^2\} \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$;

(E) $\Omega = \{(x, y) : a < x < b, \ \ f(x) < y < g(x)\}, \quad f, g \in C^1\big((a, b); \mathbb{R}\big)$.

6. Znaleźć dyfeomorfizm pewnego przedziału otwartego $P \subset \mathbb{R}^3$ na obszar

$$\Omega = \{(x, y, z) : a < x < b, \ \ 0 < y < f(x), \ \ 0 < z < g(x, y)\},$$

gdzie $f \in C^1\big((a, b); \mathbb{R}_+\big)$, g jest funkcją rzeczywistą dodatnią klasy C^1 określoną na zbiorze $\{(x, y) : a < x < b, \ \ 0 < y < f(x)\}$.

7. Znaleźć dyfeomorfizm pewnego przedziału otwartego $P \subset \mathbb{R}^n$ na $\subset \mathbb{R}^n$.

8. Wykazać, że odwzorowanie

$$x \mapsto f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

jest dyfeomorfizmem $\mathbb{R}^n$ na kulę $\{y \in \mathbb{R}^n : |y| < 1\}$.

9. Znaleźć macierz różniczki dyfeomorfizmu odwrotnego względem dyfeomorfizmu sferycznego.

Zadania z Analizy Matematycznej II.

Seria 9

1. Niech $F(x,y) = x^3y^2 + 3x^2y^3 - xy + 2x - y^2 + 1$. Wykazać, że istnieją funkcje rzeczywiste g, h klasy C^1 określone w otoczeniu I zera takie, że $F\big(x, g(x)\big) = 0 = F\big(x, h(x)\big)$ oraz $g(x) < h(x)$ dla $x \in I$. Znaleźć $g'(0), h'(0)$.

2. Niech F będzie funkcją z zadania 1. Wykazać, że istnieje funkcja rzeczywista g klasy C^1 określona w otoczeniu I zera taka, że $F\big(g(y), y\big) = 0$ dla $y \in I$. Znaleźć $g'(0)$.

3. Kiedy można rozwikłać względem y równanie $x^3 - xy^3 = 1$? Policzyć $y'(x)$, $y''(x)$.

4. Naszkicować zbiór $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 = x^2 + y^2\}$.

5. Równanie $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z = 9$ w otoczeniu punktu $(1, -2, 1)$ wyznacza z jako funkcję zmiennych (x, y) klasy C^2. Policzyć jej pochodne cząstkowe rzędu 1 i 2 w punkcie $(1, -2)$

6. Kiedy można rozwikłać względem y i z układ równań

$$\begin{cases} x + y + z & = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 & = 1. \end{cases}$$

Wyznaczyć $\frac{dy}{dx}$ i $\frac{dz}{dx}$.

7. Kiedy można rozwikłać względem u i v układ równań

$$\begin{cases} xu - yv & = 0, \\ yu + xv & = 1. \end{cases}$$

Wyznaczyć $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{dv}{dx}$ i $\frac{dv}{dy}$.

8. Wyznaczyć ekstrema warunkowe funkcji f przy warunku $g = 0$, gdzie

(A) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, $g(x,y,z) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $0 < a < b < c$;

(B) $f(x,y,z) = xyz$, $g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, $g_2(x,y,z) = x + y + z$;

(C) $f(x,y) = 2x^2 + y^2$, $g(x,y) = x^4 - x^2 + y^2 - 5$;

(D) $f(x) = x_1^p + x_2^p + ... + x_n^p$, $g(x) = x_1 + x_2 + ... + x_n = a$, $p = 2, 3, ..., a > 0$.

9. Znaleźć supremum i infimum funkcji f w zbiorze G, gdzie

(A) $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, $G = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 100\}$;

(B) $f(x,y,z) = x + y + z$, $G = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 1\}$;

(C) $f(x,y) = x^2 + y^2 + \dfrac{3}{2}x + 1$, $G = \{(x,y) : 4x^2 + y^2 \leq 1\}$;

(D) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$, $G = \{(x,y) : |x| + |y| \leq 1\}$;

(E) $f(x,y) = x^2(y+1) - 2y$, $G = \{(x,y) : \sqrt{1+x^2} \leq y \leq 2\}$;

(F) $f(x,y,z) = (x+y+z)e^{-(x+2y+3z)}$, $G = \{(x,y,z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

Zadania z Analizy Matematycznej II.

Seria 10

1. Zbadać czy odwzorowanie $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$ jest dyfeomorfizmem i czy jego przeciwdziedzina jest łukiem otwartym

(A) $f(t) = (t^3, t^6)$;

(B) $f(t) = (t, \sqrt[3]{t})$;

(C) $f(t) = (t^2, t^4)$.

2. Niech $f(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi, \varphi)$ dla $\varphi \in \mathbb{R}$. Wykazać, że f jest dyfeomorfizmem. Jak wygląda jego przeciwdziedzina (tzw. *linia śrubowa*). Znaleźć przestrzeń styczną i prostą styczną w punkcie $(1, 0, 0)$.

3. Niech $f(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, \varphi)$ dla $r > 0, \varphi \in \mathbb{R}$. Wykazać, że f jest dyfeomorfizmem. Jak wygląda jego przeciwdziedzina (tzw. *powierzchnia śrubowa*). Znaleźć przestrzeń styczną i płaszczyznę styczną w punkcie $(1, 0, 0)$.

4. Wykazać, że zbiór $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x^2 = 1\} \setminus \{(0, ..., 0, 1)\}$ (sfera bez punktu) jest płatem n-wymiarowym.

5. Niech będzie łukiem otwartym zawartym w półpłaszczyźnie $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y = 0\}$. Wykazać, że zbiór S powstały przez obrót powstały przez obrót zbioru wokół osi Oz jest płatem 2-wymiarowym.

6. Zbadać czy zbiór $S \subset \mathbb{R}^2$ jest rozmaitością (narysować ten zbiór)

(A) $S = \{(x, y) : (x^2 + y^2)^2 = y^2\}$;

(B) $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$;

(C) $S = \{(x, y) : (x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2\}$ (tzw. *lemniscata*).

7. Wykazać, że $S \subset \mathbb{R}^3$ i $H \subset \mathbb{R}^4$ są 2-wymiarowymi rozmaitościami.

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \exp(2x + y + z) + \exp(3x - y) + \ln(1 + x + y) = 2\},$$
$$H = \{(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4 : e^{x+y+u} + e^{x+y+v} + u = 2, e^{x+u} + e^{x+y-u} + u - v = 2\}.$$

Napisać równania płaszczyzn stycznych do S i do H w początku układu O.

8. Wykazać, że torus $\mathbb{T}$ jest 2-wymiarową rozmaitością.

$$\mathbb{T} = \{f(\varphi, \psi) : (\varphi, \psi) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^3, \quad \text{gdzie}$$
$$f(x, y) = \big((R_1 + R_2\cos\varphi)\cos\psi, (R_1 + R_2\cos\varphi)\sin\psi, \mathbb{R}_2\sin\psi\big), \quad 0 < R_2 < R_1.$$

9. Wykazać, że otwarta wstęga Möbiusa M jest 2-wymiarową rozmaitością.

$$M = \{f(t, \varphi) : |t| < R_0, -\pi < \varphi < \pi\} \subset \mathbb{R}^3, \quad \text{gdzie}$$
$$f(t, \varphi) = \big((R + t\cos\varphi/2)\cos\varphi, (R + t\cos\varphi/2)\sin\varphi, t\sin\varphi/2\big), \quad 0 < R_0 < R.$$

Zadania z Analizy Matematycznej II.

Seria 11

1. Niech f będzie funkcją ciągła na $P = [a, b] \times [a, b]$. Pokazać, że

$$\int_a^b \Big(\int_a^x f(x, y)dy \Big) dx = \int_a^b \Big(\int_y^b f(x, y)dx \Big) dy.$$

2. Zbadać całkowalność funkcji f na $[-1, 1]^2$ oraz istnienie całek iterowanych

(A) $\quad f(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$; $\qquad$ (B) $\quad f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

3. Obliczyć całki $\iint_D f(x, y)dxdy$, gdzie

(A) $\quad f(x, y) = (x + y)^{-2}, \qquad D = [3, 4] \times [1, 2]$;

(B) $\quad f(x, y) = xy, \qquad D = \{b^2x^2 + a^2y^2 \le a^2b^2, x \ge 0, y \ge 0\}$;

(C) $\quad f(x, y) = xy^{-1}, \qquad D = \{2 \le x \le 4, 1 \le y \le x^2\}$;

(D) $\quad f(x, y) = x^2y^{-2}, \qquad D = \{0 \le y \le x \le 2, 1 \le xy\}$;

(E) $\quad f(x, y) = (1 - x^2 - y^2)^{-1/2}, \qquad D = \{x^2 + y^2 \le x\}$.

4. Niech $p, q > 0$. Bez liczenia całek pokazać, że

$$\int_0^1 \sqrt[p]{x^q} + \int_0^1 \sqrt[q]{x^p} = 1, \qquad \int_0^1 \sqrt[p]{1 - x^q} = \int_0^1 \sqrt[q]{1 - x^p}.$$

5. Zmienić kolejność całkowania w całkach iterowanych

(A) $\quad \displaystyle\int_0^4 \Big(\int_{3x^2}^{12x} f(x, y)dy \Big) dx$; $\qquad$ (B) $\quad \displaystyle\int_0^4 \Big(\int_{2x}^{3x} f(x, y)dy \Big) dx$;

(C) $\quad \displaystyle\int_1^e \Big(\int_0^{\ln x} f(x, y)dy \Big) dx$; $\qquad$ (D) $\quad \displaystyle\int_1^3 \Big(\int_{9/x}^{10-x} f(x, y)dy \Big) dx$;

(E) $\quad \displaystyle\int_0^1 \Big(\int_{y^2/2}^{\sqrt{3-y^2}} f(x, y)dx \Big) dy$; $\qquad$ (F) $\quad \displaystyle\int_0^1 \Big[\int_0^{1-x} \Big(\int_0^{x+y} f(x, y, z)dz \Big) dy \Big] dx$.

6. Dla jakich $p, q \in \mathbb{R}$ istnieją całki niewłaściwe

(A) $\quad \displaystyle\iint_D (x + y)^{-p} dxdy \quad D = \{x + y \ge 1, 0 < y \le 1\}$;

(B) $\quad \displaystyle\iint_D x^{-p}y^{-q} \quad D = \{xy \ge 1, x \ge 1\}$.

7. Niech $f : [0, \alpha] \mapsto \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą i rosnącą, $f(0) = 0$, $a \in [0, \alpha]$, $b \in [0, f(\alpha)]$. Wykazać nierówność Younga i stwierdzić kiedy w niej zachodzi równość

$$\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy \ge ab.$$

Zadania z Analizy Matematycznej II.

Seria 12

1. Obliczyć całki podwójne

(A) $\displaystyle\iint\limits_{\{x^2+y^2\le R^2\}} \sqrt{x^2+y^2}dxdy;$ (B) $\displaystyle\iint\limits_{\{\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2\}} \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy;$

(C) $\displaystyle\iint\limits_{\{b^2x^2+a^2x^2\le a^2b^2, x\ge 0, y\ge 0\}} xydxdy;$ (D) $\displaystyle\iint\limits_{\{x^2+y^2\le x\}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy.$

2. Obliczyć pole zbiorów ograniczonych krzywymi

(A) $xy = 4, x + y = 5;$

(B) $y^2 = 2px + p^2, y^2 = -2qx + q^2, p > 0, q > 0;$

(C) $xy = a^2, xy = 2a^2, y = x, y = 2x;$

(D) $xy = p, xy = q, y^2 = ax, y^2 = bx, 0 < p < q, 0 < a < b;$

(E) $x^2 + y^2 = R^2, x^2 + y^2 = 4Rx;$

(F) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2), x = 0.$

3. Obliczyć pole części powierzchni półsfery $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ leżącej na zewnątrz dwóch walców $x^2 + y^2 - Rx = 0$ i $x^2 + y^2 + Rx = 0$.

4. Policzyć w zależności od parametrów $z_1, z_2 \in \mathbb{R}, \alpha > 0, 0 < a < b$ całkę

$$\iint\limits_{\Omega} x^{-z_1-1}y^{-z_2-1}dxdy$$

(A) $\Omega = (0,1]^2$; (B) $\Omega = \{0 < x \le 1, 0 < y \le x^\alpha\}$; (C) $\Omega = \{0 < x \le 1, ax \le y \le bx\}$.

5. Wyznaczyć objętość zbioru V

(A) $V = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \le a^3 z\};$

(B) $V = \{(x,y,z) : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le z \le c\};$

(C) $V = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \le R^2, x^2 + y^2 \le Rx\}.$

6. Obliczyć całki potrójne $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz$ w zależności od parametrów, gdzie

(A) $\Omega = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \le 1\},\quad f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{p/2};$

(B) $\Omega = \{(x,y,z) : \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 1\},\quad f(x,y,z) = (x^2 + y^2)^{p/2};$

(C) $\Omega = \{(x,y,z) : \alpha x \le z \le \beta x, ay^2 \le z \le by^2, 0 \le z \le h\},\quad f(x,y,z) = |x|^p;$

(D) $\Omega = \{(x,y,z) : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le \dfrac{z^2}{c^2}, 0 \le z \le h\}, f(x,y,z) = |x|^p z.$

7. Znaleźć środki ciężkości półokręgu l_+, półkola S_+ i półkuli B_+,

$l_+ = \{(x,y) : x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, 0 \le \varphi \le \pi\};\quad S_+ = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le r^2, y \ge 0\};$
$B_+ = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \le r^2, z \ge 0\}.$

Zadania z Analizy Matematycznej II.

Seria 13

1. Zbadać orientację przestrzeni $\mathbb{R}^2$ (odpowiednio $\mathbb{R}^3$) wyznaczoną przez układ wektorów (f_1, f_2) (odpowiednio (f_1, f_2, f_3)), gdzie

(A) $f_1 = [2, 1], f_2 = [-4, 3]$; (B) $f_1 = [-3, 1], f_2 = [3, -3]$;

(C) $f_1 = [2, 1, 0], f_2 = [-2, 3, 1], f_3 = [4, 1, 1]$;

(D) $f_1 = [2, 1, 0], f_2 = [-2, 3, 1], f_3 = [1, 8, 1]$.

2. Policzyć iloczyn wektorowy $u \times v$ wektorów $u, v \in \mathbb{R}^3$, gdzie

(A) $u = [2, 1, 0], v = [-4, 3, 0]$; (B) $u = [-3, 1, 0], v = [3, -3, 0]$;

(C) $u = [2, 1, 0], v = [-2, 3, 1]$; (D) $(u, v) \in T(\{z = x^2 + y^2\})$;

(E) $(u, v) \in T(\{e^{x+2y+z} = 1\})$; (F) $(u, v) \in T(\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\})$.

3. Policzyć całkę zorientowaną

(a) $\displaystyle\int_\gamma xdy - ydx$, (b) $\displaystyle\int_\gamma xdy + ydx$, (c) $\displaystyle\int_\gamma xdx + ydy$,

gdzie γ jest krzywą łączącą punkty $O = (0, 0)$ i $K = (1, 2)$ będącą częścią

(A) prostej $\{y = 2x\}$; (B) paraboli $\{y = 2x^2\}$; (C) paraboli $\{4x = y^2\}$.

4. Policzyć całki zorientowane

(A) $\displaystyle\int_\gamma (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy, \quad \gamma = \{y = 1 - |1 - x|, \ \ 0 \le x \le 2\}$;

(B) $\displaystyle\int_\gamma \frac{(x + y)dx + (y - x)dy}{x^2 + y^2}, \quad \gamma = \{x = r\cos t, y = r\sin t, \ \ 0 \le t \le 2\pi\}$;

(C) $\displaystyle\int_\gamma (2r - y)dx + xdy, \quad \gamma = \{x = r(t - \sin t), y = r(1 - \cos t), \ \ 0 \le t \le 2\pi\}$;

(D) $\displaystyle\int_\gamma (x^2 - z^2)dx + 2yzdy - x^2dz, \quad \gamma = \{x = t, y = t^2, z = t^3, \ \ 0 \le t \le 1\}$;

(E) $\displaystyle\int_\gamma ydx + zdy + xdz, \quad \gamma = \{x = r\cos t, y = r\sin t, z = bt, \ \ 0 \le t \le 2\pi\}$;

(F) $\displaystyle\int_\gamma y^2dx + z^2dy + x^2dz, \quad \gamma = \{x^2 + y^2 + z^2 = r^2, x^2 + y^2 = rx, z \ge 0\}$.

5. Policzyć całki niezorientowane

(A) $\displaystyle\int_\gamma \sqrt{x^2 + y^2}ds, \quad \gamma = \{x^2 + y^2 = rx\}$;

(B) $\displaystyle\int_\gamma y^2ds, \quad \gamma = \{x = r(t - \sin t), y = r(1 - \cos t), \ \ 0 \le t \le 2\pi\}$;

(C) $\displaystyle\int_\gamma (x^2 + y^2 + z^2)ds, \quad \gamma = \{x = r\cos t, y = r\sin t, z = bt, \ \ 0 \le t \le 2\pi\}$.

6. Znaleźć długość krzywej $\gamma = \{x = e^{-t}\cos t, y = e^{-t}\sin t, z = e^{-t}, \ \ 0 \le t < \infty\}$.

Zadania z Analizy Matematycznej II.

Seria 14

1. Wyprowadzić wzór na obliczanie całki $\int_\gamma f(x,y)ds$ w przypadku gdy krzywa γ jest zadana równaniem we współrzędnych biegunowych $\{r = r(\varphi), \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2\}$. Zastosować ten wzór do obliczenia całki

$$\int_\gamma (x^2+y^2)^{-3/2}ds$$

gdzie γ jest łukiem spirali logarytmicznej $r(\varphi) = 1/\varphi$ od $\varphi = \sqrt{3}$ do $\varphi = 2\sqrt{2}$.

2. Znaleźć masę łuku linii łańcuchowej $y = a\cosh x/a$ pomiędzy punktami $x = 0$ i $x = a$ jeśli gęstość krzywej jest odwrotnie proporcjonalne do odciętej punktu.

3. Znaleźć pole pętli liścia Kartezjusza $\{x^3 + y^3 = 3axy\}$. **Wsk.** Położyć $t = y/x$.

4. Obliczyć pracę siły ciężkości $\mathbb{F}$ jeśli $|F| = \frac{k}{r^2}, r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, potrzebną na przesunięcie masy jednostkowej z punktu $A = (x_1, y_1, z_1)$ do punktu $B = (x_2, y_2, z_2)$.

5. Wyrazić całkę po konturze $\Gamma = \partial D$ przez całkę podwójną

$$\oint_\Gamma \sqrt{x^2+y^2}dx + y[xy + \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})]dy.$$

6. Jakie wartości mogą przyjmować całki

$$\text{(A)} \quad \frac{1}{2\pi}\oint_\gamma \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}, \quad \text{(B)} \quad \frac{1}{2\pi}\oint_\gamma \frac{xdx + ydy}{x^2+y^2}, \quad \text{(C)} \quad \frac{1}{2\pi}\oint_\gamma \frac{(x^2-y^2)dx + 2xydy}{(x^2+y^2)^2}$$

jeśli γ jest zamkniętą krzywą płaską nie przechodzącą przez punkt $O = (0,0)$.

7. Sprawdzić wzór Greena dla pola $\mathbb{F} = \big((x+y)^2, -(x^2+y^2)\big)$ oraz konturu $\Gamma = \{x^2+y^2 = 1\}$ z dodatnią orientacją.

8. Sprawdzić czy pole $\mathbb{F} = (P, Q)$ określone na obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ spełnia warunek całkowalności, a następnie znaleźć funkcję $U(x,y)$ (potencjał pola $\mathbb{F}$) taką, że $dU = Pdx + Qdy$, gdzie

(A) $P(x,y) = x^4 + 4xy^3, \quad Q(x,y) = 6x^2y^2 - 5y^4, \quad \Omega = \mathbb{R}^2;$

(B) $P(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^3-3xy^2}, \quad Q(x,y) = \dfrac{-2xy}{x^3-3xy^2}, \quad \Omega = \{x > 0, x^3 - 3xy^2 > 0\};$

(C) $P(x,y) = 1 - \dfrac{y^2}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}, \quad Q(x,y) = \sin\dfrac{y}{x} + \dfrac{y}{x}\cos\dfrac{y}{x}, \quad \Omega = \{x > 0\}.$

9. Wykazać że całka zorientowana nie zależy od drogi całkowania a następnie ją policzyć

(A) $\displaystyle\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} xdx + y^2dy - z^3dz;$ (B) $\displaystyle\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yzdx + xzdy + xydz;$

(C) $\displaystyle\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$ (D) $\displaystyle\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \sin(x+y+z)(dx+dy+dz).$

Zadania z Analizy Matematycznej II.

Seria 15

1. Obliczyć całki powierzchniowe niezorientowane

(A) $\displaystyle\iint_S (x^2+y^2)dS, \qquad S=\{x^2+y^2+z^2=R^2,\ z\geq 0\};$

(B) $\displaystyle\iint_S (1+x+y)^{-2}dS, \qquad S=\text{brzeg}\ \{x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ x+y+z\leq 1\};$

(C) $\displaystyle\iint_S zdS, \qquad S=\{x=u\cos v, y=u\sin v, z=v,\quad 0\leq u\leq a,\ 0\leq v\leq 2\pi\};$

(D) $\displaystyle\iint_S (xy+yz+zx)dS, \qquad S=\{z=k\sqrt{x^2+y^2},\quad x^2+y^2\leq 1\}.$

2. Niech $S=\{x^2+y^2+z^2=1\}$, $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$. Wykazać wzór Poissona

$$\iint_S f(ax+by+cz)dS = 2\pi\int_{-1}^{1} f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})du.$$

3. Obliczyć masę czaszy $\{z=k(x^2+y^2),\quad x^2+y^2\leq 1\}$ o gęstości $\rho(x,y,z)=z$.

4. Z jaką siłą przyciągany jest punkt O o masie jednostkowej przez jednorodną powierzchnię $S=\{x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ z=r,\quad 0<a\leq r\leq b\quad 0\leq\varphi\leq 2\pi\}$.

5. Z jaką siłą przyciągany jest punkt M o masie jednostkowej przez jednorodną powierzchnię sfery $S=\{x^2+y^2+z^2=R^2\}$. Rozważyć przypadki
a) M leży wewnątrz sfery;
b) M leży na zewnątrz sfery;
c) M leży na sferze.

6. Policzyć całki powierzchniowe zorientowane (S ma orientację zewnętrzną)

(A) $\displaystyle\iint_S (y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy,$

gdzie $S=\{x^2+y^2=z^2, 0\leq z\leq h\};$

(B) $\displaystyle\iint_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy,$

gdzie $S=\{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2,\ 0\leq z\leq h\};$

(C) $\displaystyle\iint_S \Big(\frac{dydz}{x}+\frac{dzdx}{y}+\frac{dxdy}{z}\Big),$

gdzie $S=\{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\}.$

Zadania z Analizy Matematycznej II.

Seria 16

1. Przekształcić według wzoru Gaussa-Ostrogradskiego całki, a następnie obliczyć obie strony wzoru w przypadku gdy $S = \{x^2+y^2+z^2 = 1\}$ zorientowana na zewnątrz.

(A) $$\iint\limits_S yzdydz + zxdzdx + xydxdy;$$

(B) $$\iint\limits_S x^k dydz + y^k dzdx + z^k dxdy, \quad k = 1, 2, 3, ...;$$

(C) $$\iint\limits_S \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

2. Obliczyć całki

(A) $$\iint\limits_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$$

gdzie S jest zewnętrzną stroną sześcianu $\{0 \leq \max(x, y, z) \leq a\}$;

(B) $$\iint\limits_S (x-y+z)dydz + (y-z+x)dzdx + (z-x+y)dxdy,$$

gdzie S jest zewnętrzną stroną sześcianu $\{|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y| = 1\}$

3. Znaleźć potok pola $\mathbf{F} = [x^2, y^2, z^2]$ przez dodatnią ćwiartkę sfery $S = \{x^2+y^2+z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

4. Znaleźć potok pola $\mathbf{F} = [y, z, x]$ przez powierzchnię stożka ograniczonego płaszczyznami $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$.

5. Stosując wzór Stokesa policzyć całki wzdłuż krzywej zamkniętej Γ zorientowanej dodatnio

(A) $$\oint\limits_\Gamma ydx + zdy + xdz \quad \text{gdzie } \Gamma = \{x^2+y^2+z^2 = r^2, x+y+z = 0\};$$

(B) $$\oint\limits_\Gamma (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$$

gdzie $\Gamma = \{x = a\sin^2 t, y = 2a \sin t \cos t, z = a\cos^2 t, 0 \leq t \leq \pi\}$.

6. Policzyć całkę

$$\int\limits_\Gamma (x^2-yz)dx + (y^2-xz)dy + (z^2-xy)dz;$$

wzdłuż krzywej $\Gamma = \{x = a\cos\varphi, y = a\sin\varphi, z = \frac{h}{2\pi}\varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$.