AM II.1 2018/2019 (gr. 2 i 3), 25 stycznia 2019 – propozycje zadań

`Całka Lebesgue'a.`

Zadanie 1. Podaj przykład funkcji $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dla której

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \neq \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\ .$$

Zadanie 2. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-2\pi n}^{2\pi n}\left(1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{n!}\right)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\exp(-2x^2)\mathrm{d}x\ .$$

Omówienie zadań domowych.

Zadanie 3. Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywą o równaniu $(x^2+y^2)^{3/2}=y$.

Zadanie 4. Oblicz całkę

$$\int_{\{|x-y|<1\}}\exp(-|x+y|)\mathrm{d}\lambda^2(x,y)\ .$$

Wskazówka: Rachunki będą łatwiejsze jeśli zmienimy zmienne tak aby lepiej pasowały do geometrii danych zadania.

Zadanie 5. Oblicz całkę

$$\int_0^\infty\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\mathrm{d}x\ .$$

Wskazówka: Zapisz wyrażenie pod całkowe jako całkę oznaczoną.

Michał Jóźwikowski, 25 stycznia 2019.

AM II.1 2018/2019 (gr. 2 i 3), 21 stycznia 2019

`Całka Lebesgue'a, zamiana zmiennych w całce.`

W założeniach wielu twierdzeń dotyczących całki pojawia się warunek że rozważana funkcja jest całkowalna. Poniżej kilka narzędzi, które pozwalają na ***sprawdzanie całkowalności*** *danej funkcji mierzalnej $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, gdzie $E \subset \mathbb{R}^n$. Mówiąc nieformalnie w przypadku funkcji mierzalnych nieujemych możemy liczyć całkę znanymi nam metodami (np. jako całkę Riemanna lub korzystając z twierdzenia Fubiniego) nie przejmując się czy funkcja była całkowalna czy nie.*

- *Funkcja f jest całkowalna w sensie Lebesgue'a na E wtedy i tylko wtedy gdy jej moduł $|f|$ jest całkowalny na E w sensie Lebsegue'a.*
- *Jeśli możemy ograniczyć f z góry i z dołu przez inną funkcję całkowalną g to f jest całkowalna. Tzn. jeśli $|f| < g$ i g jest całkowalna to f też jest całkowalna. Wynika to łatwo z twierdzenia Labesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej.*
- *Jeśli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest nieujemna na przedziale $[a, b] \subset \overline{\mathbb{R}}$ (a lub b mogą być nieskończone) i całka Riemanna $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ jest skończona (odpowiednio, nieskończona) to f jest całkowalna (odp., niecałkowalna) w sensie Lebesgue'a na $[a, b]$. Dla funkcji dowolnego znaku nie musi to być prawdą – widzieliśmy przykład funkcji która miała skończoną niewłaściwą całkę Riemanna, ale nie była całkowalna w sensie Lebesgue'a.*
- *Jeśli $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, gdzie $E \subset \mathbb{R}^n$ jest mierzalna i nieujemna oraz $\int_E f\mathrm{d}\lambda^n$ policzona z twierdzenia Fubiniego jest skończona (odp., nieskończona) to f jest całkowalna (odp., niecałkowalna) na E. W przypadku funkcji dowolnego znaku może się zdarzyć, że twierdzenie Fubiniego daje skończoną wartość całki, ale funkcja jest niecałkowalna.*

Zadanie 1. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{(\sin x + \cos x)^n}{1 + (\sin x + \cos x)^{2n}} e^{-2x}\mathrm{d}x$$

Omówienie zadań domowych.

Zadanie 2. Oblicz całkę

$$\int_{\{x^2+y^2\le y\}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}\lambda^2(x,y) \ .$$

Twierdzenie (o zamianie zmiennych w całce). *Niech $\Phi : E \to \Phi(E)$ będzie dyfeomorfizmem klasy C^1 pomiędzy zbiorami otwartymi $E \subset \mathbb{R}^n$ i $\Phi(E) \subset \mathbb{R}^n$. Niech $f : \Phi(E) \to \overline{\mathbb{R}}$ będzie funkcją całkowalną na $\Phi(E)$, wówczas*

$$\int_{\Phi(E)} f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\lambda^n(\boldsymbol{x}) = \int_E f(\Phi(\boldsymbol{y})) \cdot |\det D\Phi(\boldsymbol{y})|\mathrm{d}\lambda^n(\boldsymbol{y}) \ .$$

Powyższe twierdzenie pozwala wyrazić całkę funkcji f zmiennych $\boldsymbol{x}$ w nowych zmiennych $\boldsymbol{y} = \Phi^{-1}(\boldsymbol{x})$. Przy okazji takiej zamiany zmiennych musimy odpowiednio zmienić zbiór po którym całkujemy i dopisać czynnik skalujący $|\det D\Phi|$, który mówi jak zmienia się miara przy dyfeomorfizmie. Jest to uogólnienie znanego wzoru na zamianę zmiennych w całce znanego z pierwszego roku.

Zadanie 3. Oblicz miarę zbioru

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x, 0 < y, \frac{1}{2} < \frac{y}{x} < 2, 1 \le xy \le 2\} \ .$$

Dom 1. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2 \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)} \ .$$

Dom 2. Oblicz miarę zbioru

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x, 0 < y, x + y < 1, 0 < z < x^2 + y^2\} \ .$$

Michał Jóźwikowski, 21 stycznia 2019.

AM II.1 2018/2019 (gr. 2 i 3), 18 stycznia 2019

`Całka Lebesgue'a, twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej i zmajoryzowanej, twierdzenie Fubiniego.`

Omówienie zadań domowych.

Zadanie 1. Wykaż, że dyfeomorfizm $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ przekształca zbiory mierzalne na zbiory mierzalne.

Zadanie 2. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją mierzalną, zaś $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie dyfeomorfizmem. Uzasadnij, że złożenie $f(\Phi) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest funkcją mierzalną.

Konstrukcja całki Lebesgue'a umożliwia przechodzenie do granicy pod znakiem całki o ile umiemy kontrolować ciąg funkcji podcałkowych:

Twierdzenie (Lebesgue'a o zbieżności). *Niech $f_n : \mathbb{R}^n \supset E \to \mathbb{R}$ będzie ciągiem funkcji mierzalnych zbieżnych punktowo do $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.*

- *Jeśli ciąg f_n jest nieujemny i rosnący, to znaczy $0 \le f_1 \le f_2 \le \dots$ (ewentualnie f_n jest rosnący i f_1 jest całkowalna), albo*
- *Jeśli funkcje f_n są wspólnie ograniczone przez funkcję g całkowalną w sensie Lebesgue'a (tzw. majorantę), tzn. $|f_n(x)| < g(x)$ dla każdego $x \in E$.*

Wówczas

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n = \int_E f \ .$$

W szczególności w drugim przypadku f jest funkcją całkowalną. W pierwszym przypadku mówimy o zbieżności monotonicznej, *a drugim o* zbieżności zmajoryzowanej.

Zadanie 3. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty (1 + x^{2n})^{-\frac{1}{n}} \mathrm{d}x \ .$$

Zadanie 4. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 \chi_{[0,\frac{1}{n}]}(x) \mathrm{d}x \ .$$

Uzasadnij, dlaczego przejście do granicy pod znakiem całki daje błędny wynik.

Zadanie 5. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{1}{1+x^n} \mathrm{d}x$$

Twierdzenie (Fubini'ego). *Niech $f : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną w sensie Lebesgue'a (lub niech będzie funkcją mierzalną nieujemną). Wówczas funkcja $x \mapsto f(x,y)$ jest λ^n-mierzalna dla p.w $y \in \mathbb{R}^k$, zaś funkcja $y \mapsto f(x,y)$ jest λ^k-mierzalna dla p.w $x \in \mathbb{R}^n$. Ponadto*

$$\int_{\mathbb{R}^{n+k}} f = \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y) \mathrm{d}\lambda^n(x) \right) \mathrm{d}\lambda^k(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^k} f(x,y) \mathrm{d}\lambda^k(y) \right) \mathrm{d}\lambda^n(x) \ .$$

Innymi słowy całkowanie po parze zmiennych (x,y) sprowadza się do iterowanego całkowania (w dowolnej kolejności) po każdej ze zmiennych z osobna.

Zadanie 6. Oblicz całkę z funkcji $f(x,y) = (ax+by)$ na zbiorze $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 < y, y^2 < x\}$.

Dom 1. Oblicz granicę
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\mathrm{d}x\ .$$

Dom 2. Oblicz całkę
$$\int_{[1,2]\times[0,3]} e^{2x-y}\mathrm{d}\lambda^2(x,y)\ .$$

Michał Jóźwikowski, 18 stycznia 2019.

AM II.1 2018/2019 (gr. 2 i 3), 14 stycznia 2019

`Funkcje mierzalne.`

Zadanie 1. Niech $f_1, f_2, f_3, f_4 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będą funkcjami mierzalnymi. Wykaż, że funkcja

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} f_1(\boldsymbol{x}) & \text{jeśli } f_3(\boldsymbol{x}) > f_4(\boldsymbol{x}) \\ f_2(\boldsymbol{x}) & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

jest mierzalna.

Zadanie 2. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą poza zbiorem miary zero. Wykaż, że f jest mierzalna.

Zadanie 3. Rozważmy funkcje $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ równe prawie wszędzie, tzn. zbiór $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{x}) \neq g(\boldsymbol{x})\}$ jest miary zero. Wykaż, że jeśli f jest mierzalna, to również g jest mierzalna.

Zadanie 4. Wykaż, że funkcja (lokalnie) lipszycowska $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ przekształca zbiory miary zero na zbiory miary zero.

Kartkówka:

Zadanie 5. Podaj przykład zbiorów mierzalnych $A, B \subset \mathbb{R}$ o następujących własnościach

- A jest gęsty (w $\mathbb{R}$)
- B jest brzegowy
- Zbiory A i B są równe prawie wszędzie, tzn. $\lambda(A \div B) = 0$.

Zadanie 6. Podaj przykład zbioru mierzalnego $C \subset \mathbb{R}$ o następujących własnościach:

- $\lambda(C) = 1$
- C nie jest zawarty w żadnym przedziale skończonym
- C nie zawiera żadnego przedziału.

Dom 1. Wykaż, że dyfeomorfizm $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ przekształca zbiory miary zero na zbiory miary zero. *Wskazówka*: Na każdym zbiorze zwartym K istnieje stała C taka, że $\|\Phi(\boldsymbol{x}) - \Phi(\boldsymbol{y})\| \leq C\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ dla dowolnych $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in K$.

Dom 2. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną (niekoniecznie klasy C^1). Wykaż, że pochodna $f'(x)$ jest funkcją mierzalną. *Wskazówka*: granica funkcji mierzalnych jest funkcją mierzalną.

Michał Jóźwikowski, 14 stycznia 2019.

AM II.1 2018/2019 (gr. 2 i 3), 11 stycznia 2019

`Wstęp do teorii miary, zbiory borelowskie i zbiory miary zero.`

Zadanie 1. (gruby zbiór Cantora) Rozważmy ciąg liczb dodatnich $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots$ o tej własności, że $\sum \alpha_i \cdot 2^{i-1} \leq 1$. Budujemy analog zbioru Cantora w następujący sposób:

- W pierwszym kroku z odcinka $[0, 1]$ usuwamy przedział otwarty o długości α_1 współśrodkowy z odcinkiem,
- W drugim kroku z każdego z dwóch powstałych odcinków usuwamy przedział otwarty długości α_2 współśrodkowy z danym odcinkiem,
- W trzecim kroku z każdego z czterech powstałych odcinków usuwamy współśrodkowy przedział otwarty długości λ_3, itd.

Wykaż, że skonstruowany w ten sposób zbiór C ma następujące własności:

- $\operatorname{int} C = \emptyset$, C jest domknięty i zwarty,
- C jest mierzalny i $\lambda(C) = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \cdot 2^{i-1}$,
- C jest nieprzeliczalny.

Omówienie zadań domowych

Zadanie 2. Wykaż, że w każdym podzbiorze $A \subset \mathbb{R}$ dodatniej miary Lebesgue'a istnieją punkty $x, y \in A$ takie, że $x - y \notin \mathbb{Q}$.

Zadanie 3. Niech x będzie elementem zbioru X. Dla dowolnego podzbioru $A \subset X$ definiujemy

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x \in A \\ 0 & \text{gdy } x \notin A. \end{cases}$$

Wykaż, że δ_x jest miarą zewnętrzną i wyznacz σ-ciało zbiorów δ_x-mierzalnych.

Dom 1 (grupa 2). Wykaż, że σ-ciało zbiorów mierzalnych względem miary zewnętrznej δ_x składa się ze wszystkich podzbiorów zbioru X.

Dom 2 (grupa 3). Niech X będzie zbiorem, $A \subset X$ jego podzbiorem, a μ miarą zewnętrzną na X. Definiujemy $\nu(B) := \mu(A \cap B)$. Pokaż, że ν jest miarą zewnętrzną. Jak wygląda σ-ciało zbiorów ν-mierzalnych?

Michał Jóźwikowski, 11 stycznia 2019.

AM II.1 2018/2019 (gr. 2 i 3), 7 stycznia 2019

`Wstęp do teorii miary, zbiory borelowskie i zbiory miary zero.`

Zadanie 1. Wykazać, że jeśli zbiór $\mathbb{Q} \cap (0,1)$ pokryjemy skończoną liczbą przedziałów, to suma długości tych przedziałów jest nie mniejsza niż 1.

Zadanie 2. Wykaż, że następujące zbiory w $\mathbb{R}^2$ są miary zero:

a) $A = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = r^2, r \in \mathbb{Q}\}$;

b) $A = \{(x,y) \mid x - y \in \mathbb{Q}\}$;

c) $A = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$, gdzie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest dowolną funkcją ciągłą.

Zadanie 3. Wykaż, że jeśli przynajmniej jeden ze zbiorów $A, B \subset \mathbb{R}$ jest miary zero to produkt $A \times B$ też jest miary zero.

Zadanie 4. Czy przedział otwarty $(0,1)$ jest zbiorem typu F_σ?

Zadanie 5. Czy zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ jest typu F_σ? Czy jest typu G_δ? *Wskazówka*: Z topologii powinniśmy znać tw. Baire'a: w przestrzeni zupełnej suma przeliczalnej rodziny zbiorów domkniętych i brzegowych jest zbiorem brzegowym.

Zadanie 6. Wykaż, że zbiór

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} [n^n, n^n + \frac{1}{\ln(n+1)}] \setminus \mathbb{Q}$$

jest borelowski i oblicz jego miarę Lebesgue'a.

Zadanie 7. Niech (f_n) będzie ciągiem funkcji ciągłych $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wykaż, że zbiory

a) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = +\infty\}$;

b) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{granica ciągu } f_n(x) \text{ jest liczbą wymierną}\}$.

są borelowskie.

Dom 1. Niech C oznacza zbiór tych liczb z przedziału $[0,1]$, które mają rozwinięcie dziesiętne, w którym nie występuje cyfra 3. Wykaż, że C jest zbiorem miary zero. Jaka jest miara zbioru tych liczb z przedziału $[0,1]$, które mają skończoną liczbę trójek w rozwinięciu dziesiętnym?

Dom 2. Niech (f_n) będzie ciągiem funkcji ciągłych $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Czy zbiór $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{ciąg } f_n(x) \text{ jest zbieżny}\}$ jest borelowski?

Michał Jóźwikowski, 7 stycznia 2019.

AM II.1 2018/2019 (gr. 2 i 3), 21 grudnia 2018

`Ekstrema warunkowe, wstęp do teorii miary.`

Omówienie zadań domowych.

Zadanie 1. Znajdź maksimum funkcji $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_5 + x_4x_5x_1 + x_5x_2x_1$ przy warunkach $x_i \geq 0$ i $\sum_{i=1}^{5} x_i = 1$.

Zadanie 2. W zbiorze $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 - xy + xz + yz = 1\}$ znajdź punkt najbardziej odległy od osi OZ.

Miara i zbiory mierzalne.

Podzbiór $\mathcal{F} \subset 2^X$ nazywamy σ-ciałem *w X gdy zawiera zbiór pusty $\emptyset$ i jest zamknięty na przeliczalne operacje teoriomnogościowe $\setminus$, $\cap$ i $\cup$. Innymi słowy chcemy mieć rodzinę podzbiorów X, na których można wykonywać standardowe operacje na zbiorach i iterować je przeliczalnie wiele razy.*

Miarą *na σ-ciele $\mathcal{F}$ nazywamy funkcję $\mu : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ spełniającą dwa warunki:*

a) $\mu(\emptyset) = 0$,

b) dla dowolnych zbiorów parami rozłącznych $A_i \in \mathcal{F}$ zachodzi $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

Drugi z warunków nazywamy przeliczalną addytywnością. *Odpowiada on intuicji, że aby zmierzyć dany zbiór możemy zmierzyć jego poszczególne części. Założenie, że liczba części może być nieskończona ale przeliczalna ma charakter techniczny i pozwala radzić sobie ze zbiorami, których nie da się przedstawić jako suma skończonej liczby „ładnych” części.*

Z punktu widzenia Analizy Matematycznej podstawowe znaczenie ma dla nas miara Labesgue'a w $\mathbb{R}^n$, *oznaczana λ lub λ^n i* σ-ciało zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. *Ich formalna definicja korzysta z pojęcia miary zewnętrznej i z twierdzenia Caratehodory'ego. Z praktycznego punktu widzenia wystarcza nam wiedzieć, że λ^n na przedziałach (kostkach) jest naturalną długością (objętością) i następująca charakteryzacja $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ i λ^n. Mianowicie, każdy zbiór mierzalny w sensie Lebesgue'a jest sumą*

- *zbioru borelowskiego (zbiory borelowskie to elementy σ-ciała generowanego przez wszystkie zbiory otwarte – te zbiory musimy uwzględnić jeśli chcemy mierzyć przedziały(kostki), które stanowią bazę topologii w $\mathbb{R}^n$)*
- *i zbioru miary zero. Z definicji $A \subset \mathbb{R}^n$ jest miary zero gdy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje przeliczalna rodzina przedziałów (kostek) P_i taka, że $A \subset \bigcup_i P_i$ oraz $\sum_i \lambda(P_i) < \varepsilon$. Innymi słowy A możemy opakować z kostki o dowolnie małej mierze.*

Zadanie 3. Wykaż, że następujące podzbiory w $\mathbb{R}$ są miary zero:

a) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

b) $\mathbb{Q}$

c) zbiór Cantora $C = \{x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \mid a_i \in \{0, 2\}\}$.

Michał Jóźwikowski, 21 grudnia 2018.

AM II.1 2018/2019 (gr. 2 i 3), 17 grudnia 2018

`Ekstrema warunkowe.`

Twierdzenie. *Rozważmy funkcję* $g : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}$ *i odwzorowanie* $F = (f_1, \dots, f_k) : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^k$ *i niech* $M = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{n+k} \mid F(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\}$. *Jeśli funkcja* $g\big|_M$ *ma ekstremum lokalne w punkcie* $\boldsymbol{p} \in M$ *to zachodzi jedna z dwóch sytuacji:*

1. *Gradienty* $\nabla f_1(\boldsymbol{p}), \dots, \nabla f_k(\boldsymbol{p})$ *są liniowo zależne (tzn.* F *nie spełnia założeń TFO w* $\boldsymbol{p}$ *i w konsekwencji nie wiemy, czy* M *jest rozmaitością w otoczeniu* $\boldsymbol{p}$*)*
2. *Gradient* $\nabla g(\boldsymbol{p})$ *jest kombinacją liniową gradientów* $\nabla f_1(\boldsymbol{p}), \dots, \nabla f_k(\boldsymbol{p})$*, tzn. istnieją stałe* $\lambda_i \in \mathbb{R}$ *(zwane mnożnikami Lagrange'e) takie, że*

$$\nabla g(\boldsymbol{p}) = \lambda_1 \nabla f_1(\boldsymbol{p}) + \ldots + \lambda_k f_k(\boldsymbol{p}) \ .$$

W obu przypadkach gradienty $\nabla g(\boldsymbol{p}), \nabla f_1(\boldsymbol{p}), \dots, \nabla f_k(\boldsymbol{p})$ *są liniowo zależne.*

Omówienie zadań z zawodów drużynowych

Zadanie 1. Znajdź największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x, y, z) = x$ w zbiorze

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 8, x + y = z\} \ .$$

Zadanie 2. Niech

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 4, x^2 + y^2 + z^2 = 6\} \ .$$

Uzasadnij, że funkcja $F : K \to \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$ osiąga na zbiorze K wartość maksymalną. Znajdź tę wartość.

Dom 1. Wyznaczyć kresy funckji $f(x, y, z) = xyz$ na zbiorze

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^4 + z^8 = 14\} \ .$$

Dom 2. Znajdź kres górny funkcji $f(x, y, z) = xy - z$ na zbiorze

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x + y + z \geq 0\} \ .$$

Michał Jóźwikowski, 17 grudnia 2018.

AM II.1 2018/2019 (gr. 2 i 3), 14 grudnia 2018
Zawody drużynowe

W ramach odreagowywania stresów po kolokwium zapraszam na zawody drużynowe. Przed Państwem zestaw 7 zadań, uszeregowanych według subiektywnej skali trudności. Zadania będziecie Państwo rozwiązywać w 5-6 osobowych grupach. Każda grupa na koniec ćwiczeń zapisuje rozwiązane przez siebie zadania na kartkach. Rozwiązania zostaną ocenione w skali 0-10 za zadanie. Najlepsza drużyna dostanie nagrody o dużej zawartości cukru.

Zadanie 1. Rozważmy odwzorowanie $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ klasy C^r i funkcję $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ klasy C^r, gdzie $r \geq 0$. Wykaż, że złożenie $g(F) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest funkcją klasy C^r.
Innymi słowy, składanie odwzorowań klasy C^r nie wyprowadza nas z tej klasy.

Zadanie 2. Wykaż, że funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ y & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest klasy $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. *Wskazówka*: Pokaż, że dla dowolnego punktu $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y)$ jest sumą swojego szeregu Taylora wokół $(0,0)$.
Ogólnie każda funkcja analityczna (będąca sumą swojego szeregu Taylora) jest C^∞ gładka.

Zadanie 3. Niech $M_n(\mathbb{R})$ oznacza przestrzeń kwadratowych macierzy rzeczywistych wymiaru $n \times n$. Przestrzeń tę możemy naturalnie utożsamiać z przestrzenią euklidesową $\mathbb{R}^{n^2}$. Określmy funkcję $F : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ wzorem $F(A) = \det(A)$.

a) Wykaż, że funkcja F jest różniczkowalna i oblicz jej różniczkę $D_I F$, gdzie I oznacza macierz jednostkową $n \times n$.

b) Oblicz $D_A F$, gdzie A jest dowolną macierzą. *Wskazówka*: Wykorzystaj poprzedni punkt i wiadomości z algebry liniowej.

c) Wykaż, że zbiór $M = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$ jest rozmaitością zanurzoną w $\mathbb{R}^{n^2}$ wymiaru $n^2 - 1$.

Zbiór M z powyższego zadania nazywamy specjalną grupą liniową i oznaczamy symbolem $SL(n, \mathbb{R})$. Ma on strukturę rozmaitości różniczkowej i jednocześnie strukturę grupy. Co więcej operacje grupowe (mnożenie i odwracanie macierzy) są różniczkowalne. Tego typu obiekty nazywamy grupami Lie'go.

Zadanie 4. Rozważmy zbiór $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| = x^3 \text{ i } x \geq 0\}$. Rozstrzygnij, czy C jest rozmaitością różniczkową. Czy jest nią $C \setminus \{(0,0)\}$? *Wskazówka*: Z wykładu wiemy jak wygląda przestrzeń styczna do rozmaitości.

Zadanie 5. Niech $U \subset M_n(\mathbb{R})$ oznacza przestrzeń wszystkich nieosobliwych kwadratowych macierzy rzeczywistych wymiaru $n \times n$. Przestrzeń tę możemy naturalnie utożsamiać z otwartym podzbiorem przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^{n^2}$. Określmy odwzorowanie $\Phi : U \to U$ wzorem $\Phi(A) = A^{-1}$.

a) Wykaż, że odwzorowanie Φ jest funkcją gładką (klasy C^∞). *Wskazówka*: Przydatne mogą być wiadomości z algebry liniowej.

b) Wykaż, że w jeśli w twierdzeniu o funkcji odwrotnej klasę C^1 zastąpimy klasą C^k to funkcja odwrotna też jest klasy C^k. *Wskazówka*: można skorzystać z poprzedniego punktu i z wyników zadania 1.

Analogicznie, również w TFU można zastąpić klasę C^1 przez C^k.

Zadanie 6. Niech $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ będzie odwzorowaniem klasy C^1 takim, że rząd różniczki $D_{\boldsymbol{p}}F$ jest równy 2 w każdym punkcie $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2$. Wykaż, że dla każdego $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2$ istnieje otoczenie $U \ni \boldsymbol{p}$ w $\mathbb{R}^2$ takie, że $F(U)$ jest 2-wymiarową rozmaitością.
Analogiczny wynik jest prawdziwy dla dowolnego odwzorowania $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+k}$, którego różniczka jest maksymalnego rzędu (takie odwzorowanie nazywamy immersją).

Zadanie 7. Niech $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ będzie rozmaitością n-wymiarową. Wykaż, że dla każdego $\boldsymbol{p} \in M$ istnieje otoczenie $U \ni \boldsymbol{p}$ w $\mathbb{R}^{n+k}$ takie, że zbiór $M \cap U$ można opisać jako zerową poziomicę pewnego odwzorowania $F : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^k$, którego różniczka $D_{\boldsymbol{p}}F$ jest odwzorowaniem liniowym rzędu n. Wywnioskuj stąd, że obraz rozmaitości przy dyfeomorfiźmie jest rozmaitością.
A zatem oba znane nam opisy rozmaitości: jako lokalny wykres funkcji i jako poziomica niezdegenerowanego odwzorowania są lokalnie równoważne.

Michał Jóźwikowski, 14 grudnia 2018.

AM II.1 2018/2019 (gr. 2 i 3), 10 grudnia 2018

`Twierdzenie o funkcji uwikłanej, rozmaitości, uzupełnienia przed kolokwium.`

Twierdzenie o funkcji uwikłanej mówi, że zbiór opisany równaniem $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{0}$, gdzie $F=(f_1,\ldots,f_k):\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$ jest klasy C^1, jest w otoczeniu punktu $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ wykresem funkcji $\phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$, o ile F jest niezdegenerowane w kierunku zmiennych zależnych, tzn. różniczka $D_{\boldsymbol{y}}F(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ jest nieosobliwa. Zbiór $M\subset\mathbb{R}^{n+k}$, który lokalnie (w otoczeniu każdego punktu) wygląda jak wykres funkcji klasy C^1, której dziedziną jest $\mathbb{R}^n$ nazywamy rozmaitością *n-wymiarową. W tej definicji nie interesuje nas które ze współrzędnych w $\mathbb{R}^{n+k}$ pełnią rolę zmiennych zależnych, a które niezależnych. Na mocy TFU aby otoczenie punktu $\boldsymbol{p}$ należącego do zbioru $M=\{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^{n+k}\mid F(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{0}\}$ było rozmaitością wystarczy, aby znaleźć pewien podział współrzędnych $\mathbb{R}^{n+k}=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k\ni(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, w którym spełnione jest założenie TFU. Do tego z kolei wystarcza, aby wiersze pełnej macierzy różniczki DF były liniowo niezależne. Otrzymujemy twierdzenie:*

Twierdzenie. *Niech $F=(f_1,\ldots,f_k):\mathbb{R}^{n+k}\to\mathbb{R}^k$ będzie funkcją klasy C^1. Jeśli w każdym punkcie $\boldsymbol{p}$ zbioru $M=\{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^{n+k}\mid F(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{0}\}$ (pełna) różniczka $DF(\boldsymbol{p})$ jest przekształceniem liniowym maksymalnego rzędu (równoważnie: gradienty $\nabla f_1(\boldsymbol{p}),\ldots,\nabla f_k(\boldsymbol{p})$ są liniowo niezależne) to M jest n-wymiarową rozmaitością zanurzoną.*
Ponadto przestrzeń styczna $\mathrm{T}_{\boldsymbol{p}}M=\ker DF(\boldsymbol{p})$ (równoważnie $\bigcap_{i=1}^k\{\nabla f_i(\boldsymbol{p})\}^\perp$).

W szczególności: zbiór opisany pojedynczym równaniem $M=\{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^N\mid f(\boldsymbol{v})=0\}$, gdzie $f:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ jest funkcją klasy C^1 jest rozmaitością $N-1$ wymiarową gdy $\nabla f(\boldsymbol{v})\neq\boldsymbol{0}$ w każdym punkcie $\boldsymbol{v}\in M$.

Zadanie 1. Niech $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^3+y^3+z^4+xyz=4\}$. Wykaż, że M jest rozmaitością dwuwymiarową klasy C^1. Wyznacz przestrzeń styczną do M w punkcie $(\sqrt[3]{3},0,-1)$.

Zadanie 2. Wykaż, że $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x+y+z=4, x^2+y^2+z^2=6\}$ jest rozmaitością 2-wymiarową. Wyznacz przestrzeń styczną do M w punkcie $((2,1,1)$.

Uzupełnienie: pewne własności szeregów Taylora.

Zadanie 3. Dana jest funkcja $f\in C^2(\mathbb{R}^2)$ taka, że

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-\operatorname{tg}(x)\sin(y)}{x^2+y^2}=1\ .$$

Oblicz $f_{xy}(0,0)$.

Zadanie 4. Zbadać istnienie ekstremum lokalnego funkcji $f(x,y)=x^2-xy+\frac{1}{4}\ln(1+y^2)$ w punkcie $(0,0)$.

Omówienie zadań domowych.

Michał Jóźwikowski, 10 grudnia 2018.

AM II.1 2018/2019 (gr. 2 i 3), 7 grudnia 2018

`Twierdzenie o funkcji uwikłanej.`

Twierdzenie o funkcji uwikłanej mówi kiedy układ równań $f_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = f_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \ldots = f_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ *w przestrzeni* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \ni (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ *daje się rozwiązać względem zmiennych* $\boldsymbol{y}$*. Będziemy mówili, że* $\boldsymbol{x}$ *to* zmienne niezależne*, a* $\boldsymbol{y}$ *to* zmienne zależne*. Intuicyjnie, k równań w przestrzeni* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ *powinno opisywać zbiór n-wymiarowy. Będzie tak, o ile* f_i *są funkcjonalnie niezależne i niezdegenerowane względem zmiennych zależnych* $\boldsymbol{y}$*. Dokładne sformułowanie jest następujące:*

Twierdzenie (o funkcji uwikłanej). *Niech* $F = (f_1, \ldots, f_k) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ *będzie funkcją klasy* C^1*. Rozważmy punkt* $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$*, taki, że* $F(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = \mathbf{0}$*. Załóżmy, że różniczka* $D_{\boldsymbol{y}}F(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$ *(różniczka F względem zmiennych zależnych* $\boldsymbol{y}$ *w punkcie* $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$*) jest nieosobliwa.*
Wówczas istnieje pewne otoczenie $U \ni (\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$ *i odwzorowanie* $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ *klasy* C^1*, takie że* $\boldsymbol{y} = \phi(\boldsymbol{x})$ *rozwiązuje równanie* $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mathbf{0}$ *w U. To znaczy: dla dowolnego* $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in U$ *równanie* $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mathbf{0}$ *jest spełnione wtedy i tylko wtedy gdy* $\boldsymbol{y} = \phi(\boldsymbol{x})$*.*

Zauważmy, że odwzorowanie ϕ *o którym jest mowa w twierdzeniu spełnia tożsamość* $F(\boldsymbol{x}, \phi(\boldsymbol{x})) = \mathbf{0}$ *w otoczeniu punktu* $(\boldsymbol{x}_0)$*. Różniczkując ją względem* $\boldsymbol{x}$ *można uzyskać wiedzę o pierwszej różniczce* $D_{\boldsymbol{x}}\phi(\boldsymbol{x})$*. W szczególności jeśli regularność F jest wyższa niż* C^1 *możemy podnieść regularność* ϕ*. Kolejne różniczkowania pozwalają obliczyć kolejne różniczki* ϕ*.*

Zadanie 1. Uzasadnić, że równanie $z^5 - xz + y^2 = 0$ w otoczeniu punktu $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 1)$ wyznacza zmienną z jako funkcję pozostałych zmiennych $z = \phi(x, y)$ klasy C^∞. Napisać wielomian Taylora stopnia 2 funkcji ϕ w otoczeniu punktu $(1, 0)$.

Zadanie 2. Uzasadnić, że równanie $x \ln w + w \ln y = 0$ wyznacza w otoczeniu punktu $(x_0, y_0) = (1, 1)$ zmienną w jako funkcję pozostałych zmiennych $w = w(x, y)$ i że jest to funkcja klasy C^∞. Napisać wielomian Taylora stopnia 2 funkcji $w(x, y)$ w otoczeniu punktu $(1, 1)$.

Omówienie zadań domowych (gr. 3).

Dom 1. Wykazać, że układ równań

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^3 + z^4 = 2 \end{cases}$$

Wyznacza y i z jako funkcje x w otoczeniu $x_0 = 0$ przy warunkach $y(0) = 1$ i $z(0) = -1$. Obliczyć pochodne $y'(0)$, $z'(0)$, $y''(0)$ i $z''(0)$.

Dom 2. Niech $S = \{(x, y, z) \mid e^{xz} + x^2 + xy + y^2 + z = 1\}$. Wykazać, że w otoczeniu punktu $(0, 0, 0)$ zbiór S jest wykresem funkcji $z = f(x, y)$ klasy C^1. Zbadać, czy f ma lokalne ekstremum w $(0, 0)$.

Michał Jóźwikowski, 7 grudnia 2018.

AM II.1 2018/2019 (gr. 2 i 3), 3 grudnia 2018

`Twierdzenie o funkcji odwrotnej, dyfeomorfizmy.`

Grupowe własności dyfeomorofrizmów:

- *Jeśli $F : U \to V$ jest dyfeomorfizmem to $F^{-1} : V \to U$ też.*
- *Jeśli $F : U \to V$ i $G : V \to W$ są dyfeomorfizmami to złożenie $G(F) : U \to W$ też.*

Zadanie 1. Skonstruuj dyfeomorfizm

a) płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ na otwartą kulę jednostkową $B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$.

b) otwartego kwadratu $K = \{(x, y) \mid |x| < 1, |y| < 1\}$ na $\mathbb{R}^2$.

c) otwartego kwadratu $K = \{(x, y) \mid |x| < 1, |y| < 1\}$ na otwarte koło $B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$.

d) płaszczyzny bez punktu $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ na płaszczyznę bez koła $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

e) trójkąta o wierzchołkach $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ na kwadrat $K = \{(x, y) \mid |x| < 1, |y| < 1\}$.

Omówienie zadania domowego.

Zadanie 2. Rozważmy funkcję różniczkowalną $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ i dokonajmy zamiany zmiennych $\Phi : (x, y) \mapsto (u = x, v = x^2 + y^2)$. Zapisz wyrażenie $y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y}$ w zmiennych (u, v), tzn. wyraź je w terminach pochodnych funkcji $g(u, v) := f(\Phi^{-1}(u, v))$. (Wówczas $f(x, y) = g(u(x, y), v(x, y))$.)

Zadanie 3. (gr.3) Niech $f : \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^1 określoną na zbiorze otwartym U. Wybierzmy $(x_0, y_0) \in U$. Skonstruuj dyfeomorfizm postaci $\phi(x, y, z) = (x, y, w)$ zdefiniowany w pewnym otoczeniu $W \subset \mathbb{R}^3$ punktu $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ przeprowadzający powierzchnię $\{(x, y, z) \mid z = f(x, y)\}$ na powierzchnię $\{(x, y, w) \mid w = 2018\} \cap \phi(W)$.

Dom 1. Skonstruuj dyfeomorfizmy:

a) zbioru $B = \{(x, y) \mid x > 0, x^2 + y^2 < \frac{\pi}{4}\}$ na półpłaszczyznę $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

b) zbioru $A = \{(x, y) \mid 0 < y < x^2 \text{ i } 0 < x < 1\}$ na $\mathbb{R}^2$.

Dom 2. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ takie, że dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(a + x, b + y) - f(a, b) - ay - bx - x^2 - y^2}{|x|^3 + |y|^3} = 0 \ ,$$

lub wykaż, że taka funkcja nie istnieje.

AM II.1 2018/2019 (gr. 2 i 3), 30 listopada 2018

`Wzór Taylora, twierdzenie o funkcji odwrotnej, dyfeomorfizmy.`

Odrobina teorii:

Odwzorowanie $F : U \to V$ pomiędzy podzbiorami otwartymi $U, V \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy dyfeomorfizmem *gdy*

- *F jest homoeomorfizmem (a więc ciągłą bijekcją, taką że F^{-1} też jest ciągła).*
- *F i F^{-1} są różniczkowalne.*

Twierdzenie o funkcji odwrotnej mówi, że jeśli odwzorowanie $F : U \to V$ klasy C^1 ma w jakimś punkcie $\boldsymbol{p} \in U$ nieosobliwą różniczkę $D_{\boldsymbol{p}}F$, to F jest w pewnym otoczeniu $\Omega \ni \boldsymbol{p}$ odwracalna i F^{-1} jest różniczkowalna w punkcie $F(\boldsymbol{p})$. Innymi słowy, F jest lokalnym dyfeomorfizmem między Ω i $F(\Omega)$.

Jako wniosek mamy następujący przydatny fakt:

Lemat 1. *Niech odwzorowanie $F : U \to V$ klasy C^1 będzie bijekcją pomiędzy zbiorami otwartymi $U, V \subset \mathbb{R}^n$. Jeśli różniczka $D_{\boldsymbol{p}}F$ jest nieosobliwa w każdym punkcie $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$ to F jest dyfeomorfizmem.*

Zadanie 1. Czy istnieje funkcja gładka $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dla której

$$\nabla f(x, y) = [2xy, yx^2]?$$

Zadanie 2. Znajdź wyższe pochodne cząstkowe $D^{(\alpha,\beta)} f(0, 0)$ funkcji $f(x, y) = \exp[2x + 3y]$ dla wszystkich $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$.

Omówienie zadań domowych.

Zadanie 3. Oblicz różniczkę odwzorowania biegunowego $f : \mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2$

$$f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

i sprawdź, że jest ono dyfeomorfizmem na obraz.

Zadanie 4. Sprawdź, czy przekształcenie $f(x, y) = (2xy, x^2 - y^2)$ jest dyfeomorfizmem $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ na obraz?

Dom 1. Rozważmy odwzorowanie $f(x, y) = (x^2 + y - y^2, 2xy + y)$. Znajdź wszystkie punkty, w których f jest lokalnie odwracalna. Wykaż, że punkt $(2, 1)$ jest jednym z nich i oblicz różniczkę f^{-1} w punkcie $(4, 5)$.

Michał Jóźwikowski, 30 listopada 2018.

AM II.1 2018/2019 (gr. 2 i 3), 26 listopada 2018

`Przestrzenie styczne, wyższe pochodne, wzór Taylora.`

Omówienie zadania domowego.

Zadanie 1. (gr. 3) Niech $A = \{(x, y, z) \mid x^2 + y + z = 1\}$. Wyznaczyć wszystkie punkty $(x, y, z) \in A$, w których wektor $[1, 1, 1]$ jest styczny do A. Czy istnieje prosta przechodząca przez $(0, 0, 0)$ i prostopadła do A w jakimś jego punkcie?

Zadanie 2. Rozważmy punkty $\boldsymbol{a} = (-1, 0)$ i $\boldsymbol{b} = (1, 0)$ i zdefiniujmy funkcje

$$f(x, y) = \|\boldsymbol{a} - (x, y)\| + \|\boldsymbol{b} - (x, y)\| \quad \text{oraz} \quad f(x, y) = \|\boldsymbol{a} - (x, y)\| - \|\boldsymbol{b} - (x, y)\| \ .$$

Wykaż, że poziomice funkcji f i g są wzajemnie ortogonalne.

Przypomnienie wiadomości o wielomianie Taylora.

Zadanie 3. Obliczyć wielomian Taylora stopnia 3 funkcji $f(x, y) = \exp(xy^2) - \ln(1 + xy)$ w punkcie $(0, 0)$.

Kartkówka

Zadanie 4. Znajdź punkt krytyczny funkcji $f(x, y) = \frac{y}{x} + y - x^2$ i rozstrzygnij czy f ma w tym punkcie lokalne ekstremum.

Zadanie 5. Zbadaj określoność macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ .$$

Dom 1. Znajdź wszystkie punkty $\boldsymbol{v}$ paraboli $P = \{(t, \frac{1}{4}t^2) \mid t \in \mathbb{R}\}$, dla których prosta styczna do P wychodząca z $\boldsymbol{v}$ przecina elipsę $E = \{(x, y) \mid 3x^2 + 4y^2 = 9\}$ pod kątem prostym.

Dom 2. Obliczyć wielomian Taylora stopnia 3 w punkcie $\boldsymbol{a}$ funkcji

a) $e^{x+y+z} - xyz$, $\boldsymbol{a} = (0, 0, 0)$,

b) xyz, $\boldsymbol{a} = (1, -1, 2)$.

Michał Jóźwikowski, 26 listopada 2018.

AM II.1 2018/2019 (gr. 2 i 3), 23 listopada 2018

`Przestrzenie (stożki) styczne, własności gradientu.`

Zadanie 1. (gr. 3) Rozważmy liczby $0 < a < b$ i sympleks $A = \{(x^1, x^2, \ldots, x^n) \mid a \leq x^1 \leq x^2 \ldots \leq x^n \leq b\}$. Znajdź kres górny funkcji

$$f(x^1, \ldots, x^n) = \frac{x^1 x^2 \cdot \ldots \cdot x^n}{(a + x^1)(x^1 + x^2) \cdot \ldots \cdot (x^n + b)}$$

na zbiorze A.

Zadanie 2. Wyznaczyć wektory styczne do zbiorów

a) $\{(x, y) \mid x^2 > y^2, x > 0\}$ w punkcie $(0, 0)$,

b) $\{(x, y) \mid y^2 \leq x^3\}$ w punkcie $(0, 0)$.

Odrobina teorii - twierdzenie z wykładu.
Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną, taką że $\nabla f(\boldsymbol{p}) \neq 0$. Wówczas przestrzeń styczna do poziomicy f przechodzącej przez $\boldsymbol{p}$, czyli do zbioru $M_{\boldsymbol{p}} := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{p})\}$ w punkcie $\boldsymbol{p}$ to przestrzeń wektorów prostopadłych do gradientu $\nabla f(\boldsymbol{p})$:

$$\mathrm{T}_{\boldsymbol{p}} M_{\boldsymbol{p}} := \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \boldsymbol{v}, \nabla f(\boldsymbol{p}) \rangle = 0\} \ .$$

Z definicji jest to podprzestrzeń liniowa w $\mathbb{R}^n$. Czasami wygodniej jest myśleć o tej przestrzeni jako o przestrzeni afinicznej zaczepionej w $\boldsymbol{p}$, czyli o

$$\boldsymbol{p} + \mathrm{T}_{\boldsymbol{p}} M_{\boldsymbol{p}} = \{\boldsymbol{p} + \boldsymbol{v} \mid \langle \boldsymbol{v}, \nabla f(\boldsymbol{p}) \rangle = 0\} \ .$$

Zadanie 3. Napisać równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $P = (5, -2, 3)$ do płaszczyzny (krzywej) opisanej równaniem $f = 0$, jeśli $f(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + z^3 + xyz - 14$.

Zadanie 4. (gr. 2) Niech $A = \{(x, y, z) \mid x^2 + y + z = 1\}$. Wyznaczyć wszystkie punkty $(x, y, z) \in A$, w których wektor $[1, 1, 1]$ jest styczny do A. Czy istnieje prosta przechodząca przez $(0, 0, 0)$ i prostopadła do A w jakimś jego punkcie?

Dom 1. Napisać równanie prostej stycznej w punkcie $P = (2, -3)$ do poziomicy funkcji $f(x, y) = x^4 + xy + y^2$.

Michał Jóźwikowski, 23 listopada 2018.

AM II.1 2018/2019 (gr. 2 i 3), 19 listopada 2018

`Ekstrema funkcji wielu zmiennych na zbiorach różnych, ekstrema lokalne.`

Zadanie 1. Zbadaj lokalne ekstrema funkcji $f(x,y) = x(y-x)e^{-y}$.

Zadanie 2. Wyznacz lokalne ekstrema funkcji $f(x,y) = x^2 + 3xy^2 + y^4$ na $\mathbb{R}^2$.

Zadanie 3. Pokazać, że funkcja $f(x,y) = (x-y^2)(3x-y^2)$ po obcięciu do dowolnej prostej przechodzącej przez $(0,0)$ ma minimum lokalne w $(0,0)$. Czy f ma minimum lokalne w $(0,0)$?

Omówienie zadania domowego.

Zadanie 4. (gr. 3) Rozważmy liczby $0 < a < b$ i sympleks $A = \{(x^1, x^2, \ldots, x^n) \mid a \leq x^1 \leq x^2 \ldots \leq x^n \leq b\}$. Znajdź kres górny funkcji

$$f(x^1, \ldots, x^n) = \frac{x^1 x^2 \cdot \ldots \cdot x^n}{(a+x^1)(x^1+x^2)\cdot \ldots \cdot (x^n+b)}$$

na zbiorze A.

Michał Jóźwikowski, 19 listopada 2018.

AM II.1 2018/2019 (gr. 2 i 3), 16 listopada 2018

`Ekstrema funkcji wielu zmiennych na zbiorach różnych.`

Zadanie 1. Wyznacz kresy funkcji $f(x,y) = \frac{y}{x^2+4y^2+1}$ na $A = \{(x,y) \mid x \geq 0\}$.

Zadanie 2. Wyznacz kresy funkcji $f(x,y) = \frac{x\ln(1+y)}{2x^2+y^2}$ na zbiorze $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq y \leq 1\}$.

Omówienie zadań domowych.

Dom 1. Funkcja różniczkowalna $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ spełnia następujące warunki:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x,a) = 0 = \lim_{y\to\pm\infty} f(b,y) \quad \text{dla dowolnych ustalonych } a, b \in \mathbb{R}.$$

Rozstrzygnij, czy f musi być ograniczona?

Michał Jóźwikowski, 16 listopada 2018.

AM II.1 2018/2019 (gr. 2 i 3), 9 listopada 2018

`Ekstrema funkcji wielu zmiennych na zbiorach różnych, różniczka złożenia (reguła łańcuchowa).`

Omówienie zadania domowego.

Zadanie 1. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją afiniczną (tzn. $f(\boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v} \rangle + b$ dla pewnych $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ oraz $b \in \mathbb{R}$), a K wielościanem. Wykaż, że f osiąga swoje kresy na K w wierzchołkach K.

Zadanie 2. Wyznacz kresy funkcji $f(x, y, z) = 6xy - 3xz - 2yz$ na zbiorze $C = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x, y, z \leq 1\}$.

Zadanie 3. Zdefiniujmy funkcję $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jako złożenie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ oraz $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ danych wzorami

$$f(x, y) = (x - y, x + y, 2\sqrt{xy}), \quad g(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2) \ .$$

Oblicz $\frac{\partial F}{\partial x}$.

Dom 1. Wyznacz kresy funkcji $f(x, y) = x(y - x)e^{-y}$ na zbiorze $T = \{(x, y) \mid -1 \leq 3x \leq 2y \leq 6\}$.

Dom 2. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną taką że $\nabla f(1, 1, \ldots, 1) = [1, 4, \ldots, n^2]$. Obliczyć pochodną funkcji jednej zmiennej $F(t) = (f(t, t^2, t^3, \ldots, t^n))^2$ w $t = 1$.

Michał Jóźwikowski, 9 listopada 2018.

AM II.1 2018/2019 (gr. 2 i 3), 5 listopada 2018

`Różniczkowalność, ekstrema funkcji wielu zmiennych na zbiorach zwartych i nie tylko, różniczka złożenia.`

Omówienie zadań domowych

Zadanie 1. Znajdź kresy funkcji $f(x,y) = (3x+2y)e^{-4x^2-y^2}$ na $\mathbb{R}^2$.

Zadanie 2. Niech $A = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2-z^2+4=0\}$. Znaleźć w zbiorze A punkt którego odległość od punktu $(2,4,0)$ jest najmniejsza.

Wskazówka: : Zapisz odległość ustalonego punktu $(x,y,z) \in A$ od $(2,4,0)$ jako funkcję zmiennych x i y.

Zadanie 3. Funkcja różniczkowalna $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ spełnia: $\nabla f(0,0,0) = [1,2,3]$ oraz $\nabla f(1,1,1) = [-1,-2,-3]$. Funkcja $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dana jest wzorem

$$g(x,y,z) = f(e^{-x}+y, e^y - z, e^z - x) \ .$$

Obliczyć pochodną kierunkową $D_{\boldsymbol{v}} g(0,0,0)$, gdzie $v = [2,1,1]$.

Zadanie 4. Funkcja różniczkowalna $f : U \to \mathbb{R}$ określona na zbiorze $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$ jest zadana wzorem $f(x,y) = g(\frac{x^2}{y})$ dla pewnej funkcji różniczkowalnej $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Wykaż, że dla dowolnego punktu $(x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ funkcja f spełnia tożsamość

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \ .$$

Dom 1. Funkcja różniczkowalna $f : U \to \mathbb{R}$ określona na zbiorze $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$ spełnia tożsamość

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \ .$$

Wykaż, że $f(x,y) = g(\frac{x^2}{y})$ dla pewnej funkcji różniczkowalnej $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.

Wskazówka: Wykaż, że funkcja $f(x, \frac{x^2}{c})$ jest stała jako funkcja zmiennej x przy ustalonym c.

Michał Jóźwikowski, 5 listopada 2018.

AM II.1 2018/2019 (gr. 2 i 3), 29 października 2018

`Różniczkowalność, ekstrema funkcji wielu zmiennych na zbiorach zwartych.`
Przypomnijmy podstawowe informacje o różniczkowalności odwzorowań $F = (f^1, f^2, \ldots, f^k) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$*:*

- różniczka odwzorowania F *w punkcie* $\boldsymbol{a}$ *to odwzorowanie liniowe* $D_{\boldsymbol{a}}F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ *przybliżająca w tym punkcie odwzorowanie* F *do wyrazów rzędu 2, tzn.*

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{\|F(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{a}) - D_{\boldsymbol{a}}F[\boldsymbol{h}]\|}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0 \ . \tag{1}$$

- *Z powyższego wynika, że odwzorowanie* $F = (f^1, \ldots, f^k)$ *jest różniczkowalne wtedy i tylko wtedy gdy każda z funkcji* f^j *dla* $j = 1, \ldots k$ *jest różniczkowalna.*
- *jeśli różniczka* $D_{\boldsymbol{a}}F$ *istnieje, to istnieją wszystkie pochodne cząstkowe* $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(\boldsymbol{a})$*, a ponadto odwzorowanie liniowe* $D_{\boldsymbol{a}}F$ *jest zadane przez macierz pochodnych cząstkowych*

$$D_{\boldsymbol{a}}F[h^1, \ldots, h^n] = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(\boldsymbol{a}) & \frac{\partial f^1}{\partial x^2}(\boldsymbol{a}) & \ldots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n}(\boldsymbol{a}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f^k}{\partial x^1}(\boldsymbol{a}) & \frac{\partial f^k}{\partial x^2}(\boldsymbol{a}) & \ldots & \frac{\partial f^k}{\partial x^n}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} h^1 \\ h^2 \\ \ldots \\ h^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \nabla f^1(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{h} \rangle \\ \ldots \\ \langle \nabla f^k(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{h} \rangle \end{bmatrix} \ ,$$

  gdzie $\nabla f(\boldsymbol{a}) = [\frac{\partial f}{\partial x^1}(\boldsymbol{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(\boldsymbol{a})]$ *oznacza* gradient funkcji $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *w punkcie* $\boldsymbol{a}$*.*
- *Związek z AM I:* $g'(a)$ *– pochodna funkcji jednej zmiennej* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *w punkcie* a *wyznacza następującą różniczkę (odwzorowanie liniowe z* $\mathbb{R}$ *do* $\mathbb{R}$*)* $D_a g : h \mapsto g'(a)h$*.*
- *Związek różniczki funkcji* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *z pochodną kierunkową: pochodna kierunkowa* f *w punkcie* $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ *w kierunku* $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ *to wartość różniczki* $D_{\boldsymbol{a}}f$ *na wektorze* $\boldsymbol{v}$*:*

$$D_{\boldsymbol{v}}f(\boldsymbol{a}) = D_{\boldsymbol{a}}f[\boldsymbol{v}] \ .$$

- *Z wykładu wiemy, że jeśli pochodne cząstkowe odwzorowania* F *istnieją w otoczeniu punktu* $\boldsymbol{a}$ *i są ciągłe w* $\boldsymbol{a}$ *to* F *jest różniczkowalna w* $\boldsymbol{a}$*. Uwaga! Odwrotne twierdzenie nie zachodzi.*
- *Odwzorowanie* $F = (f^1, \ldots, f^k) : U \overset{otw.}{\subset} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$*, którego wszystkie pochodne cząstkowe cząstkowe* $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$*, gdzie* $i = 1, \ldots, k$ *i* $j = 1, \ldots, n$ *istnieją i są ciągłe w* U *nazywamy odwzorowaniem* klasy C^1 w U.

Z powyższych rozważań wynika, że standardowa procedura badania różniczkowalności danej funkcji $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *jest następująca:*

1. *Liczymy gradient* $\nabla f = [\frac{\partial f}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n}]$*. Jeśli się da, to robimy to rachunkowo, jeśli nie musimy liczyć z definicji.*
2. *W punktach, w których któraś pochodna cząstkowa nie istnieje nie ma różniczkowalności. W pozostałych punktach odwzorowanie liniowe* $\boldsymbol{h} \mapsto \langle \nabla f, \boldsymbol{h} \rangle$ *jest* <u>*kandydatem*</u> *na różniczkę.*
3. *Aby sprawdzić czy faktycznie jest to różniczka mamy dwie drogi postępowania:*
   (a) *z definicji: możemy policzyć czy granica* (**??**) *istnieje.*
   (b) *możemy sprawdzić, czy pochodne cząstkowe* $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ *są określone w otoczeniu danego punktu i ciągłe w tym punkcie. Jeśli odpowiedź jest twierdząca, to funkcja jest różniczkowalna. Ale, uwaga!, jeśli pochodne cząstkowe nie są ciągłe, bądź nie istnieją w otoczeniu danego punktu, to musimy różniczkowalność badać dalej (jak w punkcie a).*

Dokończenie zadania z poprzednich ćwiczeń.

Zadanie 1. Zbadaj różniczkowalność funkcji

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{x^2+y^2+z^2}\right) & \text{dla } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$

W powyższym zadaniu różniczkowalność w $(0,0)$ pokazaliśmy dwoma sposobami: z definicji i dowodząc ciągłości pochodnych cząstkowytch.

Zadanie 2. Zbadać różniczkowalność w dziedzinie $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > -1\}$ funkcji

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\ln(1+xy)}{y} & \text{dla } y \neq 0 \text{ i } xy > -1 \\ x & \text{dla } y = 0. \end{cases}$$

Zadanie 3. (gr. 3) Funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ma ograniczone pochodne cząstkowe w całej dziedzinie, tzn. istnieją stałe a i b, takie, że dla każdego $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| < a \quad \text{oraz} \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| < b\ .$$

Wykaż, że f jest lipszycowska. *Wskazówka*: Wykorzystać podobną własność funkcji jednej zmiennej.

„Metoda policyjna" szukania kresów funkcji ciągłej $f : \mathbb{R}^n \supset K \to \mathbb{R}$ na zbiorze zwartym K. Podejrzane są:

- punkty krytyczne *funkcji (tzn. punkty, $\boldsymbol{a} \in \operatorname{int}(K)$ w których gradient $\nabla f(\boldsymbol{a})$ jest wektorem zerowym).*
- *wszystkie punkty, w których różniczkowanie nie jest możliwe, tzn. punkty brzegowe ∂K i punkty, w których f nie ma określonych pochodnych cząstkowych.*

Zadanie 4. Wyznacz kres górny i dolny funkcji $f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2$ na kuli $K = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Kartkówka.

Zadanie 5. Oblicz pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ dla } f(x,y) = e^{\cos(\frac{1}{x^2} + \ln(xy))} \quad \text{(gr. 2)}$$
$$\frac{\partial g}{\partial y} \text{ dla } g(x,y) = \ln(\sin(xy) + \frac{1}{y^2}) \quad \text{(gr. 3)}$$

Zadanie 6. Oblicz pochodną kierunkową funkcji $f(x,y,z) = x^3 + 3x^2y + z^2$ w punkcie $(1,2,3)$ w kierunku $[2,1,1]$.

Dom 1. Funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadana jest wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Sprawdzić, czy pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ są ciągłe w punkcie $(0,0)$. Zbadać różniczkowalność f w punkcie $(0,0)$.

Powyższy przykład pokazuje, że ciągłość pochodnych cząstkowych w otoczeniu wybranego punktu nie jest warunkiem koniecznym różniczkowalności funkcji w tym punkcie.

Dom 2. Znaleźć wszystkie punkty krytyczne (tzn. punkty, w których gradient jest wektorem zerowym) funkcji $f(x,y) = (3x+2y)e^{-4x^2-y^2}$ na $\mathbb{R}^2$.

Definicja. Podzbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy *obszarem*, gdy jest otwarty i spójny.
Z wykładu wiadomo, że każdy zbiór otwarty i spójny w $\mathbb{R}^n$ jest też spójny łukowo.

Dom 3 ($*$/2). Niech $A \subset \mathbb{R}^2$ będzie obszarem wypukłym. Wykaż, że jeśli funkcja ciągła $f : A \to \mathbb{R}$ ma ograniczone pochodne cząstkowe w całej dziedzinie, to spełnia warunke Lipschitza. Wykaż, że teza nie jest prawdziwa bez założenia o wypukłości A.

AM II.1 2018/2019 (gr. 2 i 3), 26 października 2018

`Własności norm w` $\mathbb{R}^n$`, własność Darboux funkcji ciągłej, pochodna i różniczkowalność.`

Zadanie 1. Kula jednostkowa pewnej normy $\|\cdot\|$ w $\mathbb{R}^2$ opisana jest następująco:

$$B = [-1,1] \times [-1,1] \cup \{(x,y) \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x,y) \mid (x+1)^2 + y^2 \leq 1\} \ .$$

Wyznacz normy wektorów $(1,0)$, $(0,5)$ i $(9,3)$. Wykaż, że rozważana norma nie pochodzi od iloczynu skalarnego.

Zadanie 2. Niech f będzie funkcją ciągłą o wartościach rzeczywistych określoną na zbiorze

$$A = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\boldsymbol{v}\|_2 = 1\} \cup \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\boldsymbol{v} - (2,0)\|_1 \leq 1\} \ ,$$

taką, że $f(-1,0) = -1$, $f(3,0) = 17$. Wykazać, ze istnieje punkt $a \in A$ taki, że $f(a) = 1$. Czy istnieje funkcja f o podanych własnościach taka, że taki punkt a jest tylko jeden?

Omówienie zadań z kartkówki.

Zadanie 3. (gr. 2) Oblicz pochodne cząstkowe funkcji

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{x^2+y^2+z^2}\right) & \text{dla } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$

Zadanie 4. Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$ w punkcie $(3,1)$ w kierunku wektora $[-1,2]$.

Zadanie 5. Zbadać różniczkowalność funkcji w całej dziedzinie

$$f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3} \ .$$

Michał Jóźwikowski, 26 października 2018.

AM II.1 2018/2019 (gr. 2 i 3), 22 października 2018

`Granica i ciągłość funkcji wielu zmiennych, własności iloczynu skalarnego, pochodna cząstkowa.`

Do katalogu „patologicznych” przykładów dodajemy następujące:

- *Funkcja, która ma granicę* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$*, ale jedna lub obie z granic* $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)$, $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$ *nie istnieją – Zad. 1.*
- *Funkcja, która ma pochodne cząstkowe w* $(0,0)$ *(a nawet wszystkie pochodne kierunkowe) a nie jest w tym punkcie ciągłą – Zad. 3.*

Omówienie zadania domowego (gr.3)
Z podsumowania rozważań na temat iloczynów skalarnych:

Twierdzenie. *Niech* A *będzie macierzą pewnego iloczynu skalarnego w* $\mathbb{R}^n$ *(tzn.* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *jest symetryczna i dodatnio określona). Wówczas istnieje baza* $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1,\dots,n}$ *w* $\mathbb{R}^n$*, ortonormalna względem standardowego iloczynu skalarnego, w której* A *przyjmuje postać diagonalną* $A \sim \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$*, gdzie* $\lambda_i > 0$*.*

Wniosek. W szczególności norma wyznaczona przez ten iloczyn skalarny dla wektora $\boldsymbol{v} = \sum_i a^i \boldsymbol{e}_i$ (zapis w wyróżnionej bazie$\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1\dots,n}$) wynosi

$$\|\boldsymbol{v}\|_A = \sqrt{\sum_i \lambda_i (a^i)^2}\ .$$

A zatem kula jednostkowa w $\mathbb{R}^n$ w tej normie jest elipsoidą, o półosiach $\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\boldsymbol{e}_i$.
Zauważmy ponadto, że z uwagi na ortonormalność bazy $\{\boldsymbol{e}_i\}$, norma euklidesowa w tej bazie zapisuje się jako

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\sum_i (a^i)^2}\ .$$

Wynika stąd następujący fakt

$$\sup_{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\boldsymbol{0}\}} \frac{\|\boldsymbol{v}\|_A}{\|\boldsymbol{v}\|_2} = \max_i\{\sqrt{\lambda_i}\} \quad \text{oraz} \quad \inf_{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\boldsymbol{0}\}} \frac{\|\boldsymbol{v}\|_A}{\|\boldsymbol{v}\|_2} = \min_i\{\sqrt{\lambda_i}\}\ ,$$

A ponadto odpowiedni kres jest przyjmowany na odpowiednim wektorze bazowym odpowiadającym maksymalnej lub minimalnej wartości własnej.

Omówienie zadań domowych z 15 października

Zadanie 1. (gr. 2) Rozważmy funkcję

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y\sin(1/x) & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

Oblicz granice $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f_i(x,y)$, $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f_i(x,y)$ oraz $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_i(x,y)$ dla $i = 1, 2$.

Morał z powyższego zadania: z istnienia granicy w punkcie nie wynika istnienie granic iterowanych.

Zadanie 2. Oblicz pochodne cząstkowe funkcji $f(x,y) = x\cos y$ i $g(x,y) = x^y$.

Zadanie 3. (gr. 2) Rozważmy funkcję

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } y = x^2, x > 0 \\ 0 & \text{dla pozostałych } (x,y). \end{cases}$$

Sprawdź, że funkcja F ma pochodne cząstkowe w $(0,0)$, lecz mimo to nie jest ciągła w $(0,0)$.

Morał z powyższego zadania: istnienie pochodnych cząstkowych, a nawet pochodnych kierunkowych w każdym kierunku nie gwarantuje nawet ciągłości funkcji, nie mówiąc już o jej różniczkowalności.

Zadanie 4. (gr. 3) Oblicz pochodne cząstkowe funkcji

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{x^2+y^2+z^2}\right) & \text{dla } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$

Zadanie 5. Funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ma ograniczone pochodne cząstkowe w całej dziedzinie, tzn. istnieją stałe a i b, takie, że dla każdego $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| < a \quad \text{oraz} \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| < b\ .$$

Wykaż, że f jest lipszycowska.

Wskazówka: Wykorzystaj podobną własność funcji jednej zmiennej.

Dom 1. Oblicz pochodne cząstkowe funkcjie $f(x,y,z) = x^{(y^z)}$.

Dom 2. (gr.2) Iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^2$ zadany jest macierzą $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Przez $\|\cdot\|$ oznaczmy normę pochodzącą od tego iloczynu skalarnego, a przez $\|\cdot\|_2$ standardową normę euklidesową. Oblicz

$$\sup_{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^2\setminus\{\boldsymbol{0}\}} \frac{\|\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|_2} \quad \text{oraz} \quad \inf_{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^2\setminus\{\boldsymbol{0}\}} \frac{\|\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|_2}.$$

Dom 3. (gr. 3) Rozważmy funkcję

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y\sin(1/x) & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

Oblicz granice $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f_i(x,y)$, $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f_i(x,y)$ oraz $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_i(x,y)$ dla $i = 1,2$.

Dom 4 ($*$/2). (gr.2) Funkcja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ma granicę w $(x,y) = (0,0)$. Wykaż, że jeśli granice $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} F(x,y)$ oraz $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} F(x,y)$ istnieją to

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} F(x,y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} F(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)\ .$$

W uzupełnieniu do zadania 1: jeśli funkcja ma granicę w punkcie i granice iterowane istnieją, to wszystkie trzy granice muszą być sobie równe.

Michał Jóźwikowski, 22 października 2018.

AM II.1 2018/2019 (gr. 2 i 3), 19 października 2018

`Granica i ciągłość funkcji wielu zmiennych, własności iloczynu skalarnego.`

Definicja. *Poziomicą* funkcji $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ nazywamy zbiór $F^{-1}(c)=\{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n\mid F(\boldsymbol{v})=c\}$, gdzie $c\in\mathbb{R}$ jest ustaloną stałą.

Zadanie 1. Funkcję $F:\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ definiujemy wzorem $F(x,y)=y^x$. Naszkicuj wykres poziomicowy F i zbadaj istnienie granic

$$\lim_{(x,y)\to(a,0)} F(x,y)\quad \text{gdzie } a\in\mathbb{R}.$$

Omówienie zadań domowych z 8 października (gr. 2).

Zadanie 2. Niech $A\in M_n(\mathbb{R})$ będzie rzeczywistą n-wymiarową macierzą symetryczną (tzn. $A=A^T$) i niech $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\sum_i x^iy^i$ oznacza standardowy iloczyn skalarny. Wykaż że:

a) (gr. 2) A ma tylko rzeczywiste wartości własne.

b) A ma n parami ortogonalnych wektorów własnych o rzeczywistych wartościach własnych.

Z podsumowania zadań dotyczących własności macierzy symetrycznych wynika:

Twierdzenie. *Niech A będzie macierzą pewnego iloczynu skalarnego w $\mathbb{R}^n$ (tzn. $A\in M_n(\mathbb{R})$ jest symetryczna i dodatnio określona). Wówczas istnieje baza w $\mathbb{R}^n$, ortonormalna względem standardowego iloczynu skalarnego, w której A przyjmuje postać diagonalną $A\sim\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$, gdzie $\lambda_i>0$.*
W szczególności kula jednostkowa w $\mathbb{R}^n$ w dowolnej normie wyznaczonej przez pewien iloczyn skalarny jest elipsoidą, której osie symetrii są wzajemnie ortogonalne.

Kartkówka.

Zadanie 3. Zbadaj istnienie granicy funkcji

$$\text{(gr. 2)}\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^5+y^5}{x^2+y^4}\qquad \text{(gr. 3)}\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4+y^4}{|x|+y^2}\ .$$

Zadanie 4. Rozstrzygnij, czy następująca funkcja jest normą w $\mathbb{R}^2$. Odpowiedź uzasadnij.

$$\text{(gr. 2)}\ f(x,y)=\sqrt[3]{3|x|^3+|y|^3}+|x|\qquad \text{(gr. 3)}\ f(x,y)=\sqrt[4]{x^4+4y^4}+|y|\ .$$

Dom 1. (gr.3) Iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^2$ zadany jest macierzą $\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}$. Przez $\|\cdot\|$ oznaczmy normę pochodzącą od tego iloczynu skalarnego, a przez $\|\cdot\|_2$ standardową normę euklidesową. Oblicz

$$\sup_{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^2\setminus\{\boldsymbol{0}\}}\frac{\|\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|_2}\quad\text{oraz}\quad \inf_{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^2\setminus\{\boldsymbol{0}\}}\frac{\|\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|_2}.$$

Michał Jóźwikowski, 19 października 2018.

AM II.1 2018/2019 (gr. 2 i 3), 15 października 2018

`Granica i ciągłość funkcji wielu zmiennych, własności iloczynu skalarnego (gr. 3).`
Zadanie 1. Zbadaj istnienie granic funkcji

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2}{y^4+x^2}$.

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sqrt{|x|}y^2}{|x|(y^4+x^2)}$.

Omówienie zadania domowego.
Zadanie 2. Zbadaj istnienie granic funkcji

a) (gr. 2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos[(x+y)^2]}{x^2+y^2}$.

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(x+e^y)-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Omówienie zadań domowych z 8 października (gr. 3).
Zadanie 3. (gr. 3) Niech $A \in M_n(\mathbb{R})$ będzie rzeczywistą n-wymiarową macierzą symetryczną (tzn. $A = A^T$) i niech $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_i x^i y^i$ oznacza standardowy iloczyn skalarny. Wykaż że A ma tylko rzeczywiste wartości własne.

Dom 1. Znaleźć wszystkie punkty ciągłości funkcji:

$$F(x,y) := \begin{cases} \frac{x-y}{x^3-y} & \text{gdy } y \neq x^3 \\ 1 & \text{gdy } y = x^3. \end{cases}$$

Dom 2. Znaleźć wszystkie punkty ciągłości funkcji

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\exp(\frac{-y}{x^2}) & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0\ . \end{cases}$$

Michał Jóźwikowski, 15 października 2018.

AM II.1 2018/2019 (gr. 2 i 3), 12 października 2018

`Granica i ciągłość funkcji wielu zmiennych, podstawienie biegunowe.`
Do zapamiętania: *ciągłość funkcji wielu zmiennych, to znacznie więcej niż ciągłość po każdej zmiennej z osobna. Na ćwiczeniach widzieliśmy różne „patologiczne" przykłady:*

- *funkcji, która ma granice* $\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(x,y)$ *ale nie ma granicy* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *– Zad. 1(b).*
- *funkcji, która ma granice* $\lim_{x\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$ *ale nie ma granicy* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *– Zad. 1(b).*
- *funkcji, która jest ciągła po obcięciu do dowolnej prostej, ale nie jest ciągła – Zad. 3.*

Zadanie 1. Zbadaj istnienie granic:

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$.

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$.

c) (gr. 2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2\ln(x^2+2y^2)$.

d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\ln(x^2+2y^2)$.

e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

f) (gr. 3) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos[(x+y)^2]}{x^2+y^2}$.

Każdy punkt $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{\mathbf{0}\}$ *możemy jednoznacznie opisać podając jego odległość od początku układu współrzędnych* r*, oraz kąt* α *jaki wektor* $[x,y]$ *tworzy z osią* OX*:*

$$\begin{cases} x &= r\cos\alpha \\ y &= r\sin\alpha \end{cases},$$

gdzie $r\in\mathbb{R}_+$ *oraz* $\alpha\in[0,2\pi)$*. Parę* (r,α) *nazywamy* współrzędnymi biegunowymi *punktu* (x,y)*. Zauważmy, że* $(x,y)\to(0,0)$ *wtedy i tylko wtedy gdy* $r\to 0$ *niezależnie od kąta* α*.*
Zadanie 2. Rozwiąż poprzednie zadanie używając współrzędnych biegunowych.
Zadanie 3. Zbadaj ciągłość funkcji

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{gdy } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{gdy } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Dom 1. Wykaż, że funkcja z poprzedniego zadania jest ciągła wzdłuż każdej prostej przechodzącej przez $(0,0)$.
Dom 2 ($*$). Funkcja $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ jest ciągła „po współrzędnych" oraz rosnąca względem pierwszej zmiennej (tzn. $\forall_{y_0}$ funkcja $x\mapsto F(x,y_0)$ jest ciągła i rosnąca, oraz $\forall_{x_0}$ funkcja $y\mapsto F(x_0,y)$ jest ciągła). Wykaż, że F jest ciągła.

Michał Jóźwikowski, 12 października 2018.

AM II.1 2018/2019 (gr. 2 i 3), 8 października 2018

`Normy w` $\mathbb{R}^n$`, iloczyn skalarny.`

Zadanie 1. Rozstrzygnij, czy następujące funkcje są normami w $\mathbb{R}^2$:

a) $\sqrt{x^2+9y^2}$.

b) $\sqrt{x^2+9y^2}+|x+y|$.

c) $\sqrt[3]{x^3+|y|}$.

Zadanie 2. Udowodnij, że jeśli norma $\|\cdot\|$ pochodzi od iloczynu skalarnego to spełnione są równości

a) $\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\|^2+\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|^2=2\|\boldsymbol{v}\|^2+2\|\boldsymbol{w}\|^2$.

b) $\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\|^2-\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|^2=4\langle v,w\rangle$.

Pierwszą z powyższych tożsamości nazywamy tożsamością równoległoboku. *Możemy jej używać aby wykazać, że dana norma $\|\cdot\|$ w $\mathbb{R}^n$ nie pochodzi od iloczynu skalarnego. W tym celu należy skazać dwa wektory $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^n$ dla których*

$$\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\|^2+\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|^2\neq 2\|\boldsymbol{v}\|^2+2\|\boldsymbol{w}\|^2\ .$$

Zadanie 3. Rozstrzygnij, dla jakich $p\in[0,+\infty]$ norma $\|\cdot\|_p$ pochodzi od iloczynu skalarnego.

Omówienie zadań domowych.

Zadanie 4. Niech $B\subset\mathbb{R}^n$ będzie dowolnym zbiorem zwartym (domkniętym i ograniczonym), którego $\mathbf{0}$ jest punktem wewnętrznym i symetrycznym względem $\mathbf{0}$ (tzn. $\boldsymbol{x}\in B\Leftrightarrow -\boldsymbol{x}\in B$). Wykaż, że B jest kulą jednostkową dla pewnej normy.

Dom 1. Niech $\langle\cdot,\cdot\rangle$ będzie iloczynem skalarnym w $\mathbb{R}^2$ zadanym przez macierz $\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}$, tzn.

$$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=(x^1,x^2)\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y^1\\ y^2\end{pmatrix}.$$

Udowodnij, że liczby a, c i $ac-b^2$ są dodatnie.

Dom 2. Niech $A\in M_n(\mathbb{R})$ będzie rzeczywistą n-wymiarową macierzą symetryczną (tzn. $A=A^T$) i niech $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\sum_i x^iy^i$ oznacza standardowy iloczyn skalarny. Wykaż że wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym macierzy A są ortogonalne w iloczynie $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Dom 3 ($*$). Udowodnij, że jeśli norma $\|\cdot\|$ spełnia, dla dowolnych $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ tożsamość

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2+\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2=2\|\boldsymbol{x}\|^2+2\|\boldsymbol{y}\|^2\ .$$

To pochodzi od pewnego iloczynu skalarnego.

Powyższe zadanie pokazuje, że tożsamość równoległoboku jednoznacznie charakteryzuje te normy, które pochodzą od pewnego iloczynu skalarnego.

Michał Jóźwikowski, 8 października 2018.

AM II.1 2018/2019 (gr. 2 i 3), 5 października 2018

`Przestrzeń euklidesowa` $\mathbb{R}^n$`, normy w` $\mathbb{R}^n$ `i ich własności.`

Dla $\boldsymbol{x} = (x^1, x^2, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ *i* $p \in [1, +\infty]$, p*-normą* $\boldsymbol{x}$ *nazywamy*

$$\|\boldsymbol{x}\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} (x^i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \text{ gdy } p < +\infty, \text{ oraz } \quad \|\boldsymbol{x}\|_\infty := \max_i |x^i| \ .$$

Zadanie 1. Udowodnij, że $\lim_{p\to+\infty} \|\boldsymbol{x}\|_p = \|\boldsymbol{x}\|_\infty$.
Zadanie 2. Wykaż, że $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_\infty$ są normami.
Zadanie 3. Naszkicuj kule jednostkowe w $\mathbb{R}^2$ w normie $\|\cdot\|_p$ dla $p = 1, \frac{3}{2}, 2, 4, \infty$.
Zadanie 4. Wykaż, że $\|x\|_p \leq \|x\|_q$ gdy $p > q$. (Dla uproszczenia rachunki możemy przeprowadzić w $\mathbb{R}^2$.)
Zadanie 5. Niech liczby $p, q \in [1, +\infty]$ będą takie, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (takie liczby nazywamy *wykładnikami sprzężonymi*). Udowodnij, że dla dowolnych liczb nieujemnych a, b zachodzi następująca *nierówność Younga*:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \ .$$

Wskazówka: $ab = \exp[\frac{1}{p} \cdot p \ln a + \frac{1}{q} \cdot q \ln b]$.
Zadanie 6. Niech liczby $p, q \in [1, +\infty]$ będą takie, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, zaś $\boldsymbol{x} = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ i $\boldsymbol{y} = (y^1, y^2, \ldots, y^n)$ dowolnymi punktami w $\mathbb{R}^n$. Udowodnij następującą *nierówność Höldera*:

$$\sum_i |x^i y^i| \leq \|\boldsymbol{x}\|_p \cdot \|\boldsymbol{y}\|_q \ .$$

Wskazówka: skorzystaj z nierówności Younga.

Dom 1. Niech $\|\cdot\|$ będzie dowolną normą w $\mathbb{R}^n$. Wykaż, że kula jednostkowa $B = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\| \leq 1|\}$ jest zbiorem wypukłym.
Dom 2. Znajdź normę na $\mathbb{R}^2$, o ile istnieje, w której kula jednostkowa jest:

a) Prostokątem $[-1, 1] \times [-3, 3]$.

b) Trójkątem równobocznym o środku w $(0, 0)$, którego jednym z wierzchołków jest $(1, 0)$.

Dom 3 ($\frac{*}{2}$). Udowodnij, że dla dowolnego $p \in (1, +\infty)$ funkcja $\|\cdot\|_p$ jest normą. *Wskazówka*: skorzystaj z nierówności Höldera i z faktu, że dla wykładników sprzężonych p, q zachodzi $p = q(p - 1)$.

Michał Jóźwikowski, 5 października 2018.