Rozwiązania zadań z gwiazdką (3 grudnia 2018)

Zadanie 1. **($*/2$)** Udowodnij, że dla dowolnego $p \in (1, +\infty)$ funkcja $\|\cdot\|_p$ jest normą.
Wskazówka: skorzystaj z nierówności Höldera i z faktu, że dla wykładników sprzężonych p, q zachodzi $p = q(p-1)$.

Rozwiązanie: Korzystając z nierówności $|x+y| < |x| + |y|$ dostajemy

$$(\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p)^p = \sum_i |x^i + y^i|^p \le \sum_i \left(|x^i| + |y^i|\right) |x^i + y^i|^{p-1} =$$

$$\sum_i |x^i||x^i + y^i|^{p-1} + \sum_i |y^i||x^i + y^i|^{p-1} \overset{\text{n. Höldera}(p,q)}{\le}$$

$$\left(\sum_i |x^i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_i |x^i + y^i|^{(p-1)q}\right)^{1/q} + \left(\sum_i |y^i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_i |x^i + y^i|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \overset{q(1-p)=p}{=}$$

$$(\|\boldsymbol{x}\|_p + \|\boldsymbol{y}\|_p) \left(\sum_i |x^i + y^i|^p\right)^{1/q} = (\|\boldsymbol{x}\|_p + \|\boldsymbol{y}\|_p)\,(\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p)^{p/q} \ .$$

Stąd

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p = (\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p)^{p-p/q} \le \|\boldsymbol{x}\|_p + \|\boldsymbol{y}\|_p \ .$$

□

Zadanie 2. **($*$)** Udowodnij, że jeśli norma $\|\cdot\|$ spełnia, dla dowolnych $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, *tożsamość równoległoboku*

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 + \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2 = 2\|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\|\boldsymbol{y}\|^2 \ .$$

To pochodzi od pewnego iloczynu skalarnego.

Rozwiązanie: Z ćwiczeń wiemy, że jeśli norma pochodzi od iloczynu skalarnego to

$$4\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 - \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2 \ .$$

Wobec tego zdefiniujmy funkcję

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \frac{1}{4}\left(\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 - \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2\right) \ .$$

Będziemy się starali pokazać, że przy spełnionych założeniach zadania f spełnia definicję iloczynu skalarnego. Wówczas jak łatwo sprawdzić $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{4}\left(\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}\|^2 - \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}\|^2\right) = \frac{1}{4}\|2\boldsymbol{x}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2$, a więc norma $\|\cdot\|$ pochodzi od iloczynu skalarnego $f(\cdot, \cdot)$.

1. Dodatnia określoność wynika wprost z powyższego rachunku, a symetria jest oczywista, bo wzór definiujący f jest symetryczny względem zamiany zmiennych $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$.
2. Spróbujmy sprawdzić, że $f(\cdot,\cdot)$ jest dwuliniowe. W szczególności musimy pokazać, że dla dowolnych $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ zachodzi $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + f(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y})$. Na mocy definicji $f(\cdot,\cdot)$ jest to równoważne tożsamości

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}'+y\|^2 - \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 - \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2 + \|\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{y}\|^2 - \|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}\|^2 \ .$$

3. Dodajmy do obu stron wyrażenie $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{y}\|^2+\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2+\|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}\|^2$ i uporządkujmy wyrazy i dostaniemy, że powyższa tożsamość jest spełniona gdy $L = P$, gdzie

$$L = \left(\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{y}\|^2 + \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{y}\|^2\right) + \left(\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 + \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2\right) + 2\|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}\|^2 \quad \text{zaś}$$
$$P = \left(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{y}\|^2 + \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}\|^2\right) + \left(\|\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{y}\|^2 + \|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}\|^2\right) + 2\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2$$

4. Używając tożsamości równoległoboku dla wyrażeń w nawiasach otrzymamy, że $L = P = 2\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}'\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\|\boldsymbol{y}\|^2$. Wobec powyższego wiemy już, że $f(\cdot,\cdot)$ jest addytywne.
5. Aby pokazać liniowość musimy jeszcze wykazać, że $f(\lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \lambda f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ dla dowolnych $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ i $\lambda \in \mathbb{R}$. Z addytywności wiemy, że $f(k\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = kf(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ dla k naturalnych. Stąd łatwo pokazać, że $f(q\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = qf(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ dla q wymiernych.
6. Przejście od skalarów wymiernych do skalarów rzeczywistych uzasadniamy ciągłością $f(\cdot,\cdot)$, która wynika z ciągłości normy. $\square$