II kolokwium zad 4 – rozwiązanie wzorcowe i zasady oceniania.

Dyfeomorfizm $F : U \to \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ klasy C^1 określony na zbiórze otwartym $U \subset \mathbb{R}^2$ spełnia następujące warunki

a) F odwzorowuje punkt $(x_0, y_0) \in U$ na punkt $(1, 2)$.

b) Macierz różniczki F w punkcie (x_0, y_0) w standardowych bazach jest równa

$$DF(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} .$$

c) F odwzorowuje podzbiory $A \subset U$ i $B \subset U$ na zbiory, odpowiednio, $F(A) = \{(v, w) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \mid vw^2 = 4\}$ i $F(B) = \{(v, w) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \mid v^2 - \frac{1}{2}w^2 = -1\}$.

Wykaż, że zbiory A i B są rozmaitościami zanurzonymi, które przecinają się w punkcie (x_0, y_0) pod kątem prostym.

Zasady oceniania

Do zdobycia było 10 punktów. Oceniając zadania przyjąłem następujące kryteria:

- 2 punkty. Sprawdzenie, że $F(A)$ i $F(B)$ są rozmaitościami.
- 2 punkty. Uzasadnienie, że z powyższego wynika, że A i B również są rozmaitościami.
- 2 punkty. Sprawdzenie, że $F(A)$ i $F(B)$ przecinają się pod kątem prostym.
- 4 punkty. Uzasadnienie, że z powyższego wynika, że również A i B przecinają się pod kątem prostym.
- W praktyce można zrobić zadanie bezpośrednio nie odwołując się do powyższych punktów dotyczących $F(A)$ i $F(B)$. W takim przypadku przyjmowałem 4 punktów za sprawdzenie że A i B są rozmaitościami i 6 za uzasadnienie ich prostopadłości.
- za mniejsze lub większe usterki w poszczególnych punktach obcinałem pojedyncze punkty.
- za mniejsze lub większe ślady dobrych pomysłów dodawałem pojedyncze punkty.

Rozwiązanie wzorcowe (szkic)

1. Zauważmy, że $F(A)$ i $F(B)$ są rozmaitościami. Standardowe uzasadnienie odwołuje się do TFU. Zdefiniujmy $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ i $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wzorami $f_1(v, w) = vw^2 - 4$ i $f_2(v, w) = v^2 - \frac{1}{2}w^2 + 1$. Łatwo sprawdzić, że gradient $\nabla f_1(v, w) = [w^2, 2vw]$ nie

znika na $F(A) = \{(v,w) \mid f_1(v,w) = 0\}$ i podobnie $\nabla f_2(v,w) = [2v, -w]$ nie znika na $F(B) = \{(v,w) \mid f_2(v,w) = 0\}$.

Inny sposób to zauważyć, że $F(A)$ i $F(B)$ są wykresami funkcji gładkich, odpowiednio, $v \mapsto \frac{2}{\sqrt{v}}$ oraz $v \mapsto \sqrt{2(1+v^2)}$.

2. Ponieważ F jest dyfeomorfizmem, i $F(A)$ było rozmaitością to A też nią będzie (i analogicznie dla B). Większość uzasadnień powoływała się na fakt (który był dowodzony w niektórych grupach ćwiczeniowych), że dyfeomorfizm (w tym przypadku F^{-1}) przekształca rozmaitości w rozmaitości.

   Bezpośrednio fakt, że A (i analogicznie B) jest rozmaitością łatwo uzasadnić następującym argumentem: jeśli zbiór $F(A)$ jest opisany równaniem $f_1(v,w) = 0$, to zbiór A jest opisany równaniem $\psi_1(x,y) := f_1(F(x,y)) = 0$. Teraz jeśli $\nabla f_1(v,w) \neq [0,0]$ dla $(v,w) \in F(A)$ to także $\nabla \psi_1(x,y) = \nabla f_1(v,w) DF(x,y) \neq [0,0]$ dla $(x,y) \in A$ i $(v,w) = F(x,y)$, bo $DF(x,y)$ jest nieosobliwe, a zatem na mocy TFU A jest rozmaitością.

3. Wektory $\nabla f_1(1,2) = [4,4]$ i $\nabla f_2(1,2) = [2,-2]$ są wzajemnie prostopadłe, zatem odpowiednie przestrzenie styczne $\mathrm{T}_{(1,2)} F(A) = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{[1,-1]\}$ i $\mathrm{T}_{(1,2)} F(B) = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{[1,1]\}$ też są prostopadłe.

4. Prostopadłość A i B można uzasadnić dwojako. Pierwszy sposób: F^{-1} przekształca $F(A)$ i $F(B)$ na, odpowiednio, A i B, a zatem różniczka $D_{(2,1)} F^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ przekształca przestrzenie styczne $\mathrm{T}_{(1,2)} F(A)$ i $\mathrm{T}_{(1,2)} F(B)$ na, odpowiednio, $\mathrm{T}_{(x_0,y_0)} A$ i $\mathrm{T}_{(x_0,y_0)} B$. Ten fakt nie był dowodzony na wykładzie, ale uznałem go za w miarę oczywisty. Czyli $\mathrm{T}_{(x_0,y_0)} A = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\frac{1}{10}[-4,2]\}$ i $\mathrm{T}_{(x_0,y_0)} B = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\frac{1}{10}[2,4]\}$. Są one oczywiście prostopadłe.

   Sposób bezpośredni odwołuje się do drugiej części punktu 3 i nie wymaga liczenia różniczki F^{-1}. Gradienty funkcji $\psi_1 = f_1(F)$ i $\psi_2 = f_2(F)$ definiujących A i B w punkcie (x_0,y_0) to, odpowiednio

$$[4,4]\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = [8,16] \quad \text{i} \quad [2,-2]\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = [-8,4]$$

   i są one wzajemnie prostopadłe, stąd odpowiednie przestrzenie styczne też.

Michał Jóźwikowski, 24 grudnia 2018.