AM II.1 2018/2019 (gr. 2 i 3)– zadania przygotowawcze do II kolokwium

Ekstrema funkcji wielu zmiennych, ekstrema lokalne

Standardowe typy zadań:

- *Wyznaczanie punktów krytycznych funkcji.*
- *Obliczanie kresów funkcji na danym zbiorze (przypadki zwarte i niezwarte).*
- *Obliczanie odległości pomiędzy dwoma zbiorami.*
- *Badanie lokalnego charakteru punktów krytycznych.*

Co należy wiedzieć:

- *Znać Tw. Weierstrassa.*
- *Znać zasadę Fermata (warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego).*
- *Umieć wykorzystać częściową wiedzę o gradiencie (np. badanie znaków jednej z pochodnych cząstkowych) aby zawęzić szukanie ekstremów do pewnych podzbiorów.*
- *Znać warunki konieczne (dodatnia lub ujemna półokreśloność drugiej różniczki) i dostatecznie (dodatnia lub ujemna określoność drugiej różniczki) istnienia ekstremum lokalnego. Znać warunek dostateczny nieistnienia (niekoreśloność drugiej różniczki) ekstremum lokalnego.*
- *Umieć policzyć punkty krytyczne i macierz drugiej różniczki.*
- *Umieć sprawdzić określoność macierzy drugiej różniczki w punkcie (kryterium Sylvestera, znaki wartości własnych, lub postać kanoniczna odpowiedniej formy kwadratowej).*
- *W przypadku gdy badanie macierzy 2giej różniczki nie daje wiedzy o lokalnym ekstremum, umieć zbadać istnienie ekstremum innymi metodami.*

Zadanie 1. Znajdź najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x, y, z) = z\sin(x^2 + y^2)$ na zbiorze $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Zadanie 2. Oblicz supremum funkcji

$$f(x, y) = \frac{(x^2 + y^2 - x)(1 - x)^2}{(x - y)^2}$$

na zbiorze niezwartym $A = \{(x, y) \mid x^2 - 2x + y^2 \geq 0, 0 \leq x < 1, 0 < y \leq 1\}$.

Zadanie 3. Wyznacz kresy funkcji $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x+1}e^{-xy}$ na zbiorze $A = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq x\}$.

Zadanie 4. Wyznacz kresy funkcji $f(x, y) = \ln(1+x^2+y^2)$ na zbiorze $B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ i } x \leq y\}$.

Zadanie 5. Wyznacz kresy funkcji $f(x, y) = \frac{y-x}{x^4+1}$ na zbiorze $A = \{(x, y) \mid x \geq y \geq 0\}$.

Zadanie 6. Znajdź odległość pomiędzy gałęzią hiperboli $H = \{(x, y) \mid xy + x + y = 0 \text{ i } x > -1\}$ i prostą $L = \{(x, y) \mid x + 2y + 1 = 0\}$.

Zadanie 7. Znaleźć punkty zerowanie się gradientu funkcji f i wyjaśnić, w których z nich ma ona lokalne minima, maksima, a w których nie ma lokalnego ekstremum.

a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$,

b) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$,

c) $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$,

d) $f(x,y,z) = xy^2z^3(6 - x - 2y - 3z)$,

e) $f(x,y) = 3x^8 + 3y^8 + 8x^3y^3$,

f) $f(x,y) = x^5y^7(13 - x - y)$,

g) $f(x,y,z) = x + \frac{4y^2}{x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$,

h) $f(x,y,z) = 2\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + 8z^2 - 8x$,

i) $f(x,y) = -x^4 + y^4 + 4x^2y - 2y^2$.

Zadanie 8. Wykazać, że funkcja $F(x,y) = (1 + e^y)\cos x - ye^y$ ma nieskończenie wiele maksimów lokalnych, chociaż nie ma żadnego minimum lokalnego.

Zadanie 9. Funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna i spełnia w każdym punkcie nierówność $f_{xx} + f_{yy} > 0$. Przypuśćmy, że f ma tylko niezdegenerowane punkty krytyczne (tzn. w każdym punkcie krytycznym macierz hesjanu f jest nieosobliwa). Wykazać, że f nie może mieć maksimów lokalnych.

Zadanie 10. Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ funkcja $f_a(x,y) = \cos(x + y) + a\,\mathrm{tg}(xy)$ ma w punkcie $(0,0)$ lokalne maksimum, dla jakich lokalne minimum, a dla jakich nie ma w $(0,0)$ ekstremum lokalnego.

Odpowiedzi i wskazówki:

Zadanie 1. Brak punktów krytycznych we wnętrzu. Maksimum $\sin(1)$, minimum $-\sin(1)$.
Zadanie 2. $\sup_A f = f(0,1) = 1$; badanie znaku pochodnej f'_y pokazuje, że maksimum jest przyjmowane na prostej $x + y = 1$.
Zadanie 3. Pochodna f'_y jest dodatnia dla $xy < 1$ i ujemna dla $xy > 1$. Stąd kres górny jest przyjmowany na odcinku $\{(x,x) \mid 0 < x \leq 1\}$ lub na fragmencie hiperboli $\{(x,y) \mid xy = 1 \text{ i } x \geq 1\}$, zaś kres dolny na prostej $y = 0$ lub półprostej $\{(x,x) \mid x > 1\}$. $\inf_A f = 0$, $\sup_A f = \frac{1}{e}$.
Zadanie 4. Nic nie trzeba liczyć (logarytm jest rosnący): $\sup_B f = \ln(2)$, $\inf_B f = 0$.
Zadanie 5. Pochodna f'_y jest stale dodatnia, stąd kresu górnego trzeba szukać na prostej $x = y$ a dolnego na postej $y = 0$: $\sup_A f = 0$, $\inf_A f = -\frac{\sqrt[4]{27}}{4}$.
Zadanie 6. Hiperbolę można opisać jako $(x+1)(y+1) = 1$, $x + 1 > 0$. Zatem punkty hiperboli możemy opisać jako $\left(\frac{1}{y+1} - 1, y\right)$, gdzie $y + 1 > 0$, zaś punkty prostej można sparametryzować jako $(-2t - 1, t)$. Musimy znaleźć minimum funkcji

$$\left\|\left(\frac{1}{y+1} - 1, y\right) - (-2t-1, t)\right\| = \sqrt{\left(2t + \frac{1}{y+1}\right)^2 + (y-t)^2}$$

na zbiorze $y > -1$ i $t \in \mathbb{R}$. Rozwiązanie: $t = \frac{1}{10}(-2 - 3\sqrt{2})$, $y = \frac{1}{2}(-2 + \sqrt{2})$. Minimum $\frac{4}{5}(3 - 2\sqrt{2})$.
Zadanie 7. (a) $(-1,2,3)$ lok. min.; (b) $(-2,-1)$ lok. maks., $(-1,-2)$ brak, $(1,2)$ brak, $(2,1)$ lok min.; (c) $(0,0,-1)$ brak, $(24,-144,-1)$ lok. min.; (d) $(x,y,0)$ brak; $(x,0,z)$ lok. min. gdy $\operatorname{sgn}(xz^3(6-x-3z)) = 1$ lok. max gdy $\operatorname{sgn}(xz^3(6-x-3z)) = -1$ brak gdy $\operatorname{sgn}(xz^3(6-x-3z)) = 0$; $(0, 3 - \frac{3z}{2}, z)$ brak ; $(\frac{6}{7}, \frac{6}{7}, \frac{6}{7})$ lok. maks.; (e) $(0,0)$ brak, $(1,-1)$ lok.min., $(-1,1)$ lok. min.; (f) $(5,7)$ lok. maks., $(0,y)$ brak, $(x,0)$ brak; (g) $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ lok. maks., $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ lok. min.; (h) $(8,4,1)$ lok. min.; (i) $(0,0)$ brak, $(0,-1)$ brak, $(0,1)$ lok. min.
Zadanie 8. Punkty krytyczne to $(2k\pi, 0)$ i $((2k+1)\pi, -2)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Łatwo sprawdzić, że w punkcie pierwszego rodzaju macierz hesjanu jest ujemnie określona, a w punkcie drugiego rodzaju jest nieokreślona.
Zadanie 9. Gdyby f miało maksimum lokalne w (x,y), wówczas macierz hesjanu powinna być ujemnie określona. W szczególności z kryterium Sylvestera $f_{xx} < 0$ i $f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0$. Tymczasem wobec założeń zadania $f_{yy} > -f_{xx} > 0$. Stąd wynika, że wyznacznik macierzy drugich pochodnych $f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$ jest ujemny. Sprzeczność.
Zadanie 10. Łatwo policzyć, że $\nabla f_a(0,0) = [0,0]$ i $D^2 f_a(0,0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & a-1 \\ a-1 & -1 \end{pmatrix}$ (najłatwiej to pokazać z rozwinięcia Taylora). Łatwo sprawdzić, że macierz ta jest ujemnie określona dla $a \in (0,2)$ (lokalne maksimum), nieokreślona dla $a \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ (brak ekstremum) i określona niedodatnio dla $a = 0$ i $a = 2$. Ostatnie dwa przypadki wymagają dokładniejszego zbadania. Dla $a = 0$ mamy $f_0(x,y) = \cos(x+y)$ i mamy maksimum lokalne w zerze, bo wartości kosinusa są nie większe niż $1 = f_0(0,0)$. Dla $a = 2$ rozwinięcie Taylora rzędu 4 daje $f_2(x,y) = 1 - \frac{1}{2}(x-y)^2 + \frac{1}{4!}(x+y)^4 + R_4(x,y)$. Widać, że na prostej $y = x$ osiągniemy wartości większe niż 1 w otoczeniu $(0,0)$, a zatem f_2 nie ma lokalnego ekstremum w $(0,0)$.

Przestrzenie styczne

Standardowe typy zadań:

- *wyznacz przestrzeń styczną (stożek styczny) do danego zbioru.*
- *Wyznacz kierunek najszybszego wzrostu/ spadku funkcji.*
- *Zbadaj zachowanie się poziomic funkcji.*

Co należy wiedzieć:

- *Wiedzieć, że gradient wyznacza kierunek najszybszego wzrostu/spadku funkcji.*
- *Umieć obliczyć pochodną kierunkową znając gradient.*
- *Znać związek gradientu z przestrzenią styczną do poziomicy (pamiętać o założeniach!).*
- *Umieć napisać równanie prostej/płaszczyzny prostopadłej do danego wektora i przchodzącej przez dany punkt.*
- *Umieć policzyć przestrzeń styczną do krzywej danej parametrycznie.*
- *Umieć policzyć przestrzeń (stożek) styczną do prostego zbioru korzystając z definicji.*

Zadanie 1. Znajdź przestrzeń styczną do zbioru $\{(x,y) \mid y^2 - y > |x|\}$ w punkcie $(0,1)$.
Zadanie 2. Znajdź przestrzeń styczną do zbioru $A = \{(x,y) \mid x(x^2-4y^2)(x-y^3) = 0\}$ w punkcie $\boldsymbol{a} = (0,0)$.
Zadanie 3. Wyznacz prostą styczną w punkcie $P = (1,1,0)$ do krzywej opisanej parametrycznie

$$K = \{(t^2, t^3, \sin(\pi t)) \mid t \in \mathbb{R}\} \ .$$

Zadanie 4. Napisać równanie prostej stycznej w punkcie $P = (2,-3)$ do krzywej opisanej równaniem $f(x,y) = x^4 + xy + y^2 - 19 = 0$.
Zadanie 5. Wyznacz równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $(1,1,3)$ i stycznej do powierzchni $z = 2x^2 + y^2$ w $\mathbb{R}^3$.
Zadanie 6. Wykaż, że poziomice funkcji $f(x,y) = xy^2$ i $g(x,y) = x^2 - \frac{1}{2}y^2$ są wzajemnie ortogonalne.
Zadanie 7. Niech A będzie podzbiorem w $\mathbb{R}^n$ i niech ciąg $\boldsymbol{x}_n \in A$ realizuje wektor styczny $\boldsymbol{v} \in \mathrm{T}_{\boldsymbol{p}} A$, tzn. $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{p}$ oraz $\frac{\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{p}}{\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{p}\|} \to \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}$. Wykaż, że dla dowolnej funkcji $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ klasy C^1 zachodzi równość:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(\boldsymbol{x}_n) - f(\boldsymbol{p})}{\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{p}\|} = \frac{1}{\|\boldsymbol{v}\|} \langle \nabla f(\boldsymbol{p}), \boldsymbol{v} \rangle \ .$$

Zadanie 8. Rozważmy punkt $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$ i niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną, taką że $\nabla f(\boldsymbol{p}) \neq \boldsymbol{0}$. Wykaż, że przestrzeń styczna do zbioru $W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{p})\}$ w punkcie $\boldsymbol{p}$ to

$$\mathrm{T}_{\boldsymbol{p}} W = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \nabla f(p), \boldsymbol{v} \rangle \geq 0\} \ .$$

Zadanie 9. Grzbiet górski można opisać jako wykres pewnej funkcji gładkiej $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Wiadomo, że $\nabla f(a,b) = [3,2]$. Wskaż kierunek największej stromizny grzbietu w punkcie (a,b), kierunek styczny do poziomicy w tym punkcie i oblicz kąt nachylenia stoku w kierunku północo-wschodnim (wektor $[1,1]$) w tym punkcie.
Zadanie 10. Niech $a > 0$. Dowieść, że płaszczyzny styczne do powierzchni $S = \{(x,y,z) \mid \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}\}$ odcinają na osiach współrzędnych odcinki, których suma długości jest stała.

Odpowiedzi i wskazówki:

Zadanie 1. $\{[a,b] \mid b \geq |a|\}$.

Zadanie 2. A jest sumą zbiorów $x = 0$, $x = 2y$, $x = -2y$ i $x = y^3$. Stąd przestrzeń styczna w $(0,0)$ to suma przestrzeni $\{[0,a] \mid a \in \mathbb{R}\}$, $\{[2a,a] \mid a \in \mathbb{R}\}$, $\{[-2a,a] \mid a \in \mathbb{R}\}$ i $\{[0,a] \mid a \in \mathbb{R}\}$.

Zadanie 3. Wektor styczny do K w punkcie P to $[2,3,-\pi]$ (pochodna krzywej $t \mapsto (t^2, t^3, \sin(\pi t))$ w $t = 1$), stąd prosta w postaci parametrycznej to $\{(1,1,0) + \lambda[2,3,-\pi] \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Odpowiednie równania to na przykład $3x - 2y = 1$ i $\pi x + 2z = \pi$.

Zadanie 4. $29x - 4y = 70$.

Zadanie 5. $4x + 2y - z = 3$.

Zadanie 6. Zbadać prostopadłość gradientów $\nabla f = [y^2, 2xy]$ i $\nabla g = [2x, -y]$.

Zadanie 7. Rozwiń $f(\boldsymbol{x}_n) = f(\boldsymbol{p} + (\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{p}))$ w szereg Taylora wokół $\boldsymbol{p}$.

Zadanie 8. Jeśli ciąg $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{p}$ elementów z W wyznacza wektor styczny $\boldsymbol{v}$ (tzn. $\frac{\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{p}}{\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{p}\|} \to \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}$) to $0 \leq \frac{f(\boldsymbol{x}_n) - f(\boldsymbol{p})}{\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{p}\|} \to \langle \nabla f(\boldsymbol{p}), \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} \rangle$ (poprzednie zadanie). Z twierdzenia o zachowaniu nierówności słabej mamy zawieranie „$\subset$”. Jeśli $\langle \nabla f(\boldsymbol{p}), \boldsymbol{v} \rangle > 0$, to dla dostatecznie małych $t > 0$ punkty krzywej $\boldsymbol{p} + t \cdot \boldsymbol{v}$ leżą w W, a zatem $\boldsymbol{v}$ jest realizowany jako wektor styczny do W w $\boldsymbol{p}$ na przykład przez ciąg $x_n = \boldsymbol{p} + \frac{1}{n} \cdot \boldsymbol{v}$. Wektory spełniające $\langle \nabla f(\boldsymbol{p}), \boldsymbol{v} \rangle = 0$ są realizowane przez punkty z poziomicy $\{\boldsymbol{x} \mid f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{p})\} \subset W$.

Zadanie 9. Kierunek najszybszego wzrostu jest wyznaczony przez gradient $[2,3]$. Kierunek styczny do poziomicy jest prostopadły do gradientu, czyli $[-3,2]$. Pochodna kierunkowa w kierunku $[1,1]$ to produkt skalarny $\langle [2,3], [1,1] \rangle = 5$. Tangens konta nachylenia w tym kierunku to $\frac{5}{\|[1,1]\|} = \frac{5}{\sqrt{2}}$.

Zadanie 10. Równanie płaszczyzny stycznej do S w (x_0, y_0, z_0) to $\frac{x}{\sqrt{x_0}} + \frac{y}{\sqrt{y_0}} + \frac{z}{\sqrt{z_0}} = \sqrt{a}$. Płaszczyzna ta przecina osie współrzędnościowe w punktach $(\sqrt{a}\sqrt{x_0}, 0, 0)$, $(0, \sqrt{a}\sqrt{y_0}, 0)$ i $(0, 0, \sqrt{a}\sqrt{z_0})$. Suma niezerowych współrzędnych to a.

Wyższe pochodne, wzór Taylora

Standardowe typy zadań:

- *Rozstrzygnij, czy dana funkcja jest gładka.*
- *Wyznacz wyższą pochodną funkcji.*
- *Rozwiń daną funkcję w szereg Taylora.*

Co należy wiedzieć:

- *Znać definicję funkcji klasy C^k dla $k = 1, 2, \ldots, \infty$.*
- *Rozumieć notację wielowskaźnikową $D^\alpha f$, gdzie $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.*
- *Znać twierdzenie o szeregu Taylora dla funkcji wielu zmiennych (w szczególności związek między współczynnikami szeregu Taylora a pochodnymi cząstkowymi funkcji i pamiętać o założeniach).*
- *Wiedzieć, że rozwinięcie funkcji w szereg Taylora jest jednoznaczne (o ile istnieje).*
- *Wiedzieć, że na szeregach Taylora można wykonywać podstawowe operacje arytmetyczne i operacje składania o ile umie się dobrze kontrolować reszty (to wynika z punktu poprzedniego).*
- *Znać wersję twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej dla funkcji wielu zmiennych.*
- *Znać twierdzenia Schwartza o symetrii drugiej różniczki i o symetrii pochodnych mieszanych.*

Zadanie 1. Wykaż, że funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2+y^2}} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

jest klasy $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

Zadanie 2. Czy istnieje funkcja różniczkowalna dla której

$$\nabla f(x,y) = [\sin(xy), \cos(xy)] \ ?$$

Zadanie 3. Jaki warunek musi spełniać funkcja różniczkowalna $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ aby wektor

$$g(x,y)[2x, -y]$$

mógł być gradientem pewnej funkcji $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$? Wykaż, że takie f jest postaci $f(x,y) = \phi(x^2 - \frac{1}{2}y^2)$ dla pewnej funkcji $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ klasy $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Zadanie 4. Laplasjanem funkcji $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ nazywamy wyrażenie

$$\triangle f(x,y,z) := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) \ .$$

Rozstrzygnij dla jakich wartości parametru $k \in \mathbb{R}$ laplasjan funkcji $f_k(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^k$ określonej na $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ znika w całej dziedzinie.

Zadanie 5. Obliczyć wielomian Taylora stopnia 4 funkcji $f(x,y) = \cos(xy^2) - \sin(x^2 y)$ w punkcie $(0,0)$.

Zadanie 6. Dla $k \in \mathbb{N}$ znajdź wyższą pochodną cząstkową $D^{(k,2k)} f$ funkcji $f(x,y) = \operatorname{arctg}(xy^2)$ w punkcie $(0,0)$.

Zadanie 7. Znajdź wyższe pochodne cząstkowe $D^{(\alpha,\beta)} f(0,0)$ funkcji $f(x,y) = \cos[2x + 3y]$ dla wszystkich $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$.

Zadanie 8. Obliczyć wielomian Taylora stopnia 3 w punkcie $a = (1,1)$ funkcji $f(x,y) = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$.
Zadanie 9. Obliczyć wielomian Taylora stopnia 2 funkcji $x\,\mathrm{tg}(y+z) + y\,\mathrm{tg}(z+x) + z\,\mathrm{tg}(x+y)$ w punkcie $\boldsymbol{a} = (\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, 0)$.
Zadanie 10. Dana jest funkcja $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ taka, że

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - \mathrm{tg}(x)\sin(y)}{x^2+y^2} = 0\ .$$

Oblicz $f_{xy}(0,0)$.
Zadanie 11. Funkcja $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ spełnia zależność

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - \ln(1+3x)\cos(y)}{x^2+y^2} = 1\ .$$

Oblicz $f_{xx}(0,0)$.
Zadanie 12. Funkcja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna i ma tę własność że jej macierz drugiej pochodnej jest dodatnio określona w każdym punkcie. Wykaż, że w dowolnym punkcie $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ wykres f leży powyżej płaszczyzny stycznej do niego przechodzącej przez $(\boldsymbol{v}, f(\boldsymbol{v}))$.

Odpowiedzi i wskazówki:

Zadanie 1. Wszystkie pochodne cząstkowe $f(x,y)$ dla $(x,y) \neq 0$ są postaci $w(x,y)\exp[-\frac{1}{x^2+y^2}]$, gdzie $w \in \mathbb{R}[x,y]$ jest wielomianem (klasa funkcji tego typu jest zamknięta na różczniczkowanie cząstkowe). Każda z takich funkcji ma granicę 0 przy $(x,y) \to (0,0)$. Przez indukcję łatwo pokazać, że wszystkie pochodne cząstkowe $f(x,y)$ w $(0,0)$ są równe 0: kolejne różniczkowanie np. po x to granica postaci $\lim_{x\to 0} \frac{w(x,0)\exp[-\frac{1}{x^2+0^2}]-0}{x} = 0$.
Zadanie 2. Nie. Funkcja tak określona byłaby klasy C^∞ (wystarczy C^2), bo pochodne cząstkowe $f'_x = \sin(xy)$ i $f'_y = \cos(xy)$ są klasy C^∞. Na mocy tw. Schwartza powinniśmy mieć zatem równość pochodnych mieszanych $f''_{xy} = f''_{yx}$, co nie zachodzi.
Zadanie 3. Na mocy tw. Schwartza (f jest klasy C^2) powinniśmy mieć $2xg'_y = f''_{yx} = f''_{xy} = -yg'_x$, a zatem warunkiem koniecznym jest $2xg'_y + yg'_x = 0$. Teraz możemy postępować na dwa sposoby. 1. Pokazać, że wówczas $g(x,y) = \psi(x^2 - \frac{1}{2}y^2)$, mianowicie sprawdzamy, że dla dowolnego ustalonego sensownego c funkcja $g(x, \sqrt{2x^2-2c})$ jest stała, stąd możemy zdefiniować $\psi(c) = g(x, \sqrt{2x^2-2c})$ i wówczas podstawiając $y = \sqrt{2x^2-2c}$ mamy $g(x,y) = \psi(x^2 - \frac{1}{2}y^2)$. Dalej $f'_x = g(x,y)2x = \psi(x^2-\frac{1}{2}y^2)\cdot(x^2-\frac{1}{2}y^2)'_x$ i $f'_y = -g(x,y)y = \psi(x^2-\frac{1}{2}y^2)\cdot(x^2-\frac{1}{2}y^2)'_y$. Stąd $f(x,y) = \phi(x^2 - \frac{1}{2}y^2)$, gdzie $\phi(\cdot)$ to funkcja pierwotna $\psi(\cdot)$. 2. Możemy od razu zauważyć, że warunek zadania implikuje, że f spełnia równanie $2xf'_y + yf'_x = 0$ i rozwiązać je tak jak poprzednio analogiczne równanie na g.
Zadanie 4. $k = 0$ lub $k = -\frac{1}{2}$.
Zadanie 5. $1 - x^2y$.
Zadanie 6. $\operatorname{arctg}(xy^2) = \sum_{i=0}^\infty (-1)^i \frac{(xy^2)^{2i+1}}{2i+1}$. Stąd widać, że niezerowe są tylko pochodne $D^{(k,2k)}f(0,0)$ dla $k = 2i+1$. Współczynnik przy wyrazie $x^k y^{2k}$ w rozwinięciu Taylora powinien wynosić $\frac{1}{k!\cdot 2k!} D^{(k,2k)}f(0,0)$, stąd $D^{(2i+1,4i+2)}f(0,0) = (-1)^i \frac{(2i+1)!(4i+2)!}{4i+2}$ i $D^{(2i,4i)}f(0,0) = 0$.
Zadanie 7. $\cos[2x+3y] = \sum_{i=0}^\infty (-1)^i \frac{(2x+3y)^{2i}}{(2i)!} = \sum_{i=0}^\infty (-1)^i \frac{1}{(2i)!} \sum_{s=0}^{2i} \binom{2i}{s} 2^s x^s 3^{2i-s} y^{2i-s}$. Stąd niezerowe pochodne to $D^{(s,2i-s)}f(0,0) = s!(2i-s)!(-1)^i \frac{1}{(2i)!}\binom{2i}{s} 2^s 3^{2i-s} = (-1)^i 2^s 3^{2i-s}$. Inny sposób zauważyć, że pochodne nieparzystego stopnia są postaci $a\sin[2x+3y]$, zaś pochodne parzystego stopnia $\frac{\partial^{2i} f}{\partial^i x \partial^{2i-s} y}(x,y) = (-1)^i 2^i 3^{2i-s} \cos[2x+3y]$.
Zadanie 8. Chcemy rozwinąć $f(1+h, 1+s) = \frac{1+h}{1+s} - \frac{1+s}{1+h}$ w szereg Taylora stopnia 3 w zmiennych h i s wokół $h = s = 0$. Mamy $\frac{1+h}{1+s} - \frac{1+s}{1+h} = (1+h)(1-s+s^2-s^3+o(s^3)) - (1+s)(1-h+h^2-h^3+o(h^3)) = 2h - 2s - h^2 + s^2 - h^3 - s^3 - h^2 s + hs^2 + o(|h|^3 + |s|^3)$.
Zadanie 9. $f(\frac{\pi}{4} + h, -\frac{\pi}{4} + s, 0 + t) = (\frac{\pi}{4} + h)\operatorname{tg}(-\frac{\pi}{4} + s + t) + (-\frac{\pi}{4} + s)\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + h + t) + t\operatorname{tg}(h+s) = (\frac{\pi}{4} + h)(-1 + 2s + 2t) + (-\frac{\pi}{4} + s)(1 + 2h + 2s) + t(h+s) + r_2(h,t,s)$.
Zadanie 10. Funkcje $f(x,y)$ i $\operatorname{tg}(x)\sin(y)$ mają takie same rozwinięcie Taylora rzędu 2.
Zadanie 11. Funkcje $f(x,y)$ i $\ln(1+3x)\cos(y) + x^2 + y^2$ mają takie same rozwinięcie Taylora rzędu 2.
Zadanie 12. Płaszczyzna styczna do wykresu f w punkcie $(\boldsymbol{v}, f(\boldsymbol{v}))$ to $\{(\boldsymbol{w}, f(\boldsymbol{v}) + \langle \nabla f(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}\rangle) \mid \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n\}$. Z rozwinięcia Taylora i założeń zadania $f(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) \geq f(\boldsymbol{v}) + \langle \nabla f(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}\rangle$.

Twierdzenie o funkcji odwrotnej, dyfeomorfizmy

Standardowe typy zadań:

- *Sprawdź czy dane odwzorowanie jest (lokalnym) dyfeomorfizmem.*
- *Dokonaj zamiany zmiennych w wyrażeniach zawierających pochodne.*
- *Znajdź dyfeomorfizm pomiędzy zadanymi zbiorami.*

Co należy wiedzieć:

- *Znać twierdzenie o funkcji odwrotnej (w szczególności umieć sprawdzić że spełnione są założenia i obliczyć pochodną odwzorowania odwrotnego).*
- *Znać definicję dyfeomorfizmu i umieć sprawdzić czy dane odwzorowanie jest dyfeomorfizmem.*
- *Wiedzieć że złożenie dyfeomorfizmów i odwrotność dyfeomorfizmu są dyfeomorfizmami.*
- *Umieć wskazać/skonstruować dyfeomorfizm pomiędzy prostymi zbiorami na płaszczyźnie i w przestrzeni.*
- *Umieć policzyć różniczkę funkcji w nowych zmiennych.*

Zadanie 1. Oblicz różniczkę odwzorowania sferycznego $f : \mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^3$

$$f(r, \theta, \phi) = (r \cos\theta \cos\phi, r \sin\theta \cos\phi, r \sin\phi)$$

i sprwdź, że jest ono dyfeomorfizmem na obraz.

Zadanie 2. Oblicz różniczkę odwzorowania walcowego $F : \mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$f(r, \theta, z) = (r \cos\theta, r \sin\theta, z)$$

i sprwdź, że jest ono dyfeomorfizmem na obraz.

Zadanie 3. Sprawdź, czy przekształcenie $f(x, y) = (e^{x+y} + e^{x-y}, e^{x+y} - e^{x-y})$ jest dyfeomorfizmem $\mathbb{R}^2$ na obraz.

Zadanie 4. Skonstruuj dyfeomorfizm

a) otwartego prostokąta $P = \{(x, y) \mid |x| < 1, |y| < 3\}$ na otwarte półkole $B' = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1, y > 0\}$.

b) zbioru $A = \{(x, y) \mid 0 < x < y\}$ na półpłaszczyznę $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

Zadanie 5. Czy istnieje dyfeomorfizm przekształcający zbiór $D = \{(x, y) \mid \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} > 1\}$ na zbiór $B = \{(x, y) \mid \sqrt{x^2 + y^2} < 1 - 2y^2\}$?

Zadanie 6. Wskaż dyfeomorfizm $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ taki, że obrazem zbioru $B(\mathbf{0}, 9) \setminus \overline{B(\mathbf{0}, 1)}$ jest zbiór $B(\mathbf{0}, 4) \setminus \overline{B(\mathbf{0}, 1)}$.

Zadanie 7. Niech $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ będą funkcjami klasy C^1 takimi, że $f(x) < g(x)$ dla wszystkich $x \in (a, b)$. Przekształcić dyfeomorficznie zbiór $\{(x, y) \mid x \in (a, b), f(x) < y < g(x)\}$ na prostokąt $(a, b) \times (0, 1)$.

Zadanie 8. Rozważmy odwzorowanie $f(x, y) = (x^2 - 2y + 3y^2, xy + y^2)$. Wykaż, że f zawężone do pewnego otoczenia O punktu $(1, 1)$ jest bijekcją na pewne otoczenie U punktu $(2, 2)$. Uzasadnij, że przyjmując $f(x, y) = (v, w)$ możemy wyrazić x i y jako $x(v, w)$ i $y(v, w)$ dla $(v, w) \in U$. Oblicz $\frac{\partial x}{\partial v}(2, 2)$. **Zadanie 9.** Rozważmy funkcję f klasy $C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ i dokonajmy zamiany zmiennych $\Phi : (x, y) \mapsto (u = x + y, v = x - y)$.

Zapisz wyrażenie $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ w zmiennych (u, v), tzn. wyraź je w terminach pochodnych funkcji $g(u, v) := f(\Phi^{-1}(u, v))$. (Wówczas $f(x, y) = g(u(x, y), v(x, y))$.)

Zadanie 10. Korzystając z wyników poprzedniego zadania rozwiąż jednowymiarowe równanie falowe, tzn. znajdź wszystkie funkcje $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ spełniające zależność

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \ .$$

Odpowiedzi i wskazówki:

Zadanie 1. f jest różnowarotściowe: łatwo sprawdzić, że jeśli $f(r,\theta,\phi)=f(r',\theta',\phi')$ to $r=r'$. Stąd $\sin\phi=\sin\phi'$, co wobec $\phi,\phi'\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ daje $\phi=\phi'$. W konsekwencji $\sin\theta=\sin\theta'$ i $\cos\theta=\theta'$, skąd wobec $\theta,\theta'\in(-\pi,\pi)$ mamy $\theta=\theta'$.

$$Df(r,\theta,\phi)=\begin{pmatrix}\cos(\theta)\cos(\phi) & -r\cos(\phi)\sin(\theta) & -r\cos(\theta)\sin(\phi)\\ \cos(\phi)\sin(\theta) & r\cos(\theta)\cos(\phi) & -r\sin(\theta)\sin(\phi)\\ \sin(\phi) & 0 & r\cos(\phi)\end{pmatrix}$$

$\det[Df]=r^2\cos(\phi)\neq 0$.

Zadanie 2. Odwzorowanie walcowe to produkt odwzorowania biegunowego i identyczności na współrzędnej z. Łatwo sprawdzić wszystkie warunki: rożnowartościowość i nieosobliwość różniczki.

Zadanie 3. Odwzorowanie f jest bijekcją na obraz: jeśli $f(x,y)=f(x',y')$ to łatwo sprawdzić, że $e^{x+y}=e^{x'+y'}$ oraz $e^{x-y}=e^{x'-y'}$. Z różnowartościowości funkcji $\exp(\cdot)$ mamy $x+y=x'+y'$ oraz $x-y=x'-y'$, skąd $(x,y)=(x',y')$. Ponadto $\det[Df(x,y)]=4e^{2x}\neq 0$.

Zadanie 4. (a) Na przykład jako złożenie: prostokąt na kwadrat (skalowanie jednej współrzędnej), kwadrat na $\mathbb{R}^2$ (tangens na każdej współrzędnej), $\mathbb{R}^2$ na $\mathbb{R}\times\mathbb{R}+$ ($\exp(\cdot)$ na drugiej współrzędnej), odwrotność półkole na $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ (skalowanie obu współrzędnych przez $\mathrm{tg}(\pi(x^2+y^2)/2)$); (b) Na przykład jako złożenie: A na $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$ ($(x,y)\mapsto(\mathrm{tg}(\frac{\pi x}{2y}),y)$ – rozciągamy każdy z odcinków $\{(x,y)\mid x\in(0,y)\}$ na półprostą za pomocą tangensa) i $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$ na $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ – $(x,y)\mapsto(\ln x,y)$.

Zadanie 5. Nie istnieje nawet homeomorfizm między tymi zbiorami: D ma 2 składowe spójne, a B tylko jedną (jeśli $(x,y)\in B$ to też (x',y) dla $|x'|<x$, a zatem możemy połączyć dowolny $(x,y)\in B$ z punktem $(0,y)\in B$ odcinkiem zawartym w B. Można policzyć, że zbiór punktów postaci $(0,y)$ w B to odcinek $\{(0,y)\mid y\in-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\}$.

Zadanie 6. Na przykład dowolne odwzorowanie, postaci $\phi(x,y)=\frac{f(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y)$, gdzie $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ jest rosnącą bijekcją różniczkowalną taką, że $f(1)=1$ i $f(9)=4$. We współrzędnych biegunowych $\phi(r,\alpha)=(f(r),\alpha)$

Zadanie 7. Możemy przeskalować odcinki $\{(x,y)\mid y\in(f(x),g(x))\}$ na odcinki $(0,1)$. Na przykład tak $(x,y)\mapsto(x,\frac{y-f(x)}{g(x)-f(x)})$.

Zadanie 8. Sprawdzamy, że f spełnia w $(1,1)$ założenia TFO, a więc jest bijekcją otoczenia $(1,1)$ na otoczenie $f(1,1)=(2,2)$. Szukana zależność $x=x(v,w)$ i $y=y(v,w)$ jest zadana przez funkcję odwrotną f^{-1}. Szukana pochodna to wyraz w pierwszym wierszu i pierwszej kolumnie macierzy $Df^{-1}(2,2)=[Df(1,1)]^{-1}=\begin{pmatrix}2&4\\1&3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}3/2&-2\\-1/2&1\end{pmatrix}$, a zatem $\frac{\partial x}{\partial v}(2,2)=\frac{3}{2}$.

Zadanie 9. Stosując regułę łańcuchową do złożenia $f(x,y)=g(u(x,y),v(x,y))=g(x+y,x-y)$ dostaniemy, że $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial g}{\partial u}(x+y,x-y)+\frac{\partial g}{\partial v}(x+y,x-y)$. Stąd

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(x+y,x-y)+2\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(x+y,x-y)+\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(x+y,x-y)\ .$$

Podobnie $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial g}{\partial u}(x+y,x-y)-\frac{\partial g}{\partial v}(x+y,x-y)$, skąd

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(x+y,x-y)-2\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(x+y,x-y)+\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(x+y,x-y).$$

Zatem $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(x,y)=4\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(u,v)$, gdzie $(u,v)=(x+y,x-y)$.

Zadanie 10. W po zamianie zmiennych na (u,v) funkcja g powinna spełniać zależność $\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(u,v)=0$. Oznacza to, że pochodna $\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)$ nie zależy od zmiennej u, a więc $\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)=\phi(v)$. Wobec tego $g(u,v)$ jako funkcja zmiennej v jest funkcją pierwotną funkcji ϕ, a więc jest postaci $g(u,v)=\Phi(v)+\Psi(u)$, gdzie $\Phi'(v)=\phi(v)$ (funkcja $\Psi(u)$ pełni rolę stałej całkowania względem zmiennej v i może a priori zależeć od drugiej zmiennej u). Łatwo sprawdzić, że dowolna funkcja takiej postaci spełnia równanie $\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(u,v)=0$. Wracając do wyjściowych zmiennych: $f(x,y)=\Phi(x-y)+\Psi(x+y)$, gdzie Φ i Ψ to dowolne funkcje klasy $C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Twierdzenie o funkcji uwikłanej, rozmaitości zanurzone

Typy zadań:

- *Wykaż że dane odwzorowanie zadaje funkcję uwikłaną.*
- *Oblicz pochodną funkcji uwikłanej.*
- *Dokonaj zamiany zmiennych w wyrażeniach zawierających pochodne.*
- *Sprawdź, że dany zbiór jest podrozmaitością zanurzoną.*

Co należy wiedzieć:

- *Znać twierdzenie o funkcji uwikłanej i umieć je zastosować (w szczególności umieć sprawdzić założenia).*
- *Umieć obliczyć pochodną funkcji zadanej w sposób uwikłany.*
- *Umieć sprawdzić, że równanie funkcyjne zadaje rozmaitość zanurzoną (lokalnie spełnione są założenia TFU w jakimś kierunku).*
- *Umieć policzyć przestrzeń styczną do rozmaitości zadanej w sposób uwikłany i do wykresu funkcji.*

Zadanie 1. Uzasadnić, że w otoczeniu punktu $(2, -1, 1)$ równanie $xz = 2 + y \ln z$ wyznacza $z(x, y)$ klasy C^2. Obliczyć $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(2, -1)$.
Zadanie 2. Wykaż, że w pewnym otoczeniu punktu $(x_0, y_0, z_0) = (1, -1, 0)$ równanie $xe^z = y + 2z$ wyznacza jednoznacznie z jako funkcję zmiennych pozostałych zmiennych $z = z(x, y)$ klasy C^1. Napisać równanie płaszczyzny stycznej do wykresu tej funkcji w punkcie $(1, -1, 0)$.
Zadanie 3. Uzasadnić, że w otoczeniu punktu $(1, 1, 0, 0)$ układ równań

$$\begin{cases} e^u + v & = xy \\ 2u + e^v & = 2y - x \end{cases}$$

wyznacza u i v jako funkcje klasy C^1 zmiennych x i y. Obliczyć różniczkę $\phi : (x, y) \mapsto (u, v)$ w punkcie $(1, 1)$.
Zadanie 4. Niech $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 + y^3 + z^4 + xyz = 4\}$. Wykaż, że M jest rozmaitością dwuwymiarową klasy C^1. Wyznacz przestrzeń styczną do M w punkcie $(\sqrt[3]{3}, 0, -1)$.
Zadanie 5. Udowodnić, że zbiór $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2x^2 + 2(z + 1)xy + y^2e^z = 16\}$ jest rozmaitością 2-wymiarową. Znaleźć płaszczyznę styczną do S w punkcie $(3, 2, 0)$.
Zadanie 6. Czy zbiór $S = \{(x, y, 0) \mid (x^2 + y^2 - x)^2 = x^2 + y^2\}$ jest rozmaitością? Niech M oznacza podzbiór $\mathbb{R}^3$ powstały przez obrót S wokół osi $0X$. Opisać zbiór M równaniem. Czy $M \setminus \{\mathbf{0}\}$ jest rozmaitością? *Jak na razie wystarczy sprawdzać, że $S \setminus \{0\}$ jest rozmaitością. Sprawdzenie, że dany zbiór nie jest rozmaitością może być dość kłopotliwe*

Odpowiedzi i wskazówki:

Zadanie 1. Dla funkcji $f(x,y,z) = xz - 2 - y\ln z$ mamy $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = x - \frac{y}{z}$, a zatem $\frac{\partial f}{\partial z}(2,-1,1) = 3 \neq 0$ i działa TFU. Różniczkując $f(x,y,z(x,y)) = 0$ dostajemy $z'_x = \frac{-z^2}{xz-y}$ i $z'_y = \frac{z\ln z}{xz-y}$. Prawe strony równań są klasy C^1, stąd też lewe, a skoro z'_x i z'_y są klasy C^1 to z jest klasy C^2. Różniczkując równanie na z'_x po y łatwo dostaniemy $z''_{xy}(2,-1) = \frac{-1}{9}$.

Zadanie 2. Dla $f(x,y,z) = xe^z - y - 2z$ mamy $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = xe^z - 2$, stąd $\frac{\partial f}{\partial z}(1,-1,0) = -1 \neq 0$ i działa TFU. $\nabla f(1,-1,0) = [e^z, 1, xe^z - 2]\big|_{(1,-1,0)} = [1,1,-1]$. Stąd przestrzeń styczna to $x + y - z = 1 + (-1) - 0 = 0$.

Zadanie 3. Rozważmy $F(x,y,u,v) = (e^u + v - xy, 2u + e^v - 2y + x)$. $D_{(u,v)}F(1,1,0,0) = \begin{pmatrix} e^u & 1 \\ 2 & e^v \end{pmatrix}|_{(1,1,0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ jest nieosobliwa, zatem działa TFU. Z równania $D_{(x,y)}F + D_{(u,v)}FD_{(x,y)}\phi = 0$ dostajemy $D\phi(1,1) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Zadanie 4. Dla $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^4 + xyz - 4$ mamy $\nabla f(x,y,z) = [3x^2 + yz, 3y^2 + xz, 4z^3 + xy]$. Warunek $\nabla f = \mathbf{0}$ prowadzi do $-xyz = 3x^3 = 3y^3 = 4z^4$, stąd $f(x,y,z) = \frac{1}{12}xyz - 4$, a więc na M mamy $xyz = 48 = -4z^4$ sprzeczność. Na mocy TFU M jest rozmaitością dwuwymiarową. $\nabla f(\sqrt[3]{3}, 0, -1) = [3\sqrt[3]{9}, -\sqrt[3]{3}, -4]$, stąd przestrzeń styczna to $3\sqrt[3]{9}x - \sqrt[3]{3}y - 4z = 3\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{3}\cdot 0 - 4(-1) = 7$.

Zadanie 5. Dla $f(x,y,z) = z^2x^2 + 2(z+1)xy + y^2e^z - 16$ mamy $\nabla f(x,y,z) = [2xz^2 + 2y(1+z), 2e^zy + 2x(1+z), 2xy + e^zy^2 + 2x^2z]$. Można sprawdzić, że warunki $f(x,y,z) = 0$ i $\nabla f(x,y,z) = \mathbf{0}$ prowadzą do sprzeczności (wskazówka: wyliczyć zależność z^2x^2 i $2e^z$ od $2(z+1)xy$ z $f'_x = f'_y = 0$ i wstawić do równania $f = 0$). Stąd S jest rozmaitością na mocy FTU. $\nabla f(3,2,0) = [4,10,16]$, stąd płaszczyzna styczna to $4x + 10y + 16z = 4\cdot 3 + 10\cdot 2 + 16\cdot 0 = 32$.

Zadanie 6. S jest poziomicą odwzorowania $F(x,y,z) = ((x^2 + y^2 - x)^2 - x^2 - y^2, z)$. Łatwo sprawdzić, że w punkcie $(0,0,0)$ odwzorowanie F nie spełnia założeń TFU. Zbadajmy dokładniej S w tym punkcie. Używając współrzędnych biegunowych $(x,y) = (r\cos\alpha, r\sin\alpha)$, można sprawdzić, że w otoczeniu $(0,0)$ zbiór S jest opisany zależnością $(r - \cos\alpha)^2 = 1$, stąd $\cos\alpha = 1 + r > 1$ – brak rozwiązań lub $\cos\alpha = -1 + r$. Widzimy, że dla małych r kąt α jest bliski π. Stąd przestrzeń styczna do S w punkcie $(0,0,0)$ to $\{[-a, 0] \mid a \in \mathbb{R}_+\}$. Nie jest to przestrzeń liniowa, a więc S nie jest rozmaitością. Zbiór M to $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^2 + y^2 + z^2 - x)^2 = x^2 + y^2 + z^2\}$. $M \setminus \{\mathbf{0}\}$ jest rozmaitością na mocy TFU.